UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

BINDING LIST AUG 1 1923

7320

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. BOUQUET.

HERMITE.

SERRET.

TISSERAND.

DARBOUX.

PHILIPPON, *secrétaire*.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *J. Hoüel*, Secrétaire de la rédaction, Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux, cours d'Aquitaine, 66.

9404 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Math
B

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

3

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET
ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,
AVEC LA COLLABORATION DE
MM. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAÏEF, BROCARD, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, MANSION, POTOCKI, RADAU, RAYET, WEYR, ETC.,
SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

DEUXIÈME SÉRIE.
TOME VIII. — ANNÉE 1884.
(TOME XIX DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.

179852
24/4/23

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1884

QA
1
B8
N.19

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BRIOT (Ch.). — Théorie mécanique de la chaleur. 2e édition, publiée par M. E. Mascart, professeur au Collège de France, etc. VIII-352 p. in-8°. Paris, Gauthier-Villars; 1883.

L'excellent Livre que Briot avait publié en 1870 sur la *Théorie mécanique de la chaleur,* et qui était en grande partie la reproduction d'un Cours fait à la Sorbonne en 1867-1868, avait été accueilli avec la plus grande faveur par les physiciens et les géomètres et il était depuis longtemps épuisé. Dans les dernières années de son enseignement, si fructueux et si écouté, Briot était revenu à différentes reprises sur la Théorie mécanique de la chaleur; ses leçons, toujours au courant des progrès les plus récents de la Science, l'avaient conduit à préparer une nouvelle édition de son Ouvrage, qui devait notablement différer de la première. L'impression de cette seconde édition était même commencée, lorsqu'une mort prématurée est venue enlever Briot à l'affection de sa famille, de ses amis et de ses élèves. Heureusement la rédaction nouvelle était en grande partie terminée et M. Mascart,

qui a entrepris de terminer le travail commencé par Briot, a trouvé dans les manuscrits de l'auteur des indications étendues qui lui ont permis de rétablir les Chapitres inachevés.

On sait que l'Ouvrage de Briot était divisé en deux Parties, comprenant : l'une, les phénomènes thermiques proprement dits; l'autre, les phénomènes électriques. Ces deux Parties ont subi des modifications importantes. Nous signalons, par exemple, dans la première, le Chapitre relatif aux propriétés physiques des corps, où la discussion des lignes isothermes permet de grouper dans un même ordre d'idées les expériences si remarquables de M. Andrews sur l'état critique des gaz en même temps que les phénomènes de sursaturation et de surfusion, la notion de l'entropie si heureusement imaginée par M. Clausius, la vitesse du son, deux Chapitres nouveaux sur les applications de la Théorie de la chaleur à la Mécanique céleste et sur les phénomènes capillaires. Dans la seconde Partie, nous remarquons l'exposé des vues ingénieuses de M. William Thomson sur la thermo-électricité; l'introduction, dans l'électromagnétisme et l'électrodynamique, de la considération des feuillets magnétiques, enfin un exposé nouveau de la théorie de l'induction.

La nouvelle théorie se présente, on le voit, avec toutes les additions que réclamaient les progrès récents de la Thermodynamique; mais elle a conservé, grâce aux soins éclairés du nouvel éditeur, tous les caractères de rigueur, de clarté et de précision qui avaient assuré le succès de la première édition et en avaient fait une publication si éminemment utile. C'est assez dire qu'elle est appelée à recevoir le même accueil et à rendre aussi les plus grands services.

B. BONCOMPAGNI. — Atti di nascita e di morte di Pietro Simone marchese di Laplace, pubblicati da B. Boncompagni; estratto dal *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche*, t. XV, Agosto 1882. Roma, tipografia delle Scienze matematiche e fisiche, via Lata, n° 3; 1883.

Cet Opuscule est composé de 22 pages in-4°, dont les vingt et unième et vingt deuxième contiennent les actes de naissance et de

décès de Laplace. (L'illustre auteur de la *Mécanique céleste* est né le 23 mars 1749, à Beaumont-en-Auge; il est mort à Paris le 5 mars 1827.)

Les pages 3 à 20 du même Opuscule sont occupées par un curieux Mémoire sur ces documents. L'auteur y donne un Catalogue de soixante-cinq écrits et articles de journaux, dictionnaires et biographies, etc., relatifs à Laplace, dont quinze n'indiquent pas le jour de sa naissance, vingt-six l'indiquent exactement et vingt-quatre l'indiquent erronément.

De ces mêmes soixante-cinq écrits ou articles, huit n'indiquent pas le jour de la mort de notre grand géomètre, trente-huit l'indiquent exactement, seize, sans compter les trois publications indiquées sous les n°s 25, 40, 44, l'indiquent erronément. [Voyez les notes (2) de la page 17 et (3) de la page 20.]

N'est-ce pas un fait digne de remarque que ce singulier désaccord des écrivains et biographes dans la fixation de deux dates, si voisines de notre temps et si mémorables pour l'histoire des Sciences mathématiques et astronomiques ? N'est-il pas au moins surprenant que les contemporains de l'astronome qui régla avec tant de précision les mouvements des astres et la concordance des temps n'aient pas su déterminer d'une façon plus exacte la date de sa naissance et la date de sa mort ? Détail à ajouter à ceux donnés par le prince Boncompagni : c'est dans la salle de la mairie de Beaumont-en-Auge qu'est conservé le registre dans lequel est inscrit l'acte de baptême de Laplace, fixant au 23 mars 1749 la date de sa naissance; et sur la façade de cette même mairie, sur une plaque de marbre blanc incrustée dans la muraille, on avait gravé la date erronée du 22 mars 1749 ! Il n'y a pas longtemps que, par mes soins et sur l'invitation qui m'en a été faite par le prince Boncompagni, M. Laplace, maire de la commune, M. le préfet du Calvados et M. le Ministre de l'Instruction publique ont été avisés de cette erreur de date. On doit savoir gré à l'illustre éditeur du *Bullettino* d'avoir signalé toutes ces inexactitudes et d'avoir fixé d'une manière désormais indubitable deux dates qui intéressent à la fois l'histoire de notre pays et l'histoire des sciences.

ARISTIDE MARRE.

PREMIÈRE PARTIE.

MÉLANGES.

LES ZODIAQUES ET LE CALENDRIER ÉGYPTIEN [1];

PAR M. J. BERTRAND.

Les Mathématiques ne trompent jamais, mais elles refusent souvent de répondre. C'est en vain qu'on insisterait alors; les formules ne peuvent rendre que ce qu'on leur confie; elles développent la vérité ou transforment l'erreur sans en altérer le caractère.

La publication des œuvres de Letronne remet en lumière de vives discussions, dans lesquelles la méthode historique, opposée aux conséquences prétendues de la Mécanique céleste, semble lutter avec elle de rigueur et triompher sur tous les points.

Les assertions que Letronne combat au nom de l'histoire restent, il est vrai, rarement défendables; faut-il croire, pour cela, que la méthode de l'historien puisse démentir celle de l'astronome et prévaloir toujours contre les démonstrations d'un autre ordre? La conclusion serait injuste. Deux esprits droits, s'ils raisonnent avec prudence, doivent s'éclairer mutuellement sans rien affirmer qui soit contraire : où l'un se croit certain, l'autre peut conserver des doutes, jamais une certitude opposée. Qu'un raisonnement soit historique, philologique ou astronomique, il prouve ou ne prouve pas; c'est la distinction qu'il faut faire. La Trigonométrie et la Mécanique céleste apportent sans contredit des préventions favorables; mais, si leurs conclusions sont démontrées fausses ou demeurent douteuses, c'est que la Science est mal consultée. L'artillerie accroît la force d'une armée, mais à la condition que l'on tirera à bonne distance sans se tromper de direction.

Aucun monument de la vieille Égypte n'a donné plus de peine aux astronomes et aux érudits que les zodiaques de Denderah et d'Esné. On a vivement discuté leur signification et leur âge. Les

---

[1] *Œuvres choisies de J.-A. Letronne, assemblées, mises en ordre et augmentées d'un index par E. Fagnan.* 2e série : *Géographie et Cosmographie*, t. I et II. — Paris, Ernest Leroux, 1883.

doutés aujourd'hui ont cessé, grâce surtout aux savantes recherches de Letronne, complétées quelquefois, mais jamais démenties, par le progrès continuel de la Science. Le plafond de l'une des salles du temple de Denderah, situé à 10 lieues environ de l'ancienne Thèbes, était orné de figures sculptées ou peintes parmi lesquelles, au premier examen, on apercevait les douze signes du zodiaque, tels que les Grecs nous les ont transmis. Ils sont distribués sur une ligne spirale et le dernier signe, le Cancer, situé sur le même rayon que le Lion, est plus rapproché du centre. A ces signes étaient mêlées et adjointes d'autres figures, qui, malgré l'étoile sculptée à la fin de l'indication hiéroglyphique qui accompagne chacune d'elles, ne rappellent, à première vue, aucun souvenir astronomique.

Fourier, sans entrer au détail des preuves, avait assigné d'abord à ce tableau une antiquité de cent cinquante siècles, réduits, après réflexion, à deux mille cinq cents ans avant notre ère. La curiosité de deux ingénieurs, Jollois et Devilliers, tous deux membres de l'Institut d'Égypte, s'était exercée déjà sur le mystérieux tableau; ils s'inclinèrent devant la décision de leur illustre confrère et renoncèrent à traiter une matière qu'il possédait si bien. Les figures peintes et sculptées à côté des signes du zodiaque et au milieu de ces signes étaient, suivant Fourier, de simples emblèmes religieux; leur explication hiéroglyphique, alors indéchiffrable, laissait l'assertion sans contrôle et sans preuve. Les regards des savants n'en restaient pas moins attachés à cette œuvre mystérieuse, dans laquelle les disciples d'Hermès semblaient confirmer les assertions doctorales de Dupuis, l'oracle, dit Letronne, de ceux qui voulaient, au commencement de ce siècle, passer pour érudits et pour philosophes sans avoir ni philosophie ni érudition. Le gouvernement de Louis XVIII, en acquérant ce tableau, que tant de siècles n'avaient pu détruire, crut fournir à Biot l'occasion vivement désirée d'approfondir l'étude du plus intéressant et du plus complet des documents astronomiques de l'Égypte. Le savant physicien n'y trouva rien d'obscur; il crut y lire très clairement l'état du ciel sept cent seize ans avant notre ère, sans que l'erreur possible dépassât cinquante ans.

La discordance avec Fourier était de dix-huit siècles!

La recherche de l'âge d'une figure astronomique est facile, dit-

ficile ou impossible, suivant les indications qu'on peut y lire; il faut, avant tout, deviner les noms des astres représentés, le mode de projection et l'orientation de la figure. C'est là l'écueil; quand il est franchi, l'astronome raisonne et calcule sans introduire aucune erreur nouvelle, mais sans en corriger aucune.

Fourier, à première vue, avait désigné les points équinoxiaux, et, par une règle fort simple, il en déduisait le temps écoulé. En déployant plus d'art et mettant en jeu plus de science, Biot prétendit atteindre la rigueur géométrique. Il voulut d'abord rétablir la position du pôle, dont la place sur le tableau était vide. L'étude seule des signes du zodiaque, sans rien emprunter aux autres figures, suffisait, suivant lui, pour retrouver ce point dont tout dépend. Après avoir provisoirement excepté la figure du Cancer de l'anneau zodiacal, sculpté sur le médaillon, il traça, à travers l'ensemble de tous les autres, une courbe moyenne destinée à représenter le cercle écliptique. Cette définition bien imparfaite était la seule possible, et les conditions du problème laissaient à Biot un champ très vaste, très dangereux, mais très commode.

En réunissant par des lignes droites les points qui, sur la courbe écliptique présumée, correspondaient à un intervalle d'une demi-année, Biot constata la rencontre de ces diamètres en un même point et l'égalité de leurs longueurs. Cependant la courbe n'est pas un cercle, les rayons sont variables : c'est leur somme, deux à deux, qui est constante. En déduisant de cette seule propriété la nature de la courbe et la loi de la projection, Biot, il faut bien le dire, commet une erreur mathématique. Le savant auteur aurait pu, sans mettre en œuvre aucune théorie difficile, trouver des solutions en nombre infini ; il aperçoit la plus simple et la déclare unique. La loi de projection ainsi déterminée réduit tout à un dessin régulier, qui permet de nombreuses vérifications, subordonnées chacune à la divination de l'une des étoiles du tableau. Biot signale Fomalhaut, Régulus et Antarès, dont toutes les épreuves confirmeraient le choix, si la lecture, aujourd'hui certaine, des signes qui les accompagnent, n'était venue le démentir. Antarès, par exemple, doit être remplacée par la planète Saturne. La position du pôle est cependant déclarée certaine, et le point indiqué par le monument même est à peine (tous ces mots sont de Biot) à 2° de distance de la position qu'avait réellement le

pôle de l'équateur sept cent seize ans avant notre ère; deux degrés parcourus sur la sphère céleste par le pôle de l'équateur représentent, le calcul est facile, trois cent soixante années. Sur les sept cent seize ans dictés par tant de recherches, de raisonnements et de conjectures, l'erreur commise, c'est la déclaration même de Biot, est donc *à peine* de trois cent soixante!

La démonstration historique de Letronne est décisive. Le temple de Denderah est postérieur à l'ère chrétienne, les inscriptions grecques, le caractère esthétique des ornements, la lecture enfin des signes hiéroglyphiques obtenue par Champollion, ne laissent subsister aucun doute; mais ces preuves réunies et concordantes, on nous pardonnera d'insister sur ce point, n'ont rien renversé qu'une science sévère eût intérêt à défendre.

En revenant, dans trois Mémoires différents, sur le problème des zodiaques, Letronne ne s'est pas borné à fixer une date et à rectifier une erreur; il a trouvé et rendu vraisemblable la signification de ces figures, toutes postérieures, en Égypte, à la domination grecque. L'étude d'une momie et d'un sarcophage couvert d'inscriptions qui la contenait a transformé les conjectures en certitude. Letronne a su retrouver le nom du mort, la date de sa naissance, la durée et les circonstances principales de sa vie. Il a interprété toutes les figures occultes, fort analogues à celles du petit temple d'Esné, et qui toutes se rapportent à la religion égyptienne; l'une d'elles, entourée par un zodiaque, rappelait par son style les peintures de Denderah. Le signe du Capricorne, dans le nouveau zodiaque, était séparé des autres comme le Cancer à Denderah. Les dates, connues cette fois avec précision, en révèlent le motif. L'intention est astrologique : Pétémenon, c'est le nom de la momie, était né en effet le 12 janvier de l'an 95, sous l'influence du Capricorne, et la figure représente son thème natal. L'explication s'étend sans difficulté aux monuments publics, et les zodiaques y sont, sans aucun doute, la marque commémorative d'un événement, comme l'érection d'un temple ou la fondation d'une ville. Aucun fait, jusqu'ici, n'est venu démentir cette théorie et le grand nombre des zodiaques, presque tous postérieurs à l'ère chrétienne, s'explique par le développement de l'astrologie qui, née chez les Orientaux, a pris, vers cette époque, chez les Grecs et les Romains, un développement bien connu. Letronne, sans se borner à ces vues

générales et sans se départir de sa prudence accoutumée, présume, sans l'affirmer, qu'à Denderah le planisphère concerne Auguste, et le zodiaque du Pronaos Tibère. A Esné, celui du grand temple lui paraît relatif à Claude, et celui du petit, à Antonin.

Letronne, dans plusieurs Mémoires, a étudié le calendrier égyptien, et, sur ce point encore, il aime à faire ressortir la supériorité des arguments historiques qu'il veut invoquer seuls et qui doivent lui suffire. La connaissance de la Mécanique céleste ne donne en effet aucun avantage dans cette discussion habilement poursuivie depuis deux siècles.

L'année égyptienne se composait de 365 jours, sans intercalation ; chaque année, à une même date correspondait une position nouvelle du soleil, qui rétrogradait tous les quatre ans du chemin parcouru pendant le jour complémentaire que nous ajoutons aujourd'hui. Les fêtes célébrées à date fixe se transportaient de l'été dans le printemps, puis dans l'hiver et dans l'automne, sanctifiant tour à tour, dans une période de 1460 ans, toutes les saisons de l'année. Les Égyptiens savaient par quel artifice on aurait pu éviter ce désordre. Démocrite, Platon et Eudoxe, l'ont appris d'eux et leur en font honneur. Mais leurs prêtres avaient-ils trahi pour ces illustres visiteurs un secret commis à leur garde? L'année fixe, au contraire, était-elle une institution réalisée dans la vie civile et dans les actes officiels? La question a été débattue.

Letronne, cette fois encore, par des textes décisifs, fait triompher la méthode historique; mais était-il possible d'en employer une autre?

Diodore de Sicile, soixante ans avant notre ère, écrivait : Les prêtres thébains ajoutent cinq jours et un quart aux douze mois de trente jours, et de cette manière ils complètent le cercle annuel.

Strabon attribue le même usage aux prêtres thébains. Aux douze mois de trente jours ils ajoutent cinq jours tous les ans, dit-il, et, pour compléter l'année exacte, ils composent une période de jours entiers et d'années entières autant qu'il en faut pour que les parties excédantes forment un jour. Ils attribuent à Hermès toute cette science.

C'est à ce même artifice que fait allusion Dion Cassius, quand il dit : César, *lui aussi*, introduisit l'usage de compter tous les quatre

ans un jour composé de quatre quarts. Sosigène, que César appela d'Égypte, en a rapporté l'année julienne.

L'époque de l'institution de l'année vague n'est indiquée sur aucun monument. Avec chaque règne, en effet, commence une ère nouvelle, et sur les inscriptions connues on lit seulement le temps écoulé depuis l'avènement du roi régnant. A défaut d'une certitude démontrée, plusieurs hypothèses ont partagé les érudits. Isaac Newton a cherché à quelle époque le premier jour de Thot, premier mois de l'année égyptienne, a coïncidé avec l'équinoxe de printemps, son origine naturelle; entre les dates 884, 2344, 3804, qui amènent un tel accord, il adopte, sans motifs bien puissants, la plus rapprochée de l'ère chrétienne. Dans un opuscule très remarquable, intitulé *Canicularia*, que Newton a connu, Bainbridge avait admis la coïncidence initiale du premier jour de Thot, non avec l'équinoxe de printemps, mais avec le lever héliaque de Sirius, et appuyé sur des textes précis sa théorie très complète et très simple.

Le peuple égyptien, depuis la plus haute antiquité, associe le lever héliaque de Sirius au phénomène, presque vital pour lui, de la crue du Nil. Il ne faut ni instruments ni mesures pour observer l'apparition de la brillante étoile, ni science raffinée pour la prévoir. Sirius est invisible pendant cinq ou six semaines chaque année; il se lève alors et se couche pendant le jour. Bientôt cependant on le voit précéder le crépuscule et briller à l'orient avant la fin de la nuit et chaque jour ensuite s'élever de plus en plus sur l'horizon. On saluait Sirius par des fêtes solennelles. La prédiction était facile, car l'intervalle entre deux levers héliaques est constant et égal à trois cent soixante-cinq jours un quart, sans que, pendant une période de quatre mille ans, cette régularité se soit démentie. Le phénomène, dans l'année vague, correspond successivement à toutes les dates; mais, si on le rapporte au calendrier julien, hypothétiquement prolongé avant son origine, Sirius reparaît, à Memphis, le 20 juillet, à moins qu'un nuage fortuit n'en intercepte les rayons.

Si la date julienne du lever héliaque est invariable, celle de la crue annelle du Nil ne l'est pas. La coïncidence des deux phénomènes ne peut donc se maintenir. Le début des inondations, lié au solstice d'été, avance sur le lever héliaque de trois jours en

quatre siècles. La tradition n'en persista pas moins à faire de l'étoile caniculaire le régulateur de l'année, le principe excitateur du débordement et l'attribut de Sothis, déesse de la fécondité. Au temps du scoliaste d'Aratus, Sirius se levait héliaquement, pour le centre de l'Égypte, vingt-sept jours après le solstice, et son apparition, toujours en concordance avec la crue du Nil, qui dure cent jours, avait cessé d'en être le présage.

Bainbridge, en alléguant un texte de Censorinus, souvent cité dans cette discussion, fixait à l'année 1322 l'origine de la période dite sothiaque, qui, aux mêmes dates de l'année vague, ramène le soleil aux mêmes points de son orbite. L'accord du premier jour de Thot avec le lever héliaque de Sirius a eu lieu en l'an 139. D'autres, interprétant différemment le texte de Censorinus, disent 138; c'est en retranchant quatorze cent soixante ans que Bainbridge est conduit à la date 1322, adoptée par Fréret et par Letronne, pour y placer l'origine de l'année vague. Le principe adopté autorise à reculer de nouveau cette origine d'une période sothiaque : on trouve ainsi l'année 2782, et la découverte faite par Lepsius d'inscriptions mentionnant les jours complémentaires de l'année, à l'époque de la douzième dynastie, la rend aujourd'hui plus vraisemblable.

Biot a proposé une troisième hypothèse. Champollion avait donné une interprétation des hiéroglyphes représentant les douze mois de l'année et des trois divisions, chacune de quatre mois, nommées *tétraménies* de la végétation, des récoltes et de l'inondation. Le premier jour du mois, nommé *Pachon,* ouvrait la période dite de l'inondation; ce qui ne l'empêchait pas, puisqu'il conservait sa place dans l'année vague, de parcourir en mille quatre cent soixante ans le cycle complet des saisons. Ce premier jour de Pachon a coïncidé avec le solstice d'été dans les années juliennes 275, 1780, 3285, et cette concordance des phénomènes avec les divisions de l'année qui portaient leurs noms devait, suivant Biot, être annoncée et attendue longtemps à l'avance et laisser d'ineffaçables souvenirs. Elle a, s'il faut l'en croire, marqué l'origine de l'année vague, qui doit, d'après cette supposition, remonter à 1780 ou à 3285, si l'on renonce, dit-il, aux périodes plus distantes.

L'année 3285 présente, d'après les calculs de Biot, un caractère unique dans la série des siècles : à l'accord calculé du premier

jour de Pachon avec le solstice d'été, se trouve fortuitement associée la coïncidence du lever héliaque de Sirius avec ces deux époques réunies.

On doit remarquer cependant que, si l'accord rigoureux des trois époques n'a lieu qu'une seule fois dans un nombre immense de siècles, l'année 1780 présente pratiquement, sinon rigoureusement, le même caractère, avec une différence trop petite pour qu'on pût alors l'apercevoir; « d'où il suit », dit M. Biot, « que l'ancienne tradition a pu s'appliquer à l'une de ces années sans qu'on puisse aujourd'hui décider l'alternative ».

On doit remarquer que chacune des années 275, 1780 et 3285 est séparée de la précédente par mille cinq cent cinq ans et non pas par mille quatre cent soixante, intervalle qui sans doute aurait été adopté par un érudit moins versé que Biot dans les calculs astronomiques, s'il avait eu à appliquer le même principe. Le savant membre de l'Académie des Sciences attache à cette exactitude assez d'importance pour la faire expressément remarquer; il calcule les écarts du solstice par les formules de la Mécanique céleste, en tenant compte des inégalités séculaires. On comprend que ses adversaires ne l'aient pas suivi sur ce terrain. La question pour eux était de savoir si l'origine de l'année vague avait été marquée par la coïncidence des premiers jours de Thot avec le lever héliaque de Sirius, ou par celle du premier jour de Pachon avec le solstice, et s'il faut faire remonter l'année vague au XIVe siècle avant notre ère ou au XVIIIe. Dans la solution d'un tel problème, beaucoup d'érudits jugeront superflu de tenir compte de quelques heures par siècle dans les positions du solstice.

L'ingénieux auteur est allé plus loin, en déduisant des mêmes principes l'histoire vraisemblable du changement qui a porté l'année à trois cent soixante-cinq jours. Lorsque l'on comptait dans l'année douze mois seulement de trente jours, l'accord du mois de Pachon avec le solstice d'été revenait tous les soixante-dix ans; il est probable, suivant Biot, que l'addition des cinq jours supplémentaires a été faite à l'époque de l'une de ces coïncidences et dans l'espoir de la conserver.

Letronne n'accepte pas de telles allégations et refuse de les discuter. Il s'agit de savoir, a-t-il souvent répété, « ce qu'un peuple a fait réellement « et non ce qu'il a *pu* et *dû* faire ». On ne saurait

marquer plus nettement la différence des deux méthodes. Letronne avait, aussi bien que Biot, accepté de Champollion les signes hiéroglyphiques des saisons. L'un y puisait des arguments, l'autre des conjectures. Un savant égyptologue, M. Brugsch, a élevé contre plusieurs de ces interprétations des doutes jugés sérieux, puis proposé des preuves reconnues décisives. Letronne, heureusement, prenait ses précautions contre l'erreur. L'illustre et consciencieux érudit avait retardé treize ans la publication de son premier Mémoire sur le calendrier égyptien, par suite, disait-il, de sa répugnance à publier des travaux qui ne le satisfaisaient pas sur tous les points; ses dernières publications, retardées par les mêmes scrupules, n'ont pas été faites de son vivant. Le dernier Mémoire était inachevé : la plume, dit l'éditeur, s'était arrêtée au milieu d'une phrase. Embarrassé par des contradictions qu'il ne cache pas, Letronne espérait sans doute de la science des hiéroglyphes, dont il faisait son plus solide appui, la lumière qui lui manquait encore. Son attente, s'il eût vécu, n'aurait pas été trompée.

M. de Rougé a écrit : « Le talent de Letronne pour signaler et détruire une erreur n'a jamais été surpassé. » La louange est méritée, mais incomplète. En pressant fortement ses adversaires, Letronne, à leurs erreurs, sait substituer souvent la vérité. La rigueur cependant est impossible dans certains problèmes; les géomètres s'en éloignent alors; mais l'historien, sans sortir de son rôle, peut s'appliquer à rendre probables des conjectures qu'il donne pour telles, et que l'avenir démentira peut-être sans affaiblir son autorité.

Dans un Mémoire sur une table horaire du temple de Taphis en Nubie, apparaissent d'une manière bien remarquable l'attention ingénieuse de Letronne à glaner la lumière dans les moindres détails, son habileté à la concentrer sur un point décisif, sa prudence à n'exagérer aucune conclusion.

Un tableau en six colonnes, couvertes de chiffres presque effacés par le temps, fut retrouvé sous le portique d'un temple de Nubie. Quelle en était la destination? Comment rétablir les chiffres effacés en en pénétrant le principe? Letronne résout le problème. Son érudition lui fournit deux exemples, l'un en Grèce, l'autre en Italie, qui confirment ses conjectures; la table contient, pour six des mois de l'année, au quinzième jour de chacun, la longueur de

l'ombre sur un cadran solaire. Ici s'arrête la divination. La construction du cadran reste un problème que Letronne laisse aux astronomes. L'illustre archéologue avait rattaché d'abord la table de Taphis à une méthode dont se servaient, pour savoir l'heure, les habitants des campagnes, et dont plusieurs auteurs font mention. L'observateur se plaçait à un point marqué, il examinait en quel endroit se terminait l'ombre de sa tête et il mesurait avec ses pieds la longueur de son ombre. Les longueurs du pied humain étant avec le reste du corps dans une proportion qui varie peu, une même table pouvait servir à tous avec une approximation suffisante. La table de Taphis, copiée par les laboureurs, leur aurait fourni, dans cette hypothèse, un moyen facile de connaître l'heure pendant les différents mois de l'année. Les chiffres, malheureusement, contredisent cette explication, que Letronne se hâte d'abandonner. Un problème subsiste, dont voici l'énoncé : Définir un cadran solaire tel que les différences dans les longueurs des ombres, aux diverses heures du jour, demeurent constantes, savoir de dix unités entre la première et la seconde, de quatre entre la dexième et la troisième, de trois entre la troisième et la quatrième, de deux entre la quatrième et la cinquième, et d'une entre la cinquième et la sixième, et cela pour tous les jours de l'année.

Le savant jésuite Petau, qui a rencontré les mêmes indications dans Palladius, auteur d'un traité *De re rustica*, les déclare inconciliables : *Falsa est itaque Palladii tota illa descriptio*, dit Petau. Letronne se refuse à croire qu'on ait inscrit sous le péristyle du temple des chiffres inutiles ou trompeurs. La table, convenablement consultée, devait donner au moins une approximation. Les nombres étant tous entiers, on a évidemment négligé les fractions; le problème en devient moins élégant, mais c'est à cette condition sans doute qu'il devient possible.

Dans un Mémoire écrit en 1817, Letronne a recherché quelles ont été les mesures des dimensions de la Terre essayées par l'école d'Alexandrie. L'entreprise est difficile; la source principale, unique souvent, des renseignements, est un auteur appelé Cléomède, dont le savoir est médiocre, l'intelligence bornée et les récits contradictoires. Letronne ne se décourage pas : il écarte les assertions absurdes, corrige les autres et s'efforce de les compléter. Son premier soin est de chercher à quelle époque a écrit Cléo-

mède : on l'avait cru contemporain d'Auguste, et il semblait certain tout au moins qu'il avait précédé l'astronome Ptolémée, dont il ne cite le nom ni ne connaît les méthodes. Letronne n'accepte pas cette preuve; avant l'invention de l'imprimerie, les meilleurs ouvrages pouvaient, pendant des siècles, rester ignorés des savants éloignés. Cléomède, malgré son silence, a pu vivre plusieurs siècles après l'auteur de l'*Almageste*. La date des écrits de Cléomède est révélée à Letronne par deux lignes de son livre. En voulant démontrer que la Terre est comme un point par rapport à l'immensité de la voûte étoilée, Cléomède a écrit : « Il y a deux astres semblables par la grandeur et la couleur, diamétralement opposés l'un à l'autre ; ils occupent le 15e degré, l'un du Scorpion, l'autre du Taureau. » L'un de ces astres est Antarès, l'autre Aldébaran ; Ptolémée, dans son Catalogue, place l'un à 12° du Scorpion, l'autre à 12°50′ du Taureau. Pourquoi Cléomède change-t-il ces chiffres? La raison pour Letronne est évidente. L'auteur qu'il a copié, car Cléomède est incapable d'observer ou de calculer, a tenu compte de la précession des équinoxes, et le changement des longitudes est la mesure du temps écoulé depuis Ptolémée. L'explication est plausible, mais, pour qu'il fût permis de l'ériger en preuve, il faudrait qu'aucune autre ne fût acceptable. La substitution de 15° à un chiffre qui en diffère peu est, au contraire, aisée à expliquer. Si l'on se rappelle que les signes ont précisément 30°, quoi de plus naturel à un auteur qui veut désigner un astre placé à 12°50′ de l'origine d'un signe et dont le raisonnement ne demande aucune précision, que de placer cet astre au milieu du signe? L'erreur est à peine de 2°, et, dans ce cas, c'est fort peu de chose. Cléomède copiant ensuite, puisqu'il est convenu qu'il ne savait pas faire autre chose, avait assez de science, cependant, pour écrire, au lieu de « milieu du signe », la mesure correspondante, qui est 15°.

M. Letronne se demande enfin dans quel pays florissait ce Cléomède, dont le livre, sans critique et sans choix, met à contribution les auteurs de tous les temps et de tous les pays. Un seul fait est certain, dit-il, c'est que Cléomède n'écrivait pas à Alexandrie et qu'il n'a jamais visité cette ville; s'il y avait vécu, il n'aurait pas ignoré le nom de Ptolémée et aurait mieux connu Ératosthène et Hipparque. La conclusion est que Cléomède a vécu soit

à Constantinople, soit dans quelque lieu obscur de la Grèce ou de l'Asie.

Ce savant, médiocre, j'en conviens, mais assez bien renseigné pour qu'en le rectifiant on puisse le consulter avec profit, et qui, cent ans après Ptolémée, écrivait sur l'Astronomie sans connaître, même de nom, le guide commun de tous les astronomes, me semble un personnage difficile à accepter; si de l'ignorance bien constatée d'un auteur on concluait aujourd'hui qu'il n'a jamais habité ni visité Paris, on serait plus d'une fois convaincu d'erreur.

Personne ne se méprendra sur le sens de ces très légères critiques. J'ai voulu rappeler seulement qu'aucune méthode n'est infaillible, et que l'esprit le plus ingénieux, historien ou géomètre, en présence d'un problème insoluble, restera toujours désarmé.

POUR L'HISTOIRE DES LIGNES ET SURFACES COURBES DANS L'ANTIQUITÉ

Par M. Paul TANNERY [1].

SURFACES ET COURBES SPIRIQUES.

V.

Le concept des trois corps ronds, cylindre, cône et sphère, semble, comme celui de la droite et du cercle, antérieur aux débuts de la Science. Les autres surfaces courbes, dont l'étude par les anciens est historiquement constatée, sont :

Le cylindre et le cône circulaires obliques qui doivent avoir été considérés dès avant Archimède;

Les quatre surfaces de révolution du second degré inventées par le géomètre de Syracuse (*conoïdes* et *sphéroïdes*) [2];

Les surfaces *cylindroïdes* (nos cylindriques quelconques) et *plectoïdes* (nos conoïdes), dont nous avons vu Pappus parler incidemment;

---

[1] Seconde Note, *voir* le numéro d'octobre.

[2] Il n'a pas considéré l'hyperboloïde à une nappe.

Enfin les tores ou surfaces engendrées par la révolution d'un cercle autour d'un axe avec lequel il reste toujours dans un même plan.

L'invention de ces dernières surfaces était des plus naturelles, une fois la génération analogue constatée pour les trois corps ronds. De fait, cette invention semble avoir été la plus ancienne, et si celle de la première courbe différente du cercle, la *quadratrice*, remonte à la fin du ve siècle avant J.-C., dès le commencement du IVe au plus tard, Archytas de Tarente (*Eutocius sur Archimède*, éd. Torelli, p. 143) résolvait le problème des deux moyennes proportionnelles par l'intersection de trois surfaces :

Le cylindre ..... $x^2 + y^2 = ax$,

Le cône..... $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{b^2} x^2$,

Et le tore..... $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$

engendré par la révolution d'un cercle autour de l'une de ses tangentes.

Dans les *Definitiones* du pseudo-Héron (éd. Hultsch, Berlin, 1864), les surfaces de ce genre suivent immédiatement les trois corps ronds; elles sont connues sous le nom de *spires* (σπεῖρα) ou *anneaux* (κρίκος). Archytas ne semble pas avoir dénommé la sienne.

(P. 27) 98 : « La *spire* est engendrée par la révolution complète d'un cercle ayant son centre sur un autre cercle et son plan perpendiculaire à celui de ce second cercle. On l'appelle aussi *anneau*. La *spire* est *ouverte* (διεχής) quand elle présente un vide; *fermée* (συνεχής) quand il y a contact intérieurement en un point unique (¹), *rentrante* (παλλάττουσα) lorsque le cercle générateur se coupe lui-même. Ces corps ont pour sections certaines lignes qui les caractérisent. »

Comparons l'essai de classification des surfaces par le même compilateur (p. 23-24).

75 : « Les surfaces des figures solides sont soit *non composées*, soit *composées; non composées* quand, en les prolongeant, on re-

(¹) Comme dans le tore d'Archytas.

tombe sur la surface elle-même, comme pour la sphère; *composées* lorsque, en les prolongeant, elles se coupent réciproquement.

» Les surfaces *composées* le sont de parties qui sont ou ne sont pas du même genre; le genre est différent pour les cônes, les cylindres ([1]), les hémisphères et autres volumes semblables; il est le même pour les solides rectilignes ([2]).

» On peut diviser autrement les surfaces des figures solides en *simples* et *mixtes*. Les surfaces *simples* sont, dans la théorie des solides, les *planes* et la *sphérique;* les *mixtes* sont la conique, la cylindrique et autres semblables. La conique et la cylindrique sont *mixtes* de plan et de circonférence, les *spiriques mixtes de deux circonférences*. Il y a une infinité d'autres *mixtes*, aussi bien que de *composées*. »

76 : « Les lignes des figures solides sont également *simples* ou *mixtes*. Les *simples* sont les droites et les circulaires; les mixtes sont les *coniques* et les *spiriques*. Ce sont là les lignes *classées*, (τεταγμέναι). Il y en a une multitude infinie de *non classées* (ἄτακτοι), aussi bien que de *composées* ([3]). »

Pappus ne parle ni des *spires* (tores) ni de leurs sections, les lignes *spiriques*. Mais Proclus (Geminus) nous fournit des renseignements tout à fait identiques à ceux des *Definitiones* et les complète par d'autres plus précis.

Avant d'aborder la détermination des *spiriques* étudiées par les anciens, je vais insister sur l'identité des classifications essayées par Geminus et par le compilateur des *Definitiones*. L'intérêt de la question consiste dans ce fait que, si Geminus est reconnu, d'après le témoignage de Proclus, comme l'auteur de ces classifications, dont on n'a pas de trace avant lui et que Pappus n'emploie ni n'admet, il sera impossible de nier que le compilateur des

---

([1]) En tant que solides limités par des bases planes.

([2]) Polyèdres.

([3]) A la suite du fragment précédent (98), se trouve l'addition suivante, qui semble plus récente que le texte :

« Les *anneaux tétragones* sont des *tranches* (ἐκπρίσματα) de cylindres. Il y a divers autres *prismes* variés, engendrés par des sphères ou des surfaces mixtes. »

Ces *anneaux tétragones* sont évidemment les solides engendrés par la révolution d'un carré autour d'un axe parallèle à l'un des côtés.

Definitiones n'ait utilisé Geminus : par conséquent, il ne peut être qu'à peine antérieur à l'ère chrétienne.

Remarquons que la double division des surfaces d'une part en non composées et composées, de l'autre en simples et mixtes, en suppose une semblable pour les lignes. Les *Definitiones* semblent ne donner que la seconde pour les lignes et encore en limiter l'emploi à la théorie des solides. Mais cette limitation est évidemment inacceptable ([1]), et, d'autre part, la fin du passage cité reconnaît implicitement les lignes composées. La division correspondante est d'ailleurs donnée dans les *Definitiones,* sinon pour les lignes, au moins pour les figures.

(P. 15) 28 : « Les figures sur les surfaces sont soit *non composées,* soit *composées : non composées* quand elles ne sont pas formées par plusieurs lignes, *composées* quand elles le sont. Les figures composées sur les surfaces sont formées, soit de lignes de même nature, soit de lignes de nature différente, comme les secteurs de cercles, les demi-cercles, les *apsides* [segments plus petits que le demi-cercle] et les segments plus grands que le demi-cercle. *Comme formées de lignes homogènes* ([2]), on peut citer les *lunules*, les *couronnes* [espace compris entre deux cercles concentriques] et autres figures semblables. »

Comme on le voit, le parallélisme avec la classification des surfaces est complet.

Or nous retrouvons dans Geminus cette double division des lignes, et si pour les surfaces la distinction des simples et mixtes est seule indiquée par Proclus, c'est que, sur ce point, les extraits sont beaucoup moins complets.

Proclus, p. 111, l. 1-9 : « Geminus divise tout d'abord la ligne en *non composée* et en *composée* (il appelle *composée* celle qui est brisée et forme angle) ([3]), puis il subdivise la non composée

---

([1]) P. 9, l. 10. Les lignes circulaires sont dites être des lignes simples (ἁπλῶν), seules à faire des figures (à limiter un espace). La leçon de Hultsch : ἄλλων (autres), au lieu d'ἁπλῶν, est insoutenable. La remarque, assez singulière au reste, puisque la ligne droite est la seule simple avec la circonférence, se retrouve dans Proclus (éd. Friedlein, p. 107, l. 14).

([2]) Ces mots en italique manquent dans le texte.

([3]) Proclus passe sous silence la subdivision des lignes composées, de même que les *Definitiones* ont omis celle des non composées.

(lire ἀσύνθετον, l. 4, au lieu de σύνθετον) en formant figure et en prolongée à l'infini; formant figure, comme la ligne circulaire, celle du bouclier (¹), la cissoïde (²); n'en formant pas, comme la section du cône orthogone ou amblygone (parabole ou hyperbole), la conchoïde, la droite et autres semblables. »

Le passage suivant est plus complet (p. 176, l. 26, p. 177, l. 9) :

« Geminus a justement distingué, dans le principe, les lignes en limitées et formant figure, comme le cercle, la ligne de l'ellipse, la cissoïde et autres semblables, et en lignes indéfinies se prolongeant sans limite, comme la droite, la section du cône orthogone et amblygone, et la conchoïde. A leur tour, les lignes qui se prolongent indéfiniment peuvent ne former aucune figure, comme la droite et les sections coniques précitées, ou bien leurs branches se rencontrent, forment une figure, puis s'en vont à l'infini. »

Ce dernier passage est précieux en ce que, la conchoïde n'étant pas classée dans la première subdivision, on peut en conclure que les anciens avaient considéré le cas où elle forme boucle.

Reprenons la suite du passage précédent :

Proclus, p. 111, l. 9, p. 112, l. 15 : « D'une autre façon, il dit que la ligne non composée est *simple* ou *mixte;* que la *simple* forme une figure comme la circulaire, ou bien est indéfinie comme la droite; que la *mixte* se considère soit sur les plans, soit sur les solides; que sur les plans elle peut soit retomber sur elle-même, comme la cissoïde, soit se prolonger à l'infini; que sur les solides elle peut être imaginée suivant une section du solide, ou bien comme engendrée autour du solide. Ainsi l'hélice sur la sphère ou le cône est engendrée autour du solide, tandis que les sections coniques ou *spiriques* s'engendrent par telle ou telle section des solides. Ces sections ont été imaginées, les coniques par Ménechme, comme le témoigne Eratosthène, lorsqu'il dit :

Ni les triades de Ménechme, ses sections du cône;

(¹) Θυρεός. Comme Heiberg l'a remarqué, ce doit être là le premier nom porté par l'ellipse. Il se rencontre dans les *Phénomènes* d'Euclide.

(²) Les anciens ne considéraient donc la cissoïde qu'à l'intérieur du cercle générateur et en fermant la figure par deux branches symétriques.

les autres par Persée qui a fait cet épigramme sur sa découverte :

Ayant trouvé par des sections cinq et trois lignes (1),
Persée en a remercié les divinités.

» Les trois sections coniques sont la parabole, l'hyperbole et l'ellipse ; quant aux spiriques, l'une est entrelacée comme l'*entrave du cheval* (2), l'autre s'élargit au milieu en diminuant de côté et d'autre ; l'autre, au contraire, est allongée, resserrée vers son milieu et s'élargissant ensuite de côté et d'autre.

» Il y a une multitude indéfinie d'autres lignes mixtes, car le nombre des figures solides est illimité et elles donnent lieu à diverses sections. Si une droite, par une révolution circulaire, engendre une surface, il en est de même des sections coniques, des conchoïdes tout aussi bien que des circonférences, et en coupant ces solides de toutes les façons, on obtient des lignes de la plus grande variété... »

(P. 113, l. 3-6) : « Les curieux de la Science doivent aller rechercher ces démonstrations dans Geminus, comme aussi la génération des lignes spiriques, conchoïdes, cissoïdes. »

VI.

Le long extrait de Geminus, qui précède, et où l'on a pu remarquer la conception générale des surfaces de révolution, nous a donné incidemment d'importants détails sur les sections *spiriques*. Réunissons les autres données que Proclus a empruntées au même auteur ; nous pourrons essayer ensuite de préciser les sections distinguées par les anciens.

(P. 119, l. 7, p. 120, l. 6) : « Après avoir établi que le caractère du *mixte* est différent pour les lignes et pour les surfaces, Geminus remarque que la ligne circulaire seule, quoique simple, peut engendrer des surfaces mixtes.

---

(1) Τρεῖς γραμμὰς ἐπὶ πέντε τομαῖς εὑρὼν....

Le vers a été complété par l'éditeur au moyen du mot ἑλικώδεις, qui est au moins douteux ; on peut supposer ἐνὶ σπείρᾳ, « sur la spire ». Pour le sens de τρεῖς ἐπὶ πέντε, voir plus loin.

(2) Ἱππόπεδη, nom d'une figure de manège représentant le tracé d'un 8, et dont parle Xénophon, *De l'équitation*, chap. VII.

« Ce que je dis se présente pour la surface *spirique*, qui est conçue comme engendrée par la révolution d'un cercle normal autour d'un point qui n'est pas son centre. De la sorte, il y a trois espèces de spires, car le centre de rotation peut être sur la circonférence, il peut être intérieur ou extérieur. S'il est sur la circonférence, on a la spire *fermée;* s'il est à l'intérieur, la spire *entrelacée* (1) (ἐμπεπλεγμένη); s'il est à l'extérieur, la spire ouverte. *Il y a trois sections spiriques suivant ces trois différences.* En tout cas, la spire, quoique provenant du seul mouvement circulaire, est mixte. »

(P. 127, l. 1-3): « Lorsque l'*hippopède*, qui est une des spiriques, se coupe elle-même en formant un angle, cet angle est compris sous des lignes mixtes. » *Comp.*, p. 128, l. 1-5, suiv.

(P. 356, l. 12) : « Persée, pour les *spiriques*, a montré quel était le *symptôme* ». (Caractère correspondant à l'équation des modernes.)

Ces passages ont servi à M. Schiaparelli, dans son célèbre Mémoire : *Le sfere omocentriche di Eudosso, di Callippo e di Aristotele*, pour restituer l'*hippopède* d'Eudoxe, intersection d'une sphère par un cylindre tangent intérieurement. Le nom de cette courbe fut naturellement adopté par suite de l'analogie des formes pour l'*hippopède spirique* de Persée, qui représente évidemment la section d'un tore *ouvert* par un plan parallèle à l'axe et tangent intérieurement.

M. Schiaparelli a également reconnu, dans les deux autres spiriques décrites par Proclus, celles qu'on obtient en coupant le tore ouvert par un plan parallèle à l'axe et passant par une corde du cercle générateur, suivant d'ailleurs que ce plan est plus ou moins éloigné de l'axe que le centre dudit cercle générateur. Quant à la donnée qui fait varier les sections spiriques suivant l'espèce de la spire, ouverte, fermée ou rentrante, le savant astronome l'a rejetée comme improbable après discussion; enfin il a négligé celle que fournit le distique de Persée, τρεῖς γραμμὰς ἐπὶ πέντε τομαῖς.

L'importance de cette dernière donnée est cependant majeure,

---

(1) Ici une différence de terminologie avec les *Definitiones*.

et elle va nous permettre de compléter la restitution des courbes de Persée.

Avant tout, il faut déterminer le sens de ces mots; car littéralement, on peut entendre que Persée a trouvé trois courbes en faisant cinq sections différentes; c'est ainsi que la traduction a été faite jusqu'à présent, et c'est également le sens que paraît supposer la triple distinction de Proclus.

Mais, après avoir épuisé toutes les hypothèses possibles, je crois pouvoir affirmer que cette traduction est insoutenable et qu'il faut en chercher une autre. Or il y en a une au moins également légitime au point de vue grammatical; c'est celle que j'ai adoptée plus haut. Persée a trouvé par des sections trois lignes en outre de cinq, c'est-à-dire huit lignes en tout.

Si l'on remarque que la forme versifiée de la donnée justifie suffisamment la singularité de l'expression, que Persée a pu d'ailleurs vouloir distinguer deux groupes de courbes, si notamment trois d'entre elles ont été obtenues en faisant varier l'espèce de la spire, qu'enfin Proclus ne dit point formellement qu'il n'y a que trois spiriques, mais ne fait évidemment que commencer une énumération incomplète, notre interprétation paraîtra sans doute satisfaisante à tous les points de vue.

Soient, en effet, R le rayon du cercle générateur, A la distance de son centre à l'axe, enfin d la distance à ce même axe du plan sécant que nous lui supposerons parallèle; dans l'hypothèse où le tore est ouvert, c'est-à-dire où $A > R$, Persée devait naturellement distinguer cinq sections différentes en faisant varier d depuis $A + R$ jusqu'à o.

(1)	$A + R > d > A$,	ovale renflé au milieu, 2e spirique de Proclus;
(2)	$d = A$,	courbe formant transition entre (1) et (3);
(3)	$A > d > A - R$,	courbe fermée, rétrécie au milieu, 3e spirique de Proclus;
(4)	$d = A - R$,	hippopède ou 1re spirique de Proclus;
(5)	$A - R > d > o$,	deux courbes fermées symétriques et isolées

(1) Il est à peine utile de remarquer que la lemniscate ordinaire

$$\rho^2 = 2A^2 \cos 2\varphi$$

est un cas particulier de l'hippopède, lorsqu'on suppose $A = 2R$.

Si l'on suppose le tore fermé, $A = R$, les formes (4) et (5) disparaissent, les trois premières subsistent et il n'y en a pas de nouvelles.

Si l'on suppose enfin le tore *rentrant*, $A < R$, on peut au contraire trouver trois formes nouvelles correspondant aux courbes (1), (2), (3), avec un ovale à leur intérieur. Il suffit de supposer $d < R - A$, ce qui entraîne d'ailleurs pour les courbes (1) et (2) l'hypothèse $A < \frac{R}{2}$.

On trouve donc bien ainsi huit espèces de sections, naturellement partagées en deux groupes : l'un de cinq, l'autre de trois, et la concordance entre les diverses données de Proclus se trouve rétablie. A la vérité, celle qui indique trois sections spiriques suivant les trois différentes espèces du tore n'est point satisfaite en réalité. Mais M. Schiaparelli a très bien montré que cette donnée, prise à la lettre, est insoutenable, et l'on peut parfaitement croire que Proclus, en faisant trop rapidement son extrait, s'est trompé sur le sens exact des paroles de Geminus.

Resterait maintenant à déterminer l'époque où vivait l'inventeur des courbes spiriques.

Bretschneider [1] qui, d'ailleurs, tout en réunissant les textes, n'est pas parvenu à les expliquer convenablement, a remarqué que Montucla avait identifié à tort le géomètre dont parlait Geminus (Περσεύς) avec le philosophe (Περσαῖος) Persæos de Cittium, compatriote et disciple de Zénon le stoïcien (fin du IVe et commencement du IIIe siècle avant J.-C.). Aucune autre identification ne semble davantage possible; on se trouve donc exclusivement réduit aux données de Proclus.

L'invention des sections spiriques est nécessairement postérieure à celle des coniques; au plus haut, Persée pourrait donc être contemporain d'Euclide, tout le monde est d'accord à cet égard.

Comme limite inférieure, on doit admettre non pas l'époque où vivait Héron d'Alexandrie, comme l'ont fait Bretschneider et M. Cantor, mais bien l'époque de Geminus, puisque les *Definitiones* ne sont pas de Héron, mais postérieures non seulement à

---

[1] *Die Geometer und die Geometrie vor Euklides*, Leipzig : 1870.

Posidonius, comme nous l'avons déjà établi ailleurs, mais encore au garant de Proclus, si nos remarques précédentes suffisent à le démontrer. On a donc, pour placer Persée, un intervalle de plus deux siècles, de 300 à 75 avant J.-C. environ.

Bretschneider le rapproche autant que possible de la limite inférieure qu'il admet, en le faisant contemporain de Héron. Les courbes spiriques ont été évidemment, dit-il, si peu considérées dans l'antiquité, elles ont fourni si peu de matière à la Géométrie, qu'elles ont été vite oubliées, et que le souvenir n'en a été gardé que par les auteurs les plus voisins de leur invention.

Ces observations ne me paraissent nullement convaincantes. Si Pappus ne trouve pas l'occasion de faire allusion aux spiriques, on peut bien admettre à la vérité que leur théorie, telle que Persée l'avait constituée, n'offrait à ses yeux rien de particulièrement intéressant. Pappus ne cherche nullement à faire un recueil complet de tous les travaux antérieurs; il choisit ce qui lui plaît en dehors des ouvrages classiques de son temps, et il est certes permis de croire que les travaux de Persée ne lui ont pas semblé mériter une attention spéciale.

Mais Geminus s'était proposé un but différent, l'exposé méthodique de l'ensemble de la mathématique; c'est lui qui a dressé le bilan, malheureusement perdu en grande partie pour nous, de tout ce qu'avait produit le génie des alexandrins de l'âge hellène; à ce point de vue, il devait nécessairement parler des spiriques, que leur invention ait été, pour lui, récente ou déjà ancienne.

Je serais, pour ma part, plutôt porté à rapprocher Persée d'Euclide, à le mettre avant Apollonius plutôt qu'après. Il est bien certain aujourd'hui qu'avant la composition des *coniques* par le grand géomètre de Perge, la matière était déjà assez approfondie, avait procuré assez de gloire aux travailleurs, pour qu'un mathématicien, jaloux de s'illustrer à son tour, imaginât des sections d'un corps différent du cône et du cylindre, mais déjà connu, puisque Archytas l'avait employé dès longtemps. Que le travail de Persée dût rester infécond en réalité, nous le comprenons suffisamment aujourd'hui; mais il marchait sans doute plein d'espoir dans la voie nouvelle qu'il essayait de se frayer.

Après Apollonius, une tentative semblable aurait été, ce me semble, plus en dehors du courant scientifique. Les questions à

l'ordre du jour avaient changé de nature et l'on devait avoir un peu plus nettement conscience de la chance des recherches dans telle ou telle direction. L'espoir de trouver, dans des courbes particulières telles que les spiriques, un sujet d'études aussi fécond que les coniques, ne pouvait plus guère être conçu par un géomètre ayant vraiment approfondi sa science. C'est d'ailleurs l'époque où l'on essaya plutôt de s'élever à des conceptions un peu générales, comme celle des classes de surface (de révolution, cylindroïdes, plectoïdes). Enfin la solution désormais complète des problèmes solides (du troisième et du quatrième degré) au moyen de lieux coniques entraînait la position des problèmes de degré plus élevé, et l'invention de nouvelles courbes aurait dû être liée à la tentative de résoudre de pareils problèmes et d'en constituer une classe supérieure à celle des solides. Si Persée avait fait quelque essai de ce genre, Pappus en aurait nécessairement parlé; mais on sait pertinemment par lui que les anciens s'étaient arrêtés au problème à *quatre lignes* (¹), et qu'il a fallu attendre Descartes pour dépasser la limite où se sont arrêtés les efforts des alexandrins.

J'insisterai aussi particulièrement sur la qualification de τεταγμέναι (*lignes classées*) donnée par les *Definitiones* aux coniques et aux spiriques, par opposition aux autres lignes considérées comme ἄταχτοι (non classées). C'est exactement l'opposition des irrationnelles *non classées* d'Apollonius et de celles, dites *classées*, que Euclide avait étudiées au livre X des *Éléments*. Ou plutôt, le *classement* des coniques et des spiriques est encore plus arbitraire; si Geminus, qui montre généralement un sens critique exact, avait adopté, comme il semble, ce prétendu classement, c'est sans doute qu'il avait à ses yeux une valeur historique en tant qu'établi, comme je le présume, peu après la constitution même de la science, en tous cas avant Apollonius.

Puisque tout à l'heure je parlais de Descartes, je crois devoir signaler une singulière erreur historique où il a été entraîné par la

---

(¹) Trouver le lieu des points tels que le produit de leurs distances à deux droites données soit dans un rapport donné avec le produit de leurs distances à deux autres droites données. — En thèse générale, le problème *à* $2n$ *lignes* correspond à une équation du degré n. C'est, comme on sait, l'examen de ce problème qui constitue l'objet principal, en apparence, de la *Géométrie* de Descartes.

traduction de Pappus due à Commandin. Des lieux à plus de quatre lignes, qui ne sont plus, d'après Pappus, des lignes connues, mais qui sont simplement appelées *lignes* (γραμμαί), les anciens en auraient imaginé une dont ils auraient démontré l'utilité et qui, d'ailleurs, se présenterait très facilement, mais cependant n'aurait pas été la première. Là-dessus Descartes, après avoir montré à quoi revient en général la recherche du lieu pour un nombre quelconque de lignes, s'ingénie à rechercher quelle pouvait être cette courbe dont parle Pappus, et il en fait une très heureuse restitution.

Or, en réalité, Pappus dit tout le contraire (¹) : ὧν μίαν οὐδέ τινα συμφανεστάτην εἶναι δοκοῦσαν συντεθείκασιν ἀναδείξαντες χρησίμην οὖσαν, ce qui doit se traduire ainsi : « dont on n'a ni construit ni employé (pour la solution du problème à plus de quatre lignes) une seule, pas même celle qui pourrait sembler la plus clairement indiquée. » C'est évidemment par inadvertance qu'en restituant le texte correct M. Hultsch a conservé, dans sa traduction latine, le sens général de la version de Commandin.

(*A suivre.*)

DISCOURS PRONONCÉ PAR M. CAYLEY DEVANT LES MEMBRES DE L'ASSOCIATION BRITANNIQUE.

Traduit par M. RAFFY, Docteur ès sciences.

Les Mathématiques se rattachent, d'une part, à la vie commune et aux sciences physiques, d'autre part, à la Philosophie par les notions d'espace et de temps et les questions qui touchent à l'universalité et à la nécessité des vérités mathématiques, ainsi qu'au fondement de la connaissance que nous en avons. Remarquons en passant que le lien de l'Arithmétique et de l'Algèbre avec la notion de temps est beaucoup moins visible, si même il existe, que celui de la Géométrie avec la notion d'espace.

Je n'ai pas à faire devant vous un plaidoyer pour les Mathématiques, et, si j'avais à le faire, je voudrais que ce fût comme Socrate,

---

(¹) Éd. Hultsch, p. 678, l. 28-680, 2. Commandin, au lieu de οὐδέ τινα, avait lu οὐδε τὴν πρώτην καὶ, « pas même celle qui est la première ».

sommé dans la République de Platon de défendre la justice sans invoquer les avantages pratiques de la vertu et de l'équité, et montrant qu'absolument et en elle-même la justice est un bien; et je ne vous parlerais pas de l'utilité des Mathématiques dans les usages de la vie ou les problèmes de la Physique. Je m'en garderais d'autant plus que mes auditeurs prennent ou sont portés à prendre plus d'intérêt aux Mathématiques cultivées pour elles-mêmes. Je montrerais que les théories mathématiques doivent leur origine à ces besoins de la vie et à ces problèmes de la Physique, bien qu'aujourd'hui elles se développent dans un autre domaine de la pensée (comme la Géométrie issue de l'arpentage, la Théorie des nombres née de l'Arithmétique), de même qu'une rivière à son embouchure s'est éloignée de sa source.

Philosophiquement, l'opinion la plus répandue est que nous arrivons sans doute par l'expérience aux vérités mathématiques, mais que l'expérience ne suffit pas à nous les donner : l'esprit y contribue pour sa part. C'est au fond la théorie platonicienne de la réminiscence : en voyant deux objets, arbres, pierres ou autres, qui nous semblent plus ou moins égaux, nous arrivons à l'idée d'égalité; mais il faut bien que nous ayons l'idée d'égalité au moment où, voyant les deux objets, nous sommes conduits à les regarder comme réalisant plus ou moins complètement cette idée d'égalité. Il en est de même pour l'idée du beau, et bien d'autres.

La même idée est exprimée par ce correctif, *nisi intellectus ipse*, que Leibnitz ajouta à l'aphorisme scolastique *nihil in intellectu quod non prius in sensu,* c'est-à-dire il n'y a rien dans l'esprit qui n'ait été auparavant dans les sens, excepté, dit Leibnitz, l'esprit lui-même. C'est aussi l'avis de Kant, dans la *Critique de la raison pure :* suivant lui, toutes nos connaissances commencent par l'expérience, mais nous avons en possession des idées *a priori* indépendantes non de telle ou telle expérience, mais de toute expérience absolument, en particulier les axiomes mathématiques. Kant ajoute que l'espace n'est pas une conception acquise par l'expérience externe, mais que, pour rapporter nos sensations à quelque chose d'extérieur, il faut déjà que nous ayons l'idée d'espace, et que l'expérience externe n'est elle-même possible que grâce à cette idée. De même le temps n'est pas non plus une con-

ception empirique, mais une idée qui est la condition nécessaire de toute intuition.

De son côté, Sir W.-R. Hamilton dit, dans une première Leçon d'Astronomie (1836) : « L'Algèbre et la Géométrie, ces sciences exclusivement mathématiques, sont des sciences de pure raison : elles n'empruntent à l'expérience ni secours ni autorité ; elles sont ou du moins peuvent être entièrement isolées des phénomènes contingents du monde extérieur. Nous ne dirons pas que l'idée d'ordre et les idées dérivées de nombre et de figure soient des idées innées, si l'on entend par là que tous les hommes les possèdent avec la même clarté et la même plénitude ; malgré cela, ce sont des idées qui semblent tellement être nées avec nous que la possession que nous en avons, à quelque degré que ce soit, n'est que le développement de nos puissances originelles, l'évolution de notre intelligence humaine. »

La question générale des idées d'espace et de temps, les axiomes et définitions de la Géométrie et de l'Arithmétique, ainsi que le raisonnement mathématique, ont été soumis à une discussion complète et approfondie par Whewell, dans sa *Philosophie des sciences inductives* (1840), ouvrage qu'on peut considérer comme contenant toute l'exposition de cette théorie.

Mais John Stuart Mill a soutenu que les vérités mathématiques et spécialement les vérités géométriques reposent sur l'expérience, et le mathématicien Riemann a soutenu la même thèse à l'égard de la Géométrie, en l'appuyant sur des raisons toutes différentes.

Il est moins facile qu'on ne le croirait au premier abord de montrer combien les vues adoptées par Mill dans son *Système de logique déductive et inductive* (9e édition, 1879) sont en opposition avec celles que nous venons de rapporter. Exposons-les d'abord. Mill procède le plus souvent par affirmations catégoriques qu'il justifie ensuite, par exemple (p. 263) : « Il reste à rechercher quelles sont les raisons de notre foi aux axiomes, et quelle sorte d'évidence leur sert de fondement. Je répondrai que les axiomes sont des vérités empiriques, des résultats d'expérience généralisés. Cette proposition, *deux droites ne peuvent enclore un espace*, en d'autres termes, deux droites qui se coupent en un point ne se rejoignent nulle autre part, est une induction fondée sur l'évidence

de nos sensations. » Mais je ne puis m'empêcher de trouver qu'un argument donné par Mill quelques pages auparavant (p. 259) modifie profondément le caractère absolu de cette contradiction. En effet, Mill se demande « pourquoi la plupart des philosophes attribuent aux Mathématiques une évidence propre, indépendante de l'expérience et de l'observation, et les caractérisent comme un ensemble de vérités nécessaires »; puis il écrit ce passage, que nous citerons en entier : « Je répondrai que le caractère de nécessité et même (sauf quelques réserves à venir) la certitude particulière qu'on attribue aux vérités mathématiques ne sont qu'une illusion, et que, pour accréditer cette illusion, il est nécessaire de supposer que ces vérités ne concernent et ne font connaître que des objets purement fictifs. On sait que les conclusions de la Géométrie résultent en partie au moins des définitions, et que ces définitions sont considérées comme représentant aussi exactement que possible les objets dont s'occupe la Géométrie. Mais nous avons établi qu'une définition ne donne rien, sinon des propositions concernant ce qu'on fait signifier aux mots, et que les conclusions effectives qui semblent résulter d'une définition dérivent en réalité de l'hypothèse sous-entendue qu'il existe un objet réel conforme à cette définition. Cette hypothèse n'est pas rigoureusement vraie dans le cas des définitions géométriques : car il n'existe aucun objet réel entièrement conforme à ces définitions. Il n'existe pas de point sans dimension, pas de ligne sans épaisseur et parfaitement droite, pas de cercle ayant tous ses rayons absolument égaux, pas de carré ayant ses angles rigoureusement droits. On me dira qu'on suppose non l'existence effective, mais seulement la possibilité de tels objets. Je répondrai que, suivant tout ce que nous savons des possibilités, ces objets ne sont pas même possibles. Autant qu'on puisse affirmer quoi que ce soit, leur existence serait incompatible avec la constitution physique de notre planète tout au moins, sinon de l'univers (*sic*). Pour s'affranchir de cette difficulté, et du même coup sauver le crédit des prétendues vérités nécessaires, on a l'habitude de dire que les points, droites, cercles et carrés, qui font l'objet de la Géométrie, existent d'une manière absolue dans nos conceptions et font partie de notre esprit; et que l'esprit, employant ses propres matériaux, construit une science *a priori*, dont l'évidence est purement intellectuelle et n'a rien à

voir avec l'expérience externe. Malgré toutes les autorités dont cette théorie se recommande, je la trouve psychologiquement incorrecte. Les points, les droites et les carrés que chacun a dans l'esprit ne sont, suivant moi, que les copies des points, droites et carrés que l'expérience lui a fait connaître. Notre idée du point me paraît être tout simplement l'idée du *minimum visibile* ou de la plus petite portion de surface que nous pouvons voir. On peut raisonner sur une ligne comme si elle n'avait pas d'épaisseur, parce que nous avons la faculté, mise en jeu quand une perception occupe nos sens ou une conception notre esprit, de ne *faire attention* qu'à un seul des éléments de la perception ou de la conception au lieu de les embrasser tous. Mais nous ne pouvons pas *concevoir* une ligne sans épaisseur : nous ne pouvons former dans notre esprit l'image d'une telle ligne ; toutes celles que nous avons dans l'esprit sont douées d'épaisseur. Si quelqu'un en pouvait douter, nous le renverrions à son expérience personnelle. Je doute fort qu'il existe quelqu'un s'imaginant pouvoir se faire l'idée d'une ligne mathématique, rien que par l'évidence de son sens intime. Mais je le soupçonnerais plutôt de se figurer que, si cette perception n'était pas possible, les Mathématiques n'existeraient pas en tant que science : or c'est là une supposition dont nous montrerons sans peine le peu de fondement. »

J'estime qu'on peut accorder tout de suite que les vérités géométriques sont des vérités, précisément parce qu'elles concernent et font connaître ce que Mill appelle des *objets purement fictifs;* que ces objets n'existent pas au sens de Mill, c'est-à-dire qu'ils ne se rencontrent pas dans la nature ; qu'ils ne soient *pas même possibles,* si cela veut dire impossibles dans l'univers qui existe, cela peut encore se concéder. Mais que nous ne puissions *concevoir* de tels objets, cela dépend de ce que l'on entend par le mot *concevoir*. J'ose dire que les *objets purement fictifs* sont les seuls réels, ὄντως ὄντα ; que les objets matériels qui les rappellent ne sont auprès d'eux que les fantômes de la caverne de Platon, et que c'est grâce à eux seulement que nous sommes en mesure d'affirmer que leurs pareils n'existent pas dans la nature : si nous n'avions pas la notion de la ligne droite, nous ne pourrions point affirmer qu'il n'existe aucune ligne parfaitement droite.

Mais les objets de la Géométrie sont bien, en quelque mesure,

les objets purement fictifs de Mill; et les vérités géométriques ne sont vraies, et *a fortiori* nécessaires, qu'en tant qu'elles concernent ces objets purement fictifs; et ces objets, points, droites, cercles, entendus comme des figures mathématiques, ont des analogues, et sont représentés plus ou moins imparfaitement (mais il n'importe pour le géomètre) par les points, les droites et les cercles matériels. J'aurai à revenir sur la Géométrie et je parlerai alors de Riemann, mais je vais auparavant discuter un autre passage de Mill.

Parlant des vérités arithmétiques, Mill dit (p. 297) qu'elles contiennent toujours un élément hypothétique : « Dans toutes les propositions sur les nombres est impliquée une condition sans laquelle aucune d'elles ne serait vraie, et cette condition est une hypothèse qui pourrait être fausse : c'est la condition que $1 = 1$, ou que tous les nombres sont formés des mêmes unités égales entre elles. » Ici au moins l'hypothèse peut être absolument vraie : un shilling égale un shilling quant à la valeur vénale, même s'ils n'ont pas tous deux absolument le même poids et le même titre, mais cela est fort peu nécessaire. Une pièce plus une pièce égalent deux pièces, même si l'une est un shilling et l'autre une demi-couronne. En fait, quelques difficultés qu'on puisse élever à propos de la Géométrie, il me semble qu'il n'y en a point d'analogues en Arithmétique : chacun de nous, qu'il soit ou qu'il ne soit pas mathématicien, possède, dans sa forme la plus abstraite, l'idée de nombre. Chacun peut apprécier la justesse d'une proposition relative aux nombres; et nous sommes bien forcés de voir qu'une vérité relative aux nombres diffère par sa nature d'une vérité empirique, généralisation de l'expérience. Comparons, par exemple, cette proposition que le soleil, s'étant déjà levé tant de fois, se lèvera demain, et le jour d'après et ainsi de suite, et cette proposition que les nombres pairs et les nombres impairs se succèdent indéfiniment les uns aux autres : cette dernière semble présenter les caractères de l'universalité et de la nécessité. Autre exemple : soit une proposition qui se vérifie sur une longue suite de nombres, sur mille, deux mille nombres si l'on veut : non seulement cela ne prouve pas, mais il n'est nullement évident que la proposition subsiste pour tous les nombres. Il y a, dans la théorie des nombres, des exemples très remarquables de propo-

sitions qui se vérifient sur une longue suite de nombres et qui néanmoins sont fausses.

Je passe en revue quelques théories mathématiques.

En Arithmétique et en Algèbre ou, comme on dit, en Analyse, nous trouvons d'abord les nombres et les quantités ordinaires, c'est-à-dire positifs. Nous rencontrons aussi en Analyse et en Géométrie analytique les quantités *négatives*. Celles-ci ont fourni ample matière aux discussions philosophiques, et je pourrais renvoyer à l'opuscule de Kant, *Ueber die negativen Grössen in die Weltweisheit* (1763); mais la notion de quantité négative est devenue tout à fait usuelle, et elle est entrée dans le langage ordinaire. Je me contenterai de signaler qu'on en a fait une application fort ingénieuse à la tenue des livres en partie double.

Il en est tout autrement d'une idée essentielle dont on ne peut assez affirmer l'importance : cette idée, qui embrasse et pénètre toute l'Analyse et toute la Géométrie modernes, est l'idée de quantité imaginaire en Analyse et d'espace imaginaire (lieu de points et de figures imaginaires) en Géométrie : l'imaginaire comprend ici le réel. Cette notion n'a été, que je sache, l'objet d'aucune étude ou discussion philosophique. En ce qui concerne les métaphysiciens d'autrefois, il me suffira de dire qu'ils ne la soupçonnaient pas et n'étaient pas tenus de la soupçonner. Mais aujourd'hui qu'on voit quel rôle capital cette idée joue dans la Science, il ne faut pas venir nous dire qu'elle n'intéresse que les Mathématiques et qu'elle rentre dans la catégorie de ces chimères qui ne sont pas un objet de science; je trouve qu'une pareille ignorance n'est pas permise, et qu'on devrait au moins donner les raisons de ce parti pris.

En bonne logique, je devrais peut-être parler maintenant de l'idée qui nous occupe; mais il convient de dire d'abord un mot de certaines conceptions à côté de la Géométrie, savoir l'espace à plusieurs dimensions, l'espace non euclidien à deux et à trois dimensions et enfin la notion généralisée de distance. Ce sont ces idées qui amenèrent Riemann à tenir pour empirique notre conception de l'espace ou, pour mieux dire, à penser que l'expérience seule nous révèle l'identité de notre espace avec l'espace euclidien.

On sait que le onzième axiome d'Euclide, même sous la forme

que lui a donnée Playfair, a été considéré comme ayant besoin de démonstration, et qu'on doit à Lobatchefsky une théorie parfaitement coordonnée, où l'auteur suppose que cet axiome n'est pas vrai; c'est un système non euclidien de Géométrie du plan. Il existe un système non euclidien correspondant de Géométrie de l'espace. A mon avis, le onzième axiome d'Euclide, sous la forme que lui a donnée Playfair, n'a pas besoin de démonstration : il est impliqué dans notre conception de l'espace, de cet espace réel sur lequel porte notre expérience, dont nous prenons connaissance par l'expérience, mais dont l'idée est à la base de toute expérience externe. On peut exprimer la pensée de Riemann en disant que nous avons dans l'esprit l'idée d'un espace plus général que l'espace réel, c'est-à-dire l'idée d'un espace non euclidien; et l'expérience nous apprend que l'espace réel diffère à peine de l'espace euclidien, si même il ne lui est pas identique.

Mais supposez que l'espace réel ne soit qu'approximativement euclidien : qu'en résultera-t-il? Il en résultera, non pas que les propositions de la Géométrie sont vraies approximativement, mais qu'elles restent vraies absolument par rapport à cet espace euclidien que nous regardions comme identique à l'espace réel.

Il est intéressant de poursuivre deux ordres de considérations, qui, sans rien changer à notre idée d'espace, nous conduiront par deux voies différentes à un système de Géométrie non euclidienne à deux dimensions : par là nous jetterons, je l'espère, quelque clarté sur notre objet.

Supposons d'abord que la Terre soit une sphère parfaite. Nous appellerons *plan* la surface de la Terre, *droite* la ligne en apparence droite, mais en réalité formée par un arc de grand cercle, qu'on peut tracer sur la surface; les premières données de l'expérience seraient d'accord avec la Géométrie euclidienne : deux droites qui se coupent, prolongées seulement pendant quelques milles, sembleraient aller en divergeant; il y aurait des lignes parallèles en apparence qui n'accuseraient aucune tendance à se rapprocher l'une de l'autre; et les hommes pourraient très bien réputer établi par l'expérience cet axiome que deux droites ne peuvent enclore un espace, ainsi que l'axiome des lignes parallèles. Une expérience plus étendue et des mesures plus précises leur apprendraient que l'un de ces axiomes est faux, et que deux droites

quelconques, suffisamment prolongées dans les deux sens, ont deux points d'intersection; ils s'élèveraient ainsi à une Géométrie sphérique, qui représenterait exactement les propriétés de l'espace à deux dimensions, soumis à leur expérience. Mais la Géométrie euclidienne, qu'ils pratiquaient à l'origine, n'en serait pas moins vraie; seulement elle s'appliquerait à un espace idéal, différent de l'espace soumis à leur expérience.

Considérons en second lieu un plan ordinaire, indéfiniment prolongé dans tous les sens, et modifions seulement la notion de distance. Nous mesurerons les distances au moyen du yard ou du pied ou de toute autre unité assez petite pour que les fractions en soient négligeables (en langage mathématique, une unité infiniment petite). Imaginons alors que la règle employée varie constamment de longueur, comme elle pourrait le faire sous l'influence d'une température variable, mais de telle façon que sa longueur actuelle dépende uniquement de sa position et de sa direction dans le plan : j'entends par là que si, pour une position et une direction données, la règle a une certaine longueur, elle reprendra la même longueur chaque fois qu'elle reprendra la même position et la même direction. Le segment de droite ou l'arc de courbe compris entre deux points pourrait se mesurer de la manière habituelle au moyen de cette règle : il aurait une longueur parfaitement déterminée; la mesure, recommencée autant de fois qu'on le voudrait, donnerait toujours le même résultat; mais la distance ainsi obtenue ne serait plus du tout ce que nous appelons une distance. Autre exemple : supposons qu'un mobile parte d'un point donné, dans une direction donnée : si sa vitesse dépend uniquement de la configuration du terrain, et si la distance de deux points, estimée suivant une trajectoire donnée, se mesure par la durée du parcours, cette distance aura une valeur bien déterminée, mais ce ne sera plus ce que nous appelons une distance. A cette nouvelle conception de la distance correspondra un nouveau système géométrique, une Géométrie non euclidienne à deux dimensions : tous les théorèmes impliquant la notion de distance devront être modifiés.

Nous pouvons aller plus loin : à mesure que la règle s'éloigne de l'origine fixe choisie dans le plan, supposons qu'elle devienne de plus en plus courte; si le raccourcissement s'opère suffisamment

vite, il peut arriver qu'une distance, finie au sens ordinaire du mot, devienne infinie. On aura beau ajouter à elle-même la règle toujours plus courte, on ne viendra jamais à bout de la distance en question. Autour de l'origine s'étendra une zone finie dont le contour sera (dans la nouvelle acception du mot *distance*) à une distance infinie de l'origine : nous ne pourrons jamais atteindre avec notre règle les points situés en dehors de cette zone; leur ensemble constitue une *terra incognita* ou mieux une terre impossible à connaître, au point de vue mathématique un espace imaginaire ou impossible; et l'analogue de l'espace plan sera celui de la zone considérée : il sera fini au lieu d'être infini.

En particularisant la loi de raccourcissement, nous retrouvons la Géométrie non euclidienne de Lobatchefsky. Mais ce mode de génération du système ne met pas en évidence ses rapports avec la Géométrie sphérique : la Géométrie sphérique, celle d'Euclide et celle de Lobatchefsky doivent être considérées comme les trois Chapitres d'une même doctrine, savoir la théorie d'un espace de courbure constante, positive, nulle ou négative; en d'autres termes, ce sont les géométries planes correspondant à trois conceptions différentes de la distance; d'où les trois géométries elliptique, parabolique et hyperbolique de Klein.

Passons maintenant à la Géométrie de l'espace; nous pouvons, par une modification de l'idée de distance, analogue à celle qui nous a conduits au système de Lobatchefsky, passer de notre système actuel à un système non euclidien. L'autre mode de génération d'un système non euclidien nous obligerait à considérer notre espace comme un espace plan à trois dimensions, situé dans un espace à quatre dimensions, et qui serait à ce dernier ce que le plan est à l'espace ordinaire : il faudrait alors substituer à cet espace plan un espace courbe à trois dimensions, de courbure constante positive ou négative. En regardant l'espace réel sur lequel porte notre expérience comme pouvant être non euclidien, Riemann semble avoir eu en vue plutôt de modifier l'idée de distance que de traiter cet espace comme un lieu situé dans l'espace à quatre dimensions.

Je viens de prononcer le mot d'*espace à quatre dimensions*. Quelle signification donner à ce mot? Peut-il même en avoir une? On peut admettre d'emblée qu'il nous est impossible de concevoir

une quatrième dimension de l'espace ; l'espace que nous concevons et l'espace réel sur lequel porte notre expérience n'ont l'un et l'autre que trois dimensions. Mais nous pouvons, ce me semble, concevoir un espace qui n'ait que deux dimensions ou même n'en ait qu'une. Imaginons des êtres raisonnables, vivant dans un espace à une dimension (une ligne) ou dans un espace à deux dimensions (une surface), et ayant de l'espace une idée appropriée à leur mode d'existence : pour eux l'espace à deux ou à trois dimensions serait aussi inconcevable que l'est pour nous un espace à quatre dimensions. Et ici se présente une question bien curieuse au point de vue théorique. Admettons que l'espace à une dimension soit une ligne droite, qui se transforme ensuite en ligne courbe : y aurait-il pour les habitants de cet espace un indice quelconque du changement survenu? ou, si la ligne était primitivement courbe, existerait-il quelque phénomène propre à leur suggérer l'idée de cette courbure? Il est probable que non, car c'est à peine s'il existe une géométrie à une dimension. Mais supposons qu'il s'agisse d'un espace à deux dimensions, que cet espace soit primitivement un plan, et que ce plan soit ensuite transformé en une surface courbe, ou bien que l'espace en question soit primitivement une surface courbe. Dans le premier cas, le changement opéré serait perceptible aux habitants, parce que la géométrie applicable à leur espace primitif (notre Géométrie euclidienne) cesserait de s'appliquer ; mais ce changement ne serait pas conçu par eux comme une déformation du plan, car cette conception impliquerait l'idée d'un espace à trois dimensions. Dans le second cas, leur géométrie dériverait des propriétés de la surface courbe qui constituerait leur espace ; ce serait leur Géométrie euclidienne. Mais arriveraient-ils jamais à notre système plus simple? Revenons au cas où l'espace à deux dimensions est un plan, et imaginons que les êtres qui vivent dans cet espace soient familiers avec notre Géométrie euclidienne du plan : quand même ils ne pourraient concevoir une troisième dimension, rien ne les empêcherait, s'ils étaient conduits à cette notion nouvelle par leur géométrie ou par une autre voie quelconque, de créer une science analogue à notre géométrie de l'espace.

Il est clair que toutes ces questions se posent à nous, à propos de l'espace à trois dimensions tel que nous le concevons et tel que

l'expérience nous le fait connaître. Et j'ai à peine besoin de dire que toute la difficulté réside dans le premier pas à franchir, et que, si l'on admet quatre dimensions, on peut en supposer autant qu'on voudra. Mais, quelle que soit la réponse à ces questions, une branche spéciale des Mathématiques existe, qui est virtuellement, sinon réalisée en fait, une Géométrie analytique à n dimensions. J'aurai à revenir là-dessus.

Arrivons maintenant à la notion fondamentale dont nous avons déjà parlé, celle de quantité imaginaire en Algèbre et d'espace imaginaire en Géométrie. Je la rattacherai à deux grandes découvertes mathématiques, faites dans la première moitié du XVIIe siècle : d'une part, la représentation, due à Harriot (1560-1621), d'une équation de la forme $f(x) = 0$, et conséquemment la notion des racines d'une équation algébrique déduite de la décomposition de $f(x)$ en facteurs linéaires (l'*Algèbre* d'Harriot, publiée après sa mort, date de 1631); d'autre part, la méthode des coordonnées, due à Descartes et exposée dans sa *Géométrie* sous forme de supplément au *Discours de la Méthode* (Leyde, 1637).

Il résulte immédiatement de la forme donnée par Harriot à toute équation algébrique qu'une équation d'ordre n à coefficients réels doit avoir n racines. Mais ces n racines ne sont pas nécessairement réelles. En particulier, une équation du second degré peut n'avoir aucune racine réelle; mais, si l'on convient que l'équation $x^2 + 1 = 0$ admet la racine i, elle admet aussi la racine $-i$, et l'on reconnaît aisément que toute équation du second degré à coefficients réels admet deux racines de la forme $a \pm bi$, a et b étant des quantités réelles. Nous sommes ainsi conduits à la conception d'une quantité imaginaire de la forme $a + bi$, a et b étant des quantités réelles, qui peuvent prendre toutes les valeurs, positives et négatives, sans exclure zéro. Dans le cas général où les coefficients sont eux-mêmes imaginaires, on a ce théorème : *Une équation d'ordre n a toujours n racines;* ce sont alors des imaginaires, et l'on voit que la forme $a + bi$ est la seule sous laquelle se présentent les quantités imaginaires. Si l'on ajoute, si l'on multiplie ou si l'on combine d'une manière quelconque des quantités imaginaires de cette forme, on obtient comme résultat une imaginaire de la même forme. Ce sont là les quantités que l'on considère en Analyse, et

l'Analyse est précisément la science de ces quantités. Remarquons que le caractère principal d'une imaginaire $a + bi$ réside dans la réalité des deux coefficients a et b (le symbole se réduit, quand b est nul, à sa partie réelle a, et, quand a est nul, à sa partie purement imaginaire bi). L'idée maîtresse de l'Analyse est de substituer aux quantités réelles ces quantités imaginaires ou complexes de la forme $a + bi$.

Dans la géométrie cartésienne, une ligne est représentée par une équation entre les coordonnées (x, y) d'un quelconque de ses points. Pour la ligne droite, cette équation est du premier degré; le cercle et plus généralement les coniques ont des équations du second degré; en général, lorsque l'équation est d'ordre n, la courbe qu'elle représente est dite d'ordre n. Étant données deux courbes, les équations qui leur correspondent sont vérifiées par les coordonnées (x, y) de leurs points d'intersection; on en déduit une équation d'un certain ordre par rapport à l'une ou l'autre des coordonnées d'un point d'intersection. Dans le cas d'une droite ou d'un cercle, cette équation est du second ordre; elle a deux racines réelles ou imaginaires, à chacune desquelles correspond une seule valeur de l'autre coordonnée : il y a par suite deux points d'intersection, c'est-à-dire qu'une droite et un cercle se coupent *toujours* en deux points, réels ou imaginaires. C'est ainsi que nous sommes conduits par l'Analyse à la notion géométrique de points imaginaires. Notre conclusion, relative à l'existence de deux points d'intersection, ne peut être contredite par l'expérience; vous n'avez qu'à prendre une feuille de papier, à y tracer une droite et un cercle, et à faire l'essai. Mais vous pourriez objecter ou du moins être fortement tentés d'objecter que cette conclusion n'a pas de sens. Alors se pose cette question : qu'est-ce qu'un point imaginaire? et cette autre question : comment peut-on arriver à cette notion par la Géométrie?

Il existe en Perspective une construction bien connue, pour faire passer une droite par l'intersection de deux autres qui ne se coupent pas dans les limites de l'épure. On peut vérifier que la troisième droite passe par le point d'intersection des deux premières; on n'a qu'à les prolonger toutes trois suffisamment; si, au lieu de deux droites, on donne deux arcs de cercle qui ne se coupent pas, on sait construire la corde commune aux deux cercles dont ces arcs

font partie, si ces deux cercles se coupent; dans ce cas, en achevant les cercles, on vérifiera que la droite tracée passe par leurs points d'intersection : si les cercles ne se coupent pas, on verra qu'elle ne les coupe ni l'un ni l'autre. Mais la construction géométrique étant la même dans les deux cas, nous dirons que dans le second la droite passe encore par les deux points d'intersection des cercles considérés.

On peut donc répondre à l'objection que cette conclusion est parfaitement naturelle, pourvu qu'on admette l'existence de points imaginaires, tandis que, si l'on ne veut pas l'admettre, il est absurde de dire, quand les cercles ne se coupent pas, que la droite passe par leurs points d'intersection. La difficulté n'est pas levée par la méthode analytique, qui ne fait que la déplacer en provoquant cette question : existe-t-il dans un plan un point dont les coordonnées ont des valeurs imaginaires? Quoi qu'il en soit, on considère en géométrie analytique des points imaginaires qui s'introduisent dans la théorie par voie analytique ou par voie géométrique, ainsi que nous l'avons expliqué.

Les mêmes considérations s'étendent à la géométrie de l'espace, et nous amènent à la conception d'un espace imaginaire, lieu de points et de figures imaginaires.

J'ai employé le mot *imaginaire* de préférence au mot *complexe*, et je répète que, dans tout ce qui précède, l'imaginaire comprend le réel comme cas particulier. Mais, cela étant dit une fois pour toutes, l'emploi du mot *imaginaire* devient inutile dans un grand nombre de cas; il pourrait parfois même donner lieu à des malentendus. Quand on dit par exemple qu'un problème a n solutions, on entend parler de solutions imaginaires dans l'acception générale du mot; mais, si l'on disait que le problème a n solutions imaginaires, le mot *imaginaire* prendrait un sens opposé au mot *réel*. Je donne cette explication, parce qu'elle me paraît montrer mieux que toute autre quelle place tient dans la Science la notion d'imaginaire : elle est impliquée et présupposée (sauf quand on spécifie précisément le contraire) dans toutes les conclusions de l'Analyse et de la Géométrie modernes. C'est, comme je l'ai dit, la notion essentielle qui embrasse et pénètre toutes les parties de l'édifice mathématique.

Je parlerai plus loin de l'extension considérable que cette notion

a fait prendre à la Géométrie; mais je veux pour le moment m'occuper de ses rapports avec la théorie des fonctions. Dans le principe, une fonction algébrique ou transcendante ($\sqrt{x}$, $\sin x$, $\log x$) était regardée comme entièrement connue lorsqu'on en connaissait la valeur pour toutes les valeurs réelles, positives ou négatives de la variable. Et, lorsque certaines de ces valeurs rendaient la fonction imaginaire, on se bornait à dire qu'à ces valeurs de la variable ne correspondait aucune valeur réelle de la fonction. Mais à présent on ne s'en tient plus là : une fonction n'est réputée connue que si l'on connaît sa valeur (généralement imaginaire et de la forme $X + iY$) pour toute valeur imaginaire $x + iy$ de la variable.

Cette conception nouvelle conduit naturellement au problème de la représentation géométrique d'une variable imaginaire. On représente la variable imaginaire par un point du plan dont les coordonnées sont x et y. Cette idée, due à Gauss, date de l'année 1831 environ. Nous figurons ainsi la succession des valeurs de la variable imaginaire $x + iy$ par le mouvement du point représentatif qui décrira par exemple une courbe fermée. De même la valeur $X + iY$ de la fonction peut être représentée par un point (pris pour plus de clarté dans un autre plan) dont les coordonnées sont X et Y.

Nous pouvons envisager deux points se mouvant chacun dans son plan, de façon que les positions successives de l'un déterminent celles de l'autre : ces deux points seront, par exemple, la pointe et le crayon d'un pantographe. On peut faire décrire au premier point telle figure qu'on voudra, on obtiendra une figure correspondante décrite par le second : si le pantographe est bon, la copie sera semblable au modèle; avec un mauvais pantographe on aura une copie déformée; mais la seconde figure sera toujours une copie plus ou moins réussie de la première, telle qu'à tout point de l'une corresponde un point de l'autre.

Il existe une relation remarquable entre les deux figures qui représentent la marche de la variable imaginaire et celle de la fonction. C'est la relation propre à la projection orthomorphique, celle qui existe entre une portion de la surface de la terre et la représentation de cette surface sur une carte faite à l'aide de la projection stéréographique ou de la projection de Mercator : une aire infiniment petite, prise dans une figure, est représentée dans l'autre figure par une aire infiniment petite semblable à la première. Il

pourra se présenter de grandes variations d'échelle entre les diverses parties de la figure, mais la similitude subsistera : si une aire a pour contour une circonférence, l'autre aire aura aussi pour contour une circonférence; si une aire est terminée par un triangle équilatéral, il en sera de même de l'autre.

J'ai supposé, pour simplifier, qu'à tout point d'une des figures correspondait dans l'autre figure un point et un seul. Mais, dans le cas général, à chaque point d'une des figures correspondent dans l'autre un certain nombre de points. De là de nouvelles relations très compliquées dont je dois dire un mot. Supposons qu'à chaque point de la première figure correspondent dans la seconde deux points, l'un marqué en rouge, si l'on veut, l'autre en bleu. La seconde figure se compose de deux images de la première, une image rouge et une image bleue, tracées toutes les deux sur la même feuille. La difficulté provient de ce que les deux images ne sont pas indépendantes l'une de l'autre. Considérons, par exemple, dans la première figure une courbe fermée quelconque — disons un ovale pour abréger — : cet ovale sera représenté dans la seconde figure tantôt par un ovale rouge et un ovale bleu, tantôt par un ovale ayant une moitié rouge et une moitié bleue. Autrement dit, si l'on considère un point qui se meuve d'une manière continue, mais quelconque dans la première figure pour revenir à son point de départ, et qu'on suive le mouvement des points correspondants de la seconde figure, il pourra très bien arriver qu'un point d'une certaine couleur change brusquement de position et fasse un saut d'un endroit à un autre; en sorte que, si l'on veut obtenir dans la seconde figure une trajectoire continue, on devra, par intervalles, quitter le point rouge pour suivre le bleu ou le bleu pour le rouge. C'est qu'alors la première figure présente certains points critiques, appelés *points de ramification* (*Verzweigungspunkte*) et qu'on y trace des lignes reliant ces points critiques : la nature de ces points et la forme de ces lignes déterminent la distribution et la succession des contours dans la seconde figure. Mais je ne puis m'engager plus avant dans cette théorie. Je n'ai parlé de couleur que pour simplifier le langage. J'ajoute qu'en ce qui concerne les deux figures j'ai suivi MM. Briot et Bouquet plutôt que Riemann, qui a indiqué pour les fonctions d'une variable imaginaire un autre mode de représentation.

Nous avons parlé d'une variable $x + iy$ et d'une fonction de cette variable $\varphi(x + iy) = X + iY$. Mais on peut aussi bien présenter cette théorie en faisant usage d'une courbe plane. En effet, $x + iy$ et $X + iY$ sont deux variables imaginaires liées par une équation : soient u et v leurs valeurs, $F(u, v) = 0$ l'équation qui les lie. Si l'on regarde u et v comme les coordonnées d'un point du plan, ce point appartiendra à la courbe représentée par l'équation précédente. Cette courbe, en prenant le mot dans son sens le plus étendu, est formée par la série entière des points réels ou imaginaires dont les coordonnées satisfont à l'équation $F(u, v) = 0$, et ces points sont fournis par les deux figures correspondantes, que nous considérions précédemment dans leurs deux plans. Mais, au sens habituel, une courbe est la suite des points réels dont les coordonnées u et v vérifient une équation.

En Géométrie, c'est la courbe qui nous occupe et que nous étudions, qu'elle soit définie par son équation ou qu'elle soit donnée de quelque autre manière. Mais on peut aussi se servir d'une courbe pour représenter son équation, c'est à-dire pour représenter la relation qui existe entre deux variables x et y prises pour les coordonnées d'un point de la courbe. Tout le monde sait qu'on emploie ainsi des courbes dans une foule de cas, pour les fluctuations du baromètre, pour les courses nautiques de Cambridge, pour les fonds publics. Pareillement, il est avantageux dans l'Analyse, pour représenter les relations entre trois variables quelconques x, y, z, de les considérer comme les coordonnées d'un point de l'espace. Par la même raison, il est au moins désirable de considérer quatre et en général n variables comme les coordonnées d'un point dans un espace à n dimensions. En partant de l'hypothèse d'un tel espace et de points déterminés dans cet espace par leurs coordonnées, on a pu établir un système de géométrie à n dimensions, analogue à tous les points de vue à notre géométrie à deux et à trois dimensions. C'est là une généralisation considérable, propre à représenter les relations entre plusieurs variables. Voici ce que je disais dans mon Mémoire *Sur la géométrie abstraite* (1869) : « Cette science se présente sous deux aspects : comme une extension légitime de la géométrie ordinaire à deux et à trois dimensions, et comme une nécessité manifeste de notre Géométrie

et de l'Analyse générale. En effet, quand on a affaire à des quantités liées entre elles par des relations quelconques et pouvant d'ailleurs varier ou être déterminées, on rend souvent plus sensible la nature de leur liaison en regardant ces quantités, s'il n'y en a pas plus de trois, comme les coordonnées d'un point du plan ou de l'espace; s'il y a plus de trois variables, la complication augmente et rend par là-même plus grande la nécessité d'une représentation analogue. Mais on n'obtient cette représentation qu'en introduisant la notion d'un espace du nombre de dimensions voulu, et en instituant une géométrie correspondante La Géométrie plane a déjà fourni un exemple de cette nécessité, à propos du nombre des courbes d'espèce donnée qui satisfont à certaines conditions; pour mieux saisir ces relations, il a été avantageux de considérer les paramètres dont ces courbes dépendent comme les coordonnées d'un point situé dans un espace à plusieurs dimensions. »

Il faut avoir présent à l'esprit que l'espace, quel que soit le nombre de ses dimensions, doit toujours être considéré comme un espace imaginaire ou complexe, tel que l'espace à deux ou à trois dimensions de la Géométrie ordinaire : autrement, les avantages de cette représentation seraient complètement perdus.

J'ai parlé à plusieurs reprises des coordonnées cartésiennes : on leur substitue fréquemment en Géométrie plane les coordonnées trilinéaires qui peuvent être considérées comme absolument indéterminées quant à leur valeur même : ainsi, en les appelant x, y, z, ces variables ne sont pas égales, mais proportionnelles aux distances d'un point à trois droites fixes, et le point sera déterminé par les rapports de ses coordonnées (x, y, z). C'est ainsi que, dans la géométrie à une seule dimension, on peut déterminer un point par le rapport de ses deux coordonnées x et y, ces coordonnées étant proportionnelles aux distances du point considéré à deux points fixes. En général, dans la géométrie à n dimensions, un point sera déterminé par les rapports de $n+1$ coordonnées $(x, y, z, \ldots)$. Cela revient, au point de vue analytique, à remplacer les variables primitives par des fractions de même dénominateur; par suite, à la place de fonctions rationnelles et entières, mais non homogènes, des n variables primitives, s'introduisent des fonctions rationnelles et entières et de plus homogènes de $n+1$ variables. C'est ce qu'on appelle des *formes* (*quantics*). Ainsi les formes

binaires correspondent à la géométrie à une dimension, les formes ternaires à la géométrie à deux dimensions, et ainsi de suite.

Je vais faire une digression, mais je tiens à vous parler de la représentation sur un plan des points et des figures de l'espace. En Perspective, on représente un point de l'espace par la trace sur le plan du tableau (supposé transparent) de la droite qui joint ce point à l'œil. En répétant cette construction pour chaque point d'un objet, on représente cet objet par une sorte de dessin. Mais une telle représentation est imparfaite, car elle ne détermine pas l'objet. On ne peut pas sur un seul dessin apprécier la forme d'un objet : en effet, le point qui correspond dans l'objet à un point du tableau n'est pas déterminé; il est n'importe où sur la droite qui joint l'œil au point du tableau. Pour déterminer les objets, il faut deux perspectives, par exemple un plan et une élévation, dont l'ensemble forme une épure dans le système de Géométrie descriptive de Monge. Mais il est théoriquement plus simple d'employer deux perspectives faites sur le même plan, en plaçant l'œil en deux points de vue différents. Alors un point de l'espace est représenté sur le plan de projection par l'ensemble de deux points : ces points sont tels que la droite qui les joint passe par un point fixe du plan (la trace sur le plan de projection de la droite qui joint les deux points de vue). Dans ce système, une figure de l'espace est représentée dans le plan par deux figures, telles que leurs points correspondants sont tous en ligne droite avec le point fixe. Réciproquement, deux figures de cette espèce remplacent complètement la figure de l'espace : elles permettent d'effectuer dans le plan toutes les constructions à faire dans les figures de l'espace, et servent à démontrer les propriétés de ces figures. Ces principes ont reçu récemment une extension curieuse. Le géomètre italien Véronèse a considéré deux figures de l'espace, telles que leurs points correspondants soient en ligne droite avec un point fixe, comme représentant une figure dans l'espace à quatre dimensions, et en a fait usage pour démontrer les propriétés de ces nouvelles figures.

(*A suivre.*)

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

H. RESAL, Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique et à l'École supérieure des Mines. — PHYSIQUE MATHÉMATIQUE : ÉLECTRODYNAMIQUE. CAPILLARITÉ, CHALEUR, ÉLECTRICITÉ, MAGNÉTISME, ÉLASTICITÉ.

Faire une exposition analytique simple de la plus grande partie de nos connaissances actuelles en Physique mathématique, tel est le but que s'est proposé l'auteur en publiant cet Ouvrage.

Il ne s'est occupé ni de la Thermodynamique qui est entrée dans le domaine de l'enseignement, ni de la théorie de la lumière qui, par l'extension qu'elle a prise, a formé un chapitre à part de la Physique mathématique.

Il n'a pas cru devoir non plus s'occuper de l'électricité considérée comme source de production de travail moteur, question à l'ordre du jour, mais sur laquelle on n'a pas encore de documents suffisamment précis.

L'auteur débute par une théorie de l'Électrodynamique à laquelle il était arrivé en 1849, lorsqu'il était encore sur les bancs de l'École Polytechnique, simplification importante des travaux d'Ampère admise en partie en 1850 par Bravais dans ses Leçons de Physique à l'École précitée. Nous croyons savoir que la théorie de M. Resal a été introduite dans l'enseignement de l'École d'application des lignes télégraphiques.

L'auteur s'occupe ensuite de la théorie de la capillarité et donne, en débutant, des démonstrations simples et précises des formules fondamentales de cette théorie. Il étudie ensuite tous les cas prévus par les physiciens; mais, par un choix convenable de variables, il arrive à donner à ses intégrales une forme relativement simple. En faisant l'application d'une méthode qui lui est propre, il donne les solutions approchées de diverses questions qui se rapportent aux cas où la forme de la surface capillaire diffère peu d'un cylindre circulaire (lames verticales parallèles très rapprochées), d'une sphère (tubes d'un très petit diamètre, goutte très petite ne mouillant pas le plan horizontal qui la supporte), d'un tore (expériences de Pla-

teau). Il termine par une Note sur le mouvement et la déformation d'une bulle liquide qui s'élève dans une masse liquide d'une densité plus grande, problème dont Maupertuis s'était occupé, mais en supposant que la bulle reste sphérique, ce qui est inexact.

Dans son troisième article, l'Auteur reprend la théorie analytique de la chaleur de Fourier, dont il simplifie les solutions. On remarquera notamment dans cet article une démonstration directe de l'expression du flux de chaleur, un théorème nouveau sur les propriétés du flux de chaleur, relatif à un élément plan que l'on fait tourner autour d'un même point.

L'article ci-dessus est suivi de *développements sur quelques questions qui se rattachent à la théorie de la chaleur,* séries de questions se rapportant à la haute analyse, et dont la discussion serait trop longue pour trouver place ici. Nous nous bornerons, en ce qui concerne ce sujet, à renvoyer le lecteur à l'extrait de la Table des matières reproduite ci-après, en attirant notamment son attention sur le problème relatif à la chaleur centrale du globe.

Dans sa *théorie de l'Électrostatique,* l'auteur donne plusieurs nouvelles démonstrations de théorèmes connus et, de plus, l'expression du niveau potentiel de l'ellipsoïde.

Nous attirerons principalement l'attention du lecteur, en ce qui concerne la *Théorie des courants électriques,* sur une démonstration complète et relativement simple de la formule de Weber.

Le *magnétisme statique,* à quelques additions près, n'est autre chose qu'une simplification de la théorie de Poisson.

Nous nous bornerons à mentionner le Chapitre relatif aux *mouvements des aimants et des courants déterminés par leurs actions mutuelles.*

Dans sa *théorie de l'Élasticité,* l'auteur ne considère que le cas de l'isotropie. Les questions les plus intéressantes qui ont été traitées sont les suivantes :

La communication du mouvement vibratoire dans un milieu indéfini en tous sens.

La torsion d'un cylindre elliptique et d'un prisme rectangle.

La flexion des prismes.

Les vibrations longitudinales et transversales des prismes et cylindres.

L'équilibre d'élasticité d'une membrane courbe ou plane, les vibrations d'une membrane plane rectangulaire et carrée.

Le problème d'une virole serrée à chaud sur une autre virole ou sur un cylindre.

Enfin *les vibrations radiales d'une enveloppe sphérique.*

On voit, par cet exposé sommaire, que l'Auteur a traité la presque totalité des questions de Physique mathématique soulevées jusqu'à nos jours, en y joignant un certain nombre d'autres qui ont essentiellement un caractère de nouveauté, et qui assurent à son Ouvrage le plus haut degré d'intérêt.

EXTRAIT DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Électrodynamique.

Exposé simple des formules d'Ampère.

Capillarité.

§ I. Formules fondamentales. — § II. Phénomènes capillaires relatifs aux liquides pesants. — § III. Des liquides uniquement soumis à leurs actions mutuelles. — *Note* sur le mouvement et la déformation d'une bulle liquide qui s'élève dans une masse liquide d'une densité plus grande.

Chaleur.

§ I. Généralités. (Expression du flux de chaleur. — *Propriété du flux de chaleur en un même point.* Équations de l'équilibre et du mouvement de la chaleur en coordonnées rectilignes, cylindriques et sphériques. — Conditions relatives à la surface.) — § II. Mouvement de la chaleur dans un solide dont les dimensions transversales sont très petites et dans un solide indéfini dans lequel la direction du mouvement de la chaleur est constante. — § III. Mouvement de la chaleur dans une sphère. — § IV. Mouvement varié de la chaleur dans un cylindre circulaire indéfini. — § V. Mouvement de la chaleur dans un prisme carré indéfini dans un sens. — § VI. Mouvement varié de la chaleur dans un cube. — § VII. Mouvement varié de la chaleur dans un solide indéfini en tous sens.

Développements sur quelques questions qui se rattachent à la Théorie analytique de la chaleur.

§ I. Intégration de l'équation de Bessel. (Expressions de l'intégrale au moyen des séries et d'intégrales définies). — § II. Expression d'une fonction, entre des limites données de la variable, en série trigonométrique. —

Applications diverses. — § III. Expression d'une fonction arbitraire au moyen d'intégrales définies. Formule de Fourier. — Applications diverses. — § IV. Propriétés des fonctions sphériques. Formules de Green. — § V. Du mouvement varié de la chaleur dans une sphère dans le cas le plus général. Application à la chaleur centrale du globe.

Électrostatique.

§ I. Généralités. (Hypothèses. Propriétés du potentiel et de la fonction potentielle.) — § II. Équilibre électrique d'un conducteur. (Questions diverses. Distribution de l'électricité sur un ellipsoïde. Expression du niveau potentiel.)— § III. Des systèmes de conducteurs. (Questions diverses. Théorèmes de Clausius et de Riemann.) — § IV. Du travail des forces électriques. Décharges.

Théorie des courants électriques.

§ I. Courants constants (lois de Ohm et de Joule). — § II. Courants thermo-électriques. — § III. Théorie de la pile. — § IV. De l'induction électrique. (Différentes formes sous lesquelles on peut mettre la formule d'Ampère.) Formules de Weber. Potentiel de l'action mutuelle de deux éléments de courant. Potentiel relatif à deux courants fermés d'intensités constantes agissant l'une sur l'autre. Force électromotrice d'un courant induit produit dans un circuit par un courant extérieur.

Du magnétisme statique.

§ I. Préliminaires. — § II. Équations générales. — § III. Applications aux corps sphériques. — § IV. Application des formules générales à l'ellipsoïde. — § V. Action simultanée de plusieurs sphères aimantées par l'influence de la terre sur un point extérieur.

Mouvement des aimants et des courants déterminés par leurs actions mutuelles.

Loi de Biot et de Savart. Principe de Laplace. Applications.

De l'élasticité.

§ I. Généralités. — § II. De l'équilibre intérieur d'un corps, quelle que soit sa nature. — § III. Équations générales de l'équilibre intérieur d'un corps élastique isotrope. — § IV. De la traction et de la compression d'un prisme ou cylindre. — § V. De la torsion des prismes. (Équations générales. Cylindre elliptique. Prisme triangulaire.) — § VI. De la flexion des prismes. — § VII. Des vibrations des prismes et cylindres. — § VIII. Des membranes élastiques (équilibre, vibrations). — § IX. Des cylindres circulaires. Équilibre. Vibrations tournantes. — § X. Des sphères. (Enveloppes. Équilibre d'une croûte planétaire. Vibrations radiales d'une enveloppe.) — *Note.* Sur l'équilibre intérieur d'un demi-fluide.

J. PETERSEN. — Lehrbuch der Statik fester Körper. Deutsche Ausgabe. 1 vol. in-8°, 165 p. Kopenhagen; 1882.

Le petit *Traité de Statique* de M. Petersen, qui ne pouvait être connu que d'un public restreint, va sans doute se répandre dans les écoles allemandes, grâce à l'édition nouvelle qu'en donne M. von Fischer-Benzon. Il ne se recommande pas seulement par sa clarté, sa concision et sa précision; on reconnaît facilement, à la façon dont il a su introduire les résultats de quelques-unes de ses recherches personnelles, que l'auteur est un géomètre plein d'originalité, qui ne se préoccupe pas seulement de la perfection de l'enseignement. Nous citerons, en particulier, le Chapitre VI, où l'auteur a su condenser dans un petit nombre de pages la théorie de l'équilibre astatique; le Chapitre XIII, où il a développé entièrement la théorie du *diagramme*, c'est-à-dire d'une figure relative à un système de barres rigides articulées en équilibre, composée avec les polygones de forces fermés que l'on peut construire, pour chaque point d'articulation, tant au moyen des forces extérieures que des tensions, et cela de telle façon que chaque force extérieure et chaque tension n'entre qu'une seule fois dans la figure. L'ordre adopté, sauf l'introduction des deux Chapitres signalés et d'un autre (Chap. XII) relatif à la Statique graphique, diffère peu de celui qui est généralement suivi dans l'enseignement français. De nombreux exercices, bien choisis, sont placés à la fin de chaque Chapitre. Nous croyons témoigner de notre estime pour l'auteur et pour son Livre en signalant deux de ces exercices dont la rédaction laisse quelque chose à désirer. Au n° 125, on demande de calculer l'attraction d'un plan indéfini homogène; si l'on calcule l'attraction d'une aire plane contenue à l'intérieur d'un contour C sur un point, et si l'on suppose que ce contour s'élargisse indéfiniment dans tous les sens, on trouve aisément que la composante de l'attraction normale au plan tend vers une limite, mais qu'il n'en est point de même pour les composantes parallèles au plan; au n° 127, on demande de calculer l'attraction d'un cylindre homogène indéfini directement et au moyen du potentiel. L'attraction est, en effet, déterminée, et il existe une fonction de forces; mais le potentiel newtonien n'a

plus de sens. Les exercices, par leur nature même, s'adressent à des lecteurs inexpérimentés, et il aurait été préférable de les prévenir de difficultés qui sont réelles et où ils peuvent s'égarer.

J. T.

MÉLANGES.

DISCOURS PRONONCÉ PAR M. CAYLEY DEVANT LES MEMBRES DE L'ASSOCIATION BRITANNIQUE;

Traduit par M. RAFFY, Docteur ès sciences [1].

J'ai signalé en commençant le lien qui rattache les Mathématiques aux notions d'espace et de temps, mais je n'ai encore presque rien dit du temps. On admet, je crois, généralement que la notion de nombre dérive de celle de temps. Ainsi Whewell, dans l'Ouvrage déjà cité, dit (p. 20) que le nombre est une modification de l'idée de répétition, qui elle-même se rattache à l'idée de temps. Je ne puis me rallier à cet avis : il me semble que nous avons (indépendamment, dirai-je, des idées de temps et d'espace et dans des circonstances où le temps n'intervient pas plus que l'espace) la notion de pluralité. Représentons-nous des lettres $a, b, c, \ldots$. Si elles forment une suite limitée, par exemple la suite a, b, c, d, e, nous arrivons à l'idée de nombre. Faisons correspondre ces lettres une à une avec les objets d'une autre suite ou, si l'on veut, avec les mots *premier, second,* etc.; nous trouvons que la dernière lettre répond au mot *cinquième* et nous disons que le nombre des lettres est égal à cinq. Ainsi la notion de nombre cardinal semble dériver de celle de nombre ordinal.

Les questions de combinaisons et d'arrangements se présentent d'elles-mêmes, et il serait possible, avec la seule notion de pluralité, de développer une science mathématique; mais cette science n'aurait, comme on le voit, qu'une extension très limitée, et il est difficile de n'y pas introduire la notion de nombre ; en effet, en présence d'une suite limitée d'objets, on ne peut éviter cette question : combien y en a-t-il? En se restreignant ainsi, on a encore

---

[1] Suite, *voir* p. 30.

un sujet d'une certaine étendue, qui comprend la partition des nombres et que Sylvester appelle *tactique*.

De la notion ainsi acquise de nombre entier on arrive à celle de nombre fractionnaire, et l'on reconnaît qu'elle permet d'exprimer le rapport de deux grandeurs de même espèce, sinon avec une exactitude absolue, du moins avec une exactitude aussi grande que l'on veut. Soit, par exemple, à mesurer une longueur : elle contient tant de pieds, de dixièmes de pied, de centièmes, de millièmes, etc. Employez des unités aussi petites que vous voudrez, il n'est pas prouvé que vous puissiez exprimer exactement cette longueur; il existe effectivement des grandeurs incommensurables. J'aurai à vous parler du rôle qu'elles jouent dans la théorie des nombres. Pour le moment je me borne à les mentionner, en tant que prouvant l'impossibilité où nous sommes de passer de la notion de nombre à une notion indispensable à l'Analyse, celle d'une grandeur abstraite (réelle et positive) susceptible de variation continue. On surmonte cette difficulté en recourant à un postulat. On conçoit une grandeur abstraite, réelle et positive, et l'on imagine qu'elle varie d'une manière continue sans s'occuper aucunement de la représenter dans ses différents états, soit par un nombre fractionnaire, soit autrement.

On doit à Sir W.-R. Hamilton un travail intéressant intitulé : *Theory of conjugate Functions, or algebrical Couples, with a preliminary and elementary Essay on Algebra as the Science of pure Time*, 1833-35 (*Trans. R. I. Acad.*, t. XVII). L'auteur se propose, comme l'indique son titre, de prouver que l'Algèbre n'est que la science du temps; il établit dans ses remarques générales préliminaires les conclusions suivantes : premièrement, la notion du temps est en relation avec notre Algèbre usuelle; deuxièmement, la notion du temps peut à elle seule donner lieu à une science indépendante; troisièmement, cette science pure du temps a le même objet que l'Algèbre et lui est identique, en tant que l'Algèbre est elle-même une science. Pour soutenir sa première conclusion, il fait observer que « dans l'histoire de l'Algèbre les découvertes les plus importantes ont été dues soit à la considération exclusive du temps, soit à l'idée de continuité qui est étroitement liée et coïncide presque avec l'idée de temps. C'est », dit-il, « l'esprit même de l'Algèbre de considérer les grandeurs à l'état *fluent*, comme l'esprit

de la Géométrie est de considérer les objets à l'état *fixé*, et la révolution que Newton opéra dans les parties les plus élevées de l'Algèbre pure comme de l'Algèbre appliquée, il la fit en s'appuyant principalement sur l'idée de *fluxion*, qui implique la notion du *temps*. » Hamilton prend le mot *Algèbre* dans un sens très large, mais avec toute l'extension qu'il lui donne il lui fait comprendre tout ce qui ne rentre pas dans le Calcul différentiel. Restreignant le mot à ce sens, je ne puis concéder que l'Algèbre soit en relation avec l'idée de temps. J'accorde que la notion de continuité s'impose et qu'elle a une grande importance, mais je ne puis absolument voir en elle l'idée mère de la Science. Et je partage encore moins les vues d'Hamilton, quand il prétend rattacher à la notion du temps son couple algébrique ou symbole imaginaire $a + bi$.

Je vais plus loin : la notion de continuité est une notion fondamentale; elle sert de base à tout le calcul des fluxions (et à presque tout le Calcul différentiel); elle intervient directement ou indirectement dans toute la science mathématique; néanmoins, il me semble que les variations qu'on étudie en Mathématiques sont pour la plupart considérées indépendamment du temps.

Il me paraît que nous n'avons pas en Mathématiques besoin de cette notion tant que nous ne l'invoquons pas formellement, et que même dans la Cinématique, qui est la science du mouvement, elle joue un rôle très effacé : on ne considère que des mouvements fictifs, et, si le système est regardé comme actuellement en mouvement, la vitesse du mouvement n'est pas spécifiée et n'intervient pas. Les lois des mouvements relatifs des divers points du système ne sont autre chose que des relations entre des grandeurs purement géométriques, savoir les éléments de trajectoire qui sont ou pourraient être parcourus simultanément par ces différents points. Mais, que la notion de temps s'introduise plus ou moins tôt dans les Mathématiques pures, elle se présente de toute façon en Mécanique, concurremment avec certaines autres notions nouvelles.

Si l'on divise la Mécanique en Statique et Dynamique, on rencontre en Dynamique la notion de temps et la notion de vitesse qui s'y rattache; en Statique et en Dynamique, la notion de force et aussi une notion qui est la notion de matière prise dans sa plus grande généralité : j'entends par là les conceptions de point matériel, de fil et de surface inextensibles, de solide invariable

en Mécanique rationnelle, de fluide parfait et incompressible en Hydrostatique et en Hydrodynamique, d'éther dans les théories ondulatoires, et en général de tous les autres corps possibles : par exemple, une figure remarquable qui intervient dans tous les Traités généraux de Mécanique est la développable ou surface réglée ayant ses génératrices absolument rigides, mais pouvant être pliée suivant chacune de ces droites, de façon que l'élément de surface compris entre deux génératrices successives tourne tout d'une pièce autour de l'une d'elles. Enfin il y a encore une autre notion qui est indispensable à la Dynamique : c'est celle de masse ou d'inertie.

Je quitte maintenant, semble-t-il, le domaine des Mathématiques pour passer dans celui de la Physique. Mais il est difficile de tracer une ligne de démarcation entre ces deux domaines. On ne peut pas dire que certains passages considérables des *Principes* et de la *Mécanique céleste*, ainsi que la *Mécanique analytique* tout entière, n'appartiennent pas aux Mathématiques pures ; car on peut soutenir qu'on n'entre dans la Physique que quand on cherche à découvrir le mode d'existence des corps de la nature. Mais je vais laisser de côté certaines théories physiques qu'on ne peut rattacher à la conception précédente de la Mécanique.

Revenons à la théorie des nombres. L'idée mère de cette théorie est l'idée de nombre entier : d'abord le nombre entier est essentiellement positif, mais cette notion peut s'étendre de manière à comprendre des entiers négatifs et zéro. Nous avons la notion du produit et celle du nombre premier qui n'est pas un produit d'autres nombres, et nous concevons par là le nombre comme un produit de certains facteurs premiers. Ce sont là les éléments d'une théorie analogue à plusieurs titres à celle des équations. Pour résoudre une équation, il faut trouver (s'il y en a) les valeurs entières qui la vérifient, et ainsi du reste. La notion de congruence, bien que capitale, ne change pas le caractère de la théorie.

Mais il y a aussi les incommensurables, dont nous avons déjà fait mention, et qui ont donné lieu à toute une théorie nouvelle. On peut faire acception de nombres irrationnels, tels que $\sqrt{2}$, et considérer des symboles de la forme $a + b\sqrt{2}$ (a et b étant des entiers positifs ou négatifs, sans exclure zéro). On les appellera

nombres entiers et l'on aura à étudier, relativement à ces nouveaux entiers, toutes les questions qui se présentent à propos des nombres entiers ordinaires. Il faudra seulement modifier toutes les définitions d'une manière convenable : car un entier ordinaire, premier au sens habituel, peut fort bien être le produit de deux entiers de la forme $a + b\sqrt{2}$: d'où la nécessité de modifier la définition de nombre premier. De même que les incommensurables, et avant même les incommensurables, on a introduit dans la théorie des nombres l'imaginaire i de l'Algèbre. On peut en effet considérer des nombres de la forme $a + bi$ (a et b étant des entiers ordinaires positifs ou négatifs, sans exclure zéro), leur donner le nom d'*entiers* et établir une théorie de ces nombres tout à fait analogue à la théorie ordinaire des nombres entiers réels. Ce que je veux signaler, c'est que l'imaginaire i ne joue pas dans la théorie des nombres entiers un rôle unique, comme dans l'Algèbre et la Géométrie. Ce symbole n'est ici qu'un des termes d'une série illimitée de nombres irrationnels.

J'ai dit que je vous parlerais, non des services que les Mathématiques rendent parfois dans la vie commune et dans les recherches de Physique, mais plutôt de ce que les Mathématiques doivent à la vie commune et à la Physique. Ceci m'amène à faire en quelque sorte l'historique du développement des différentes branches des Mathématiques, dans leurs relations avec les deux plus anciennes sciences physiques, l'Astronomie et la Mécanique. Les théories de Mathématiques ont dû leur origine à des questions qui s'offraient soit dans la vie pratique, soit dans les Sciences physiques : on les a poursuivies et développées sans plus avoir égard à leur origine; après des siècles elles se sont rencontrées de nouveau avec ce qui les avait fait naître, ou ont abordé des problèmes tout différents. La Géométrie et l'Algèbre me semblent devoir être considérées comme ayant procédé des problèmes et des objets de la vie pratique. La Géométrie est issue sans doute de l'arpentage; mais, malgré son nom, elle doit plutôt encore son origine à la considération de certaines figures, telles qu'une barre, un rond, une boule, une toupie (ou un pain de sucre). Les Grecs ont appliqué aux deux figures géométriques suggérées par la forme de ces derniers corps les noms de *sphère* et de *cône*, qui leur

sont restés; et ils ont étendu la signification du mot *cône* pour lui faire désigner les deux nappes formées par le prolongement dans les deux sens des génératrices de la surface. L'Algèbre semblerait être sortie de faciles jeux de patience relatifs aux nombres, que jadis le Bija-Ganita proposait, dans ses formes imagées, sur les jeunes filles aux beaux cheveux ou sur les essaims d'abeilles voltigeant parmi les plantes odorantes et la reine abeille bourdonnant autour de la fleur du lotus; et qu'aujourd'hui le commençant retrouve dans ses livres de classe sous la forme plus prosaïque d'un énoncé qui le conduit à une équation simple.

On peut faire commencer la Géométrie grecque avec Platon (430-347 av. J.-C.). On lui attribue les notions d'analyse géométrique et de lieux, ainsi que la découverte des sections coniques. Il y a en effet dans ses dialogues mainte allusion curieuse à des questions mathématiques. Ainsi, dans un passage du *Théétète*, Platon affirme l'incommensurabilité de certaines racines carrées. Mais les plus anciens écrits techniques sont ceux d'Euclide (285 av. J.-C.). Il n'y a peut-être rien de plus beau dans toute la Science mathématique que son merveilleux Livre V. Dans les Livres VII, VIII, IX et X, Euclide a complètement approfondi et développé les premiers principes de la théorie des nombres, avec celle des incommensurables. Ensuite viennent deux géomètres de génie, Apollonius (vers 247) et Archimède (287-212 av. J.-C.). Archimède a fondé la Statique (en y comprenant l'Hydrostatique); tout le monde connaît son mot sur le levier, son εὕρηκα, et sa défense de Syracuse. Après ces créateurs, la Géométrie conserve toute une série de noms, où figurent ceux des astronomes Hipparque (150 av. J.-C.) et Ptolémée (125 ap. J.-C.), et qui s'arrête à Pappus (400 ap. J.-C.). Mais les maîtres grecs furent continués par leurs commentateurs arabes, puis par les géomètres italiens et autres du XVIe siècle et des temps modernes.

L'arithmétique des Grecs manquait d'une notation commode, ce qui la rendait singulièrement compliquée et difficile. Elle fut remplacée, dans l'usage des astronomes, par la numération sexagésimale, qu'on attribue à Ptolémée, mais qui était probablement connue avant lui. L'usage des caractères que nous appelons *chiffres arabes* devint général dans les Traités d'Arithmétique et d'Astronomie des Arabes dès le milieu du Xe siècle, mais ne fut introduit en

Europe qu'environ deux cents ans plus tard. Chez les Grecs, l'Algèbre n'est guère représentée que par le Traité de Diophante (150 av. J.-C.); et encore n'est-ce là qu'une théorie des nombres, contenant quelques questions résolues sur les carrés et les cubes parfaits, ainsi que d'autres propriétés des nombres. Mais ces essais n'ont aucun lien historique avec l'Algèbre moderne, qui fut apportée d'Orient en Italie par Leonardo Bonacci de Pise (1202-1208), et qui fut cultivée avec succès au XVe et au XVIe siècle par Lucas Paciolus ou de Burgo, par Tartaglia, Cardan et Ferrari. Plus tard vinrent Viète (1540-1603), Harriot déjà cité, Wallis et beaucoup d'autres.

L'Astronomie a un lien visible avec la Géométrie. Les résultats les plus simples de l'observation des corps célestes ne peuvent être fixés que par le langage de la Géométrie; telles sont ces lois, que les étoiles décrivent des cercles autour de l'étoile polaire, ou que les positions que le Soleil occupe successivement parmi les étoiles fixes dans le cours d'une année forment un cercle. Les calculs astronomiques exigeaient qu'on sût calculer un arc de cercle connaissant sa corde. Ce problème remonte à Hipparque, qui composa, dit-on, un Ouvrage en douze Livres sur les arcs et les cordes du cercle. L'*Almageste* de Ptolémée (125 ap. J.-C.) est le premier Ouvrage contenant une Table d'arcs et de cordes, avec la manière de la construire; on y trouve, entre autres, la proposition relative au produit des diagonales du quadrilatère inscrit, qui fut plus tard intercalée dans le Traité d'Euclide (Livre VI, proposition D). Les Arabes firent cette innovation de considérer, au lieu de la corde d'un arc, le sinus, ou demi-corde de l'arc double. Ils donnèrent ainsi à cette théorie la forme que conserve la Trigonométrie moderne. Le théorème de Ptolémée qui vient d'être rappelé, ou plutôt un cas particulier de ce théorème, exprimé au moyen du symbole sinus, donne le sinus de la somme de deux arcs, et se trouve être ainsi le théorème fondamental de la Trigonométrie. Au XVe et au XVIe siècle, il y eut toute une légion de mathématiciens qui calculèrent avec une ardeur et une persévérance admirables des Tables de fonctions circulaires : Purbach, Müller (Regiomontanus), Copernic, Reinhold, Maurolycus, Viète et bien d'autres. Les Tables de tangentes et de sécantes sont dues respectivement à Reinhold et à Maurolycus.

Les logarithmes furent inventés, non pas seulement en vue du

calcul des Tables trigonométriques, mais pour faciliter tous les calculs numériques en général. Leur invention est due à John Napier (Neper), de Merchiston, qui mourut en 1618, à l'âge de soixante-sept ans. Sa conception dérive d'un raisonnement mathématique fort subtil, fait en vue de comparer les espaces que parcourent deux points, l'un se mouvant d'un mouvement uniforme, l'autre animé d'une vitesse variable suivant une loi donnée. Il est à remarquer que les logarithmes de Neper sont approximativement, mais non exactement, ceux qu'on appelle aujourd'hui *logarithmes népériens,* ou plus souvent *logarithmes hyperboliques*, et qui ont pour base e. Le passage à la base 10, qui est le plus grand perfectionnement apporté à l'usage des logarithmes, fut indiqué par Neper lui-même, mais réalisé par Henry Briggs, qui fut plus tard professeur à Oxford et mourut en 1630. Mais c'est le logarithme hyperbolique qui est seul important en théorie. La fonction directe, l'exponentielle e^x, dont le logarithme hyperbolique est l'inverse, ne se présenta pas aussi naturellement. On calcula des Tables donnant les logarithmes des nombres et ceux des fonctions trigonométriques.

Les fonctions circulaires et logarithmiques furent ainsi inventées en vue d'objets pratiques, séparément et sans qu'on aperçût aucun lien entre elles. Elles furent reliées par la théorie des imaginaires et forment aujourd'hui un groupe qui joue le rôle le plus important dans toutes les parties des Mathématiques. L'Analyse ne doit qu'à elle-même le rapprochement établi entre ces fonctions, mais elle ne peut revendiquer leur découverte.

L'architecture grecque présente des spirales, et ces courbes ont été étudiées mathématiquement par Archimède. Les géomètres grecs inventèrent encore certaines autres courbes, plus ou moins intéressantes, mais dont l'origine nous échappe. Une courbe qui aurait pu se présenter d'elle-même, celle que décrit un point de la circonférence d'une roue de voiture, fut signalée pour la première fois par Mersenne en 1615. C'est cette courbe que Roberval, Pascal et d'autres géomètres étudièrent ensuite sous le nom de *roulette* ou de *cycloïde*. Pascal (1623-1662) donna à dix-sept ans ses *Essais pour les coniques,* soit sept pages pleines de vues nouvelles, et où se trouve, dans un paragraphe de huit lignes, le théorème de l'hexagone inscrit.

Kepler (1571-1630), en trouvant par l'observation les lois du mouvement des planètes, fit intervenir dans l'Astronomie l'une des sections coniques, l'ellipse, et établit les bases de la théorie de la gravitation. Galilée (1564-1642), qui fut le contemporain de Kepler, fonda la Dynamique : immédiatement après Galilée, vint Isaac Newton (1643-1727); son Ouvrage intitulé *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, et connu sous le nom de *Principes*, parut en 1687.

Les questions de Physique, de Statique et de Dynamique qui s'étaient présentées avant la publication des *Principes* n'offraient aucune difficulté mathématique sérieuse. Il n'en fut plus ainsi des problèmes nombreux et importants que fit surgir la théorie de la gravitation, et qui, devenus un objet d'étude pour les géomètres, ont puissamment contribué au progrès des Mathématiques. Il y eut le problème des deux corps, ou, ce qui revient au même, le problème du mouvement d'un point sollicité par une force centrale variant suivant une loi quelconque. Il y eut aussi le problème (très intéressant au point de vue mathématique) du mouvement d'un corps attiré par deux ou plusieurs centres fixes. Enfin un problème qui touche de près à celui du système solaire, le problème des trois corps, a toujours excédé et excède encore de beaucoup les ressources de l'Analyse. Dans la théorie de la Lune et des planètes, on le remplace par un autre, très différent en théorie, et qui consiste à chercher le mouvement d'un corps soumis à la double action d'une force principale, émanant d'un centre fixe, et d'une force perturbatrice; un autre mode de solution conduit au problème du mouvement elliptique troublé. Remarquons à ce propos qu'un fait d'observation astronomique, la variation lente de l'orbite des planètes, a suggéré aux mathématiciens une méthode nouvelle, applicable à d'autres problèmes de Dynamique, et qui a été le principe de recherches très étendues faites de notre temps sur les systèmes d'équations différentielles. Un autre problème qui procède immédiatement de la théorie de la gravitation est celui qui consiste à déterminer l'attraction d'un solide donné sur un point matériel; Newton le résolut dans le cas d'une sphère homogène. Mais la question se complique beaucoup pour l'ellipsoïde de révolution et l'ellipsoïde à trois axes inégaux. Maclaurin traita complètement le cas de l'ellipsoïde de révolution. Quant à l'attrac-

tion de l'ellipsoïde scalène sur un point intérieur ou extérieur à sa surface, il n'y a pas de question qui ait été traitée par autant de méthodes diverses et qui ait donné lieu à des recherches aussi intéressantes.

C'est un problème de Dynamique, celui des cordes vibrantes, qui conduisit Lagrange à la représentation des fonctions par les séries trigonométriques; il faut en rapprocher les développements suivant les fonctions P_n que Legendre obtint dans des recherches relatives à l'attraction d'un ellipsoïde. Les travaux ultérieurs de Laplace sur l'attraction des corps infiniment peu différents de la sphère donnèrent les fonctions de deux variables appelées *fonctions de Laplace*. J'ai parlé des ellipsoïdes; mais la théorie générale de l'attraction est devenue une branche très considérable de la science moderne : elle rappelle les noms de Gauss, de Lejeune-Dirichlet et de Green. Il convient de faire remarquer que cette théorie est maintenant étendue à l'espace à n dimensions. Un autre problème de Mécanique céleste, celui du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité, ramené au cas le plus simple, celui d'un corps sur lequel n'agit aucune forme, présente aussi un très grand intérêt mathématique.

Je puis signaler encore quelques questions de pratique ou de Physique liées au développement de la science mathématique. J'ai parlé des deux systèmes de projection employés pour les cartes : la projection stéréographique qui remonte à Ptolémée, et la projection de Mercator, inventée par Eduard Wright vers l'an 1600 : ces deux procédés se rattachent, comme cas particuliers de la projection orthomorphique, à la représentation Géométrique d'une variable imaginaire. J'ai aussi parlé de la perspective et du mode de représentation employé par Monge dans sa Géométrie descriptive. Monge est, comme chacun sait, l'auteur de la théorie géométrique de la courbure des surfaces et des lignes de courbure. Il fut conduit à cette théorie par un problème de terrassements : d'une aire donnée, recouverte partout d'une même épaisseur de terre, charrier la terre et l'étendre sur une autre aire égale, avec les moindres frais de transport. Pour résoudre le problème analogue dans la Géométrie de l'espace, il fut conduit à étudier les normales à une surface qui se rencontrent mutuellement, et arriva ainsi aux lignes de courbure. [Voir son *Mémoire sur les déblais et les rem-*

blais, Mém. de l'Ac. des Sc. (1781)]. Les normales à une surface sont en outre un exemple de droites en nombre doublement infini, et se rattachent ainsi aux théories modernes des congruences et des complexes.

La théorie ondulatoire de la lumière conduisit Fresnel à la surface de l'onde, surface qui est du quatrième ordre, et de beaucoup la plus intéressante des surfaces connues. La propriété géométrique de cette surface, d'admettre des plans tangents qui la touchent tout le long d'un cercle, fournit à Sir W.-R. Hamilton la théorie de la réfraction conique. Les géomètres regardent aujourd'hui la surface de l'onde comme un cas particulier de la surface de Kummer, qui est une surface du quatrième ordre, présentant seize points coniques et admettant seize plans tangents singuliers.

L'insuffisance de mes connaissances, tant en Mathématiques qu'en Physique, m'interdit de vous parler de l'appoint qu'ont apporté à la théorie des équations aux différences partielles la théorie des mouvements tourbillonnaires en Hydrodynamique, ainsi que les grandes théories physiques de la chaleur, de l'électricité, du magnétisme et de l'énergie.

Il est difficile de donner une idée de la vaste étendue de la science mathématique actuelle. Le mot *étendue* ne dit pas assez. J'ai en vue une étendue diversifiée par de riches détails, non pas l'étendue monotone d'une plaine vide, mais un beau paysage, à voir d'abord de loin, mais qu'on a plaisir ensuite à parcourir et à étudier dans chaque détail, montagne et vallée, fleuve , rochers, arbres et fleurs. Mais, comme toute autre beauté, la beauté d'une théorie mathématique se sent, elle ne se démontre pas. Pour ce qui est de l'étendue de la science, je ne puis la faire mieux ressortir qu'en vous rappelant quelques-unes des dates où de grands progrès ont été accomplis dans ses diverses branches.

En ce qui concerne la Géométrie, j'ai déjà parlé de l'invention des coordonnées cartésiennes (1637). Elle donna aux géomètres la série entière des courbes algébriques de degré plus élevé que les coniques : courbes du troisième ordre ou cubiques, du quatrième ordre ou quartiques, et ainsi de suite. Les premières applications qui en furent faites furent l'*Énumération des courbes du troisième ordre* de Newton, et les très intéressantes recherches de Maclaurin sur les points correspondants des cubiques. Ces travaux montrè-

rent du coup la beauté de la théorie des cubiques et son extension bien plus grande que celle de la théorie des coniques. Rappelons le Mémoire d'Euler *Sur une contradiction apparente dans la théorie des courbes planes* (*Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1748), où est signalé ce fait, qu'étant donnés huit des points d'intersection de deux cubiques, le neuvième est entièrement déterminé. Par cette remarque, Euler fit plus que découvrir une propriété fondamentale des cubiques (donnant comme cas particulier celle de l'hexagone de Pascal) : il introduisit dans la Géométrie une notion nouvelle, celle des systèmes de points, ou des systèmes de points communs à deux courbes.

La théorie des polaires réciproques, qui dérive de celle des coniques, conduisit à ce principe général que dans le plan la droite et le point sont deux figures corrélatives : c'est le principe de dualité. C'est sur ce principe que Plücker fonda son grand Ouvrage intitulé *Théorie des courbes algébriques* (Bonn, 1839), dans lequel il établit les relations qui existent entre l'ordre et la classe d'une courbe et le nombre de ses points singuliers et de ses tangentes singulières (les six équations de Plücker). On apprit de lui que la véritable division des courbes repose non sur l'ordre seul, mais conjointement sur l'ordre et la classe, et que les courbes d'un certain ordre et d'une certaine classe se divisent encore en familles d'après leurs singularités. Et ce n'est pas là une subdivision arbitraire ; car c'est bien ainsi que se partage effectivement le champ des recherches. Chacune de ces familles de courbes forme un tout, comme l'ensemble des courbes d'un même ordre avait d'abord paru le faire.

La *famille* se compose des courbes du même *genre* (*Geschlecht*, *deficiency*). A raison de ce que j'aurai à dire des fonctions abéliennes, je dois préciser cette notion de genre, qui a été introduite dans la Science par Riemann [*Mémoire sur la théorie des fonctions abéliennes*, 1857 (*Journal de Crelle*, t. LIV)]. Le genre d'une courbe d'ordre n est égal à l'excès du nombre maximum $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ de points doubles que peut avoir une courbe de cet ordre, sur le nombre des points doubles que présente la courbe considérée (les points de rebroussement sont comptés comme points doubles). Ainsi une conique quelconque, une cubique ayant un point double, une quartique ayant trois points doubles sont des courbes

du genre zéro. La cubique générale est une courbe du genre 1, et la plus simple du genre; la quartique générale est une courbe du genre 3, et ainsi de suite. On représente ordinairement le genre par la lettre p. Riemann étudia le problème général de la transformation générale d'une courbe plane : l'équation de la courbe étant rendue homogène, on remplace les trois coordonnées respectivement par trois polynômes entiers quelconques homogènes et du même degré par rapport à trois nouvelles coordonnées. La courbe transformée est en général d'un autre ordre que la proposée; elle a son système propre de points doubles; mais son genre reste le même que celui de la proposée. C'est pour cela que Riemann rapproche comme formant un seul groupe toutes les courbes d'un même genre p. Il ne faudrait pas croire que toutes les courbes d'un même groupe puissent ainsi se transformer les unes dans les autres; car on a démontré qu'une courbe quelconque d'un tel groupe dépend, si c'est une cubique, d'un seul paramètre, et si son genre p est supérieur à l'unité, de $3p - 3$ paramètres.

La géométrie de l'espace est un sujet beaucoup plus vaste que la géométrie du plan. Les théories y sont plus nombreuses et plus étendues. Cette différence ne tient pas au nombre des dimensions des espaces considérés, ou, ce qui revient au même, au nombre des figures élémentaires (dans le plan, le point et la droite; dans l'espace, le point, la droite et le plan). Elle procède d'une raison beaucoup plus élevée. Ce serait mal poser la question que de dire : la géométrie du plan a les courbes, la géométrie de l'espace a les courbes et les surfaces. Pour établir la comparaison, il faut faire une énumération plus complète. Dans la géométrie du plan, nous avons les courbes qu'on peut regarder comme des systèmes simplement infinis de points, et aussi comme des systèmes simplement infinis de droites. Dans la géométrie de l'espace, nous avons d'abord ce qui à un point de vue est une courbe, et à un autre point de vue une surface développable; c'est là ce qu'on peut considérer comme un système simplement infini de points, de droites et de plans. Nous avons ensuite la surface, qu'on peut regarder comme un système doublement infini de points, de droites ou de plans, et aussi comme un certain système triplement infini de droites (en effet, les droites tangentes à une surface forment un complexe spécial); comme cas particulier des systèmes simplement

infinis, il y a les courbes planes et les cônes; comme cas particulier des surfaces, les surfaces réglées, qui sont des systèmes simplement infinis de droites. Enfin, nous avons encore la congruence ou système doublement infini de droites, et le complexe ou système simplement infini de droites. Mais, même en ne considérant dans la géométrie de l'espace que les courbes et les surfaces, il y a une quantité de théories qui ont à peine leurs analogues dans la géométrie du plan. Les relations d'une courbe avec les diverses surfaces qui peuvent passer par cette courbe ou d'une surface avec les diverses courbes qu'on peut y tracer, diffèrent quant à la nature de celles qui leur correspondent le plus exactement dans le plan, savoir la relation d'un système de points avec les courbes qui peuvent passer par ces points, ou la relation d'une courbe avec ses points. En particulier, la géométrie du plan n'offre rien qui corresponde aux lignes de courbure d'une surface. A cet unique théorème que la ligne droite est la plus courte distance entre deux points, correspondent dans la géométrie de l'espace deux théories importantes et difficiles, celle des lignes géodésiques et celle des surfaces d'aire minima dans un périmètre donné. Autre exemple : dans la géométrie de l'espace se présente cette question intéressante et délicate : représenter une courbe gauche par deux équations. Une courbe gauche quelconque ne peut pas en général être représentée entièrement et exclusivement par deux équations homogènes à quatre variables : il faut pour cela que cette courbe forme à elle seule l'intersection complète de deux surfaces. Sur cette question, qui revient à la classification des courbes de l'espace, nous mentionnerons trois Mémoires très récents de Nöther, Halphen et Valentiner.

Dans la géométrie de l'espace à n dimensions, on n'a étudié encore que des questions isolées : c'est que le champ est trop vaste. La comparaison des deux géométries du plan et de l'espace montre de reste ce que chaque dimension ajoutée à l'espace qu'on étudie ajoute de complication et de difficulté à la théorie.

Dans l'analyse transcendante ou théorie des fonctions, nous avons tout ce qui a été fait dans ce siècle sur la théorie générale des fonctions d'une variable imaginaire par Gauss, Cauchy, Puiseux, Briot, Bouquet, Liouville, Fuchs, Weierstrass et d'autres

encore. C'est à Gauss qu'est due l'idée fondamentale de représenter géométriquement la variable imaginaire $x + iy$ par le point qui a pour coordonnées x et y. J'ai déjà donné quelques détails sur ce sujet. Le même principe a été appliqué aux équations différentielles. Dans les idées modernes, ce qu'on se propose quand une équation différentielle est donnée, c'est moins de la ramener aux quadratures que d'en déduire la marche des intégrales pour toutes les positions du point figuratif de la variable indépendante. En particulier, l'équation différentielle du second ordre qui conduit à la série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ a été étudiée de la sorte et a donné des résultats du plus haut intérêt : la fonction, ainsi déterminée pour toutes les valeurs des paramètres α, β, γ, devient alors une fonction connue. Je signalerai encore ici une nouvelle notion qui a été introduite par M. Weierstrass dans cette partie de l'Analyse : c'est la notion de la fonction uniforme et entière ; une telle fonction est définie par une série convergente dans tout le plan et procédant suivant les puissances croissantes soit de la variable x, soit de $\frac{1}{x-c}$; elle admet comme unique point singulier essentiel soit le point $x = \infty$, soit le point $x = c$. Le Mémoire de M. Weierstrass a paru dans les *Comptes rendus de l'Académie de Berlin*, en 1876 (¹).

Mais, outre la théorie générale, j'ai à vous parler des diverses fonctions particulières auxquelles la théorie a été appliquée, en un mot des diverses fonctions actuellement connues.

Pendant longtemps les seules fonctions transcendantes connues ont été les fonctions circulaires, sinus, cosinus, etc., les logarithmes hyperboliques ou de base e, seuls usités dans l'Analyse, et la fonction exponentielle e^x qui en dépend. Pour être plus complet, je dirai qu'on avait les fonctions circulaires directes et inverses, la fonction exponentielle et son inverse, la fonction logarithmique.

Je laisserai de côté l'importante intégrale eulérienne de seconde espèce ou fonction gamma, qui a donné lieu tout récemment à de très intéressants travaux, et je ne parlerai pas non plus des autres fonctions particulières dont l'importance est moindre. J'arrive à

(¹) Il a été traduit par M. Picard, dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*; 1879.

un groupe considérable formé par les fonctions elliptiques et la fonction Θ à une seule variable (1811-1829). Je choisis ainsi mes dates, pour qu'elles comprennent les deux Ouvrages dogmatiques de Legendre, les *Exercices de Calcul intégral* (1811-1816) et la *Théorie des fonctions elliptiques* (1825-1828), ainsi que les *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum* de Jacobi (1829). N'oublions pas que beaucoup des résultats de Jacobi ont été obtenus en même temps par Abel. Legendre, il faut le remarquer, prenait pour point de départ les intégrales dépendant d'un radical $\sqrt{X}$, portant sur un polynôme du quatrième degré en x; il substituait à $\sqrt{X}$ un radical $\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$ et il arrivait à ses trois espèces d'intégrales elliptiques, $F(\varphi)$, $E(\varphi)$, $\Pi(\varphi)$: les deux premières intégrales dépendent de φ, qui est l'argument ou l'amplitude, et du module k; la troisième dépend en outre d'un paramètre n. Mais la fonction $F(\varphi)$ est à proprement parler une fonction inverse : au lieu de cette fonction, Abel et Jacobi considérèrent chacun de leur côté les fonctions directes, correspondant au sinus et cosinus de la Trigonométrie : Abel les appelait φ, f, F et Jacobi les représentait par les symboles sinam, cosam, Δam, ou, comme on écrit souvent aussi, sn, cn, dn. En outre, Jacobi, en développant sa théorie de la transformation, obtint une multitude de formules où figure la fonction q (fonction transcendante du module k définie par l'équation $q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$), et il fut ainsi conduit à considérer les deux nouvelles fonctions H et Θ. Ce sont ces deux fonctions qui, prises chacune séparément avec deux arguments distincts, donnent lieu aux quatre fonctions que Jacobi désigne aussi par Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4, et qu'on appelle les *fonctions thêta*, ou, pour éviter toute confusion, les *fonctions thêta d'une variable*. Enfin Jacobi, grâce à la transformation $\sin\varphi = \sin\mathrm{am}\, u$, exprima les fonctions de deuxième et de troisième espèce de Legendre au moyen de deux intégrales Z et Π qui dépendent de la nouvelle variable u, et il les rattacha à ses fonctions H et Θ; quant aux fonctions elliptiques sn, cn, dn, elles s'expriment aussi au moyen des fonctions de Jacobi : ce sont les rapports des trois fonctions Θ_1, Θ_2, Θ_3 à la fonction Θ_4.

Il convient de mentionner ici des recherches publiées par M. Hermite en 1858. Introduisant à la place de q la nouvelle

variable ω définie par l'équation $q = e^{i\pi\omega}$, en sorte que l'on a $\omega = i\frac{K'}{K}$. M. Hermite fut conduit à considérer les trois fonctions $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$, $\chi(\omega)$, qui représentent les valeurs de $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$ et $\sqrt[12]{kk'}$, considérées comme fonctions de ω. Dans un remarquable travail, interrompu par la mort, le professeur Smith traite la fonction thêta pour l'argument zéro comme une fonction de ω : c'est ce qu'il appelle *fonction oméga*, et les trois fonctions $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$, $\chi(\omega)$ sont ses *fonctions modulaires*.

Les fonctions elliptiques proprement dites sn, cn, dn forment un système analogue aux fonctions circulaires sinus et cosinus (à vrai dire sn est un sinus, cn et dn sont deux sortes de cosinus) : elles ont leur théorème d'addition qui consiste en ce que $\operatorname{sn}(x+y)$, $\operatorname{cn}(x+y)$, $\operatorname{dn}(x+y)$ s'expriment rationnellement en fonction de $\operatorname{sn}x$, $\operatorname{cn}x$, $\operatorname{dn}x$ et de $\operatorname{sn}y$, $\operatorname{cn}y$, $\operatorname{dn}y$. En fait, les fonctions elliptiques se réduisent aux fonctions circulaires dans le cas particulier de $k = 0$. Mais il y a une différence importante de forme entre les deux théorèmes d'addition. Les fonctions elliptiques de l'argument $x+y$ sont des fractions, et ces fractions ont même dénominateur. C'est là une raison pour regarder les trois fonctions elliptiques comme les quotients de quatre fonctions A, B, C, D, dont les valeurs elles-mêmes sont et restent indéterminées (de fait, les fonctions sn, cn, dn sont les quotients des trois fonctions Θ_1, Θ_2, Θ_3 par Θ_4 ; mais c'est là un résultat subséquent qu'on ne peut nullement déduire du théorème d'addition, et sur lequel nous ne pouvons insister en ce moment : notre remarque est faite en vue de ce qui va suivre, relativement aux fonctions abéliennes). En outre, les fonctions sn, cn, dn donnent lieu, ce que ne font pas les fonctions circulaires, à toute une théorie de transformations, dont l'ordre est un entier quelconque premier ou composé : cette théorie comprend celle des équations modulaires et des équations aux multiplicateurs, et elle se développe dans diverses directions pour se rattacher à la Géométrie, à la théorie des équations et à la théorie des nombres. Abstraction faite des fonctions Θ la théorie des fonctions sn, cn, dn forme encore un ensemble très considérable.

Je fais dater les fonctions abéliennes de la période comprise entre 1826 et 1832. Abel a donné au théorème qui porte son nom

diverses formes dont la plus générale est celle qu'on trouve dans son *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes* (1826), qui avait été présenté à l'Académie des Sciences de Paris, et qui fut couronné un an après la mort de l'auteur. C'est une proposition de Calcul intégral, relative aux intégrales qui dépendent de la fonction y de x définie par une équation algébrique quelconque $F(x, y) = 0$. D'après ce théorème, la somme d'un nombre quelconque d'intégrales de cette nature peut s'exprimer par la somme d'un nombre déterminé p d'intégrales de même nature, et le nombre p dépend de la forme de l'équation $F(x, y) = 0$, qui définit l'irrationnelle y comme fonction de x (pour préciser, ce nombre p n'est autre chose que le genre de la courbe représentée par cette équation, mais nous avons déjà dit que la notion de genre date seulement de 1857). En appliquant ce théorème au cas où y est la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré, on retrouve le théorème de Legendre sur les intégrales elliptiques $F(\varphi) + F(\psi)$ exprimées au moyen d'une seule intégrale $F(\mu)$, théorème qui est sans relation avec les fonctions elliptiques sn, cn, dn. Pour plus de clarté, je rappellerai que les intégrales abéliennes, relatives au cas particulier où y est la racine carrée d'un polynôme entier en x de degré supérieur à 4, sont appelées *intégrales hyperelliptiques*; si le polynôme soumis au radical est du cinquième ou du sixième degré, on a une intégrale du second genre ($p = 2$); s'il est du septième ou du huitième degré, l'intégrale est du troisième genre ($p = 3$), et ainsi de suite. L'intégrale abélienne la plus générale du genre 2 est une intégrale hyperelliptique : mais, si le genre est égal ou supérieur à 3, les intégrales hyperelliptiques ne sont plus qu'un cas particulier des intégrales abéliennes du même genre. Après Abel, le premier pas fut fait par Jacobi dans un Mémoire court, mais très important, intitulé *Considerationes generales de transcendentibus Abelianis* (*Journal de Crelle*, t. 9, 1832). Jacobi se borne aux intégrales hyperelliptiques de genre quelconque p, mais son résultat est général : il consiste en ce que les fonctions hyperelliptiques directes que concerne le théorème d'Abel ne sont plus des fonctions d'une seule variable comme les fonctions elliptiques sn, cn, dn, mais des fonctions de p variables. Ainsi, dans le cas de $p = 2$ spécialement considéré par Jacobi, le théorème d'Abel concerne deux fonctions de deux variables chacune $\lambda(u, v)$, $\lambda_1(u, v)$ et donne effective-

ment l'addition de ces fonctions en fournissant l'expression algébrique de $\lambda(u+u', v+v')$ et de $\lambda_1(u+u', v+v')$ au moyen de $\lambda(u,v)$, $\lambda_1(u,v)$, $\lambda(u',v')$, et $\lambda_1(u',v')$.

Il importe de remarquer que le théorème d'Abel ne donne pas directement (et Jacobi ne l'affirme pas non plus) le théorème d'addition sous sa forme définitive. Considérons le cas de $p=1$: il résulte du théorème d'Abel que la fonction $\lambda(u)$ est telle que $\lambda(u+v)$ s'exprime algébriquement en fonction de $\lambda(u)$ et de $\lambda(v)$. On est donc parfaitement en droit de dire que $\operatorname{sn}(u+v)$, $\operatorname{sn} u$ et $\operatorname{sn} v$ sont liés par une équation algébrique; mais cette équation contient les quatre radicaux $\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 u}$, $\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 u}$, $\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 v}$, $\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 v}$. Le théorème ne donne donc pas les trois fonctions sn, cn, dn de l'argument $u+v$ en fonction rationnelle de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$, et même ne prouve aucunement que ces fonctions puissent s'exprimer de la sorte. Dans le cas de $p=1$, le vrai nombre des fonctions abéliennes d'une seule variable chacune est trois; mais les trois fonctions sn, cn, dn doivent être considérées comme les rapports de quatre fonctions. Ainsi, en général, le vrai nombre des fonctions abéliennes de p variables chacune est 4^p-1, et elles peuvent être considérées comme les rapports de 4^p fonctions. Malgré la remarque faite, on peut dire que la notion de fonctions abéliennes à p variables a été fournie, ainsi que le théorème d'addition de ces fonctions, par les Mémoires que nous venons de rappeler (Abel, 1826; Jacobi, 1832).

Nous avons encore à citer, relativement au cas de $p=2$ (fonctions hyperelliptiques), deux Mémoires extrêmement remarquables : l'un, de Göpel, intitulé *Theoriæ transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis* (*Journal de Crelle*, t. XXXV, 1847); l'autre, de Rosenhain (1846), est le *Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques de la première classe*, Paris, 1851 (*Mém. des sav. étrangers*, t. XI). Les deux auteurs, généralisant la fonction thêta d'une variable, considèrent des fonctions analogues à deux variables et y rattachent la théorie des fonctions abéliennes de deux variables. On peut remarquer que les fonctions thêta sont certainement plus simples que les fonctions abéliennes.

Nous laisserons de côté quelques Mémoires de M. Weierstrass relatifs à la théorie générale des intégrales hyperelliptiques de genre quelconque, pour arriver à Riemann, qui mourut en 1866, à

l'âge de quarante ans : ses œuvres complètes ont été publiées à Leipzig en 1876. Nous avons déjà mentionné incidemment son grand Mémoire sur les fonctions abéliennes et les fonctions thêta [*Theorie der Abel'schen Functionen* (*J. de Crelle*, t. LIV, 1857)]. A ce travail se rattache étroitement la dissertation inaugurale de Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen Complexen-Grosse* (Göttingue, 1851). La méthode que Riemann applique aux fonctions abéliennes et sa théorie préliminaire des fonctions thêta de plusieurs variables sont fondées sur les principes généraux de la théorie des fonctions de la variable complexe $x + iy$; et c'est ce qui me décide à vous dire quelques mots de la marche qu'il a suivie.

Riemann part des intégrales abéliennes les plus générales, et, considérant les fonctions inverses de ces intégrales, c'est-à-dire les fonctions abéliennes de p variables, il définit la fonction thêta de p variables comme la somme d'une série p fois infinie d'exponentielles et dont le terme général dépend de p variables; puis il montre que les fonctions abéliennes sont liées algébriquement aux fonctions thêta des mêmes arguments. La théorie est présentée de la façon la plus sommaire. Ainsi, à l'égard des fonctions thêta, Riemann ne mentionne même pas les 4^p fonctions qui s'en déduisent, et il ne donne aucune indication sur la forme des relations algébriques entre les fonctions thêta et les fonctions abéliennes.

Le commencement du siècle fait époque dans la théorie des équations. Le XVIIIe siècle allait finir quand Lagrange publia son *Traité des équations numériques*, dont la première édition est de 1798 : les notes de ce Traité contiennent tout ce qu'on savait alors sur les équations. Notre siècle commençait à peine quand parurent les *Disquisitiones arithmeticæ* (1801) : dans ce grand Ouvrage, Gauss expose sa théorie des équations binômes $x^n - 1 = 0$, de degré premier. Supprimant le facteur $x - 1$, on obtient une équation du degré $n - 1$, décomposable en plusieurs autres dont les degrés sont les facteurs premiers de $n - 1$. Gauss fut conduit, entre autres résultats remarquables, à cette proposition de Géométrie que les polygones réguliers de 17 et de 257 côtés se construisent rien qu'avec la règle et le compas.

Après Gauss vint Abel, dont les travaux parurent entre 1826 et 1829. On lui doit la preuve de l'impossibilité de résoudre l'équa-

tion du cinquième degré au moyen de radicaux; plus, de très importantes recherches sur le problème général de la résolution algébrique des équations, enfin la théorie de toute une classse d'équations auxquelles on a donné son nom. Abel appliqua ses méthodes à deux questions bien distinctes : diviser l'argument et diviser les périodes des fonctions elliptiques, ainsi qu'au problème particulièrement intéressant de la lemniscate. Mais c'est Galois (né en 1811, tué en duel en 1832) qui établit la théorie la plus complète de la résolution algébrique des équations. Pour son objet, il inventa les groupes de substitution. C'est encore à Galois que sont dus les résultats les plus remarquables touchant une classe d'équations, les équations modulaires, qui se présentent aussi dans la théorie des fonctions elliptiques. En 1835, Jerrard donna sa transformation de l'équation générale du cinquième degré. En 1870 a paru un Ouvrage approfondi de M. Jordan, le *Traité des substitutions et des équations algébriques;* il suffit de jeter un coup d'œil sur la table des matières de ce Traité pour reconnaître l'immense extension prise, comme je vous le disais, par cette branche des Mathématiques.

La théorie des nombres a été représentée au commencement du siècle par l'Ouvrage de Legendre (*Théorie des nombres*, 1re édition, 1798), que suivirent de près les *Disquisitiones arithmeticæ* de Gauss (1801). Les *Disquisitiones* contiennent une théorie des nombres réels. On y voit apparaître la notion de congruence; on y trouve une démonstration de la loi de réciprocité des résidus quadratiques, ainsi que la théorie complète des formes quadratiques binaires à déterminant positif et à déterminant négatif, avec la première théorie de la composition de ces formes. Gauss donne aussi un commencement de théorie des formes quadratiques ternaires et une théorie à laquelle nous avons déjà fait allusion : je veux dire la résolution de l'équation binôme $x^n - 1 = 0$. Il étudie les racines ou périodes de racines dont se composent les irrationnelles qui servent d'unités dans des théories difficiles, fort travaillées depuis. Ainsi l'imaginaire i de l'analyse élémentaire se présente comme une racine de l'équation $x^4 - 1 = 0$. C'est Gauss qui reconnut le premier la nécessité, pour étudier des quantités réelles (les résidus biquadratiques), de faire usage des nombres complexes mentionnés plus haut : leur forme générale est $a + bi$, a et b étant des

entiers positifs ou négatifs, sans exclure zéro. Les propriétés de ces nombres complexes ont fait l'objet des recherches de Lejeune-Dirichlet, et il existe maintenant une théorie complète de ces nombres, qui correspond élément par élément à la théorie plus ancienne des nombres réels. Elle a ses nombres premiers, ses congruences, ses résidus, sa loi de réciprocité, ses formes quadratiques, etc. Mais elle présente plus de variété et de complication; les démonstrations y sont plus laborieuses. Au lieu de l'équation $x^4 - 1 = 0$, on peut considérer l'équation $x^3 - 1 = 0$, et étudier les nombres complexes $a + b\rho$ composés avec une racine cubique imaginaire de l'unité. C'est là encore une nouvelle théorie, spécialement étudiée par Eisenstein, et qui correspond à celle des nombres $a + bi$, sans se confondre avec elle. C'est Kummer qui a abordé le premier le cas général où l'exposant n est un nombre premier quelconque : ici interviennent, au lieu des racines elles-mêmes, les périodes de racines. Ainsi, $n - 1$ étant égal à ef, si l'on désigne par $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_e$ les e périodes dont chacune est la somme de f racines de l'équation $x^n - 1 = 0$, on aura à considérer de nouveaux nombres complexes de la forme $a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \ldots + a_e\eta_e$ ($a_1, a_2, \ldots, a_e$ étant des entiers positifs ou négatifs sans exclure zéro). Comme cas particulier, on peut supposer $f = 1$, et la théorie des périodes contient celle des racines elles-mêmes. C'est là une nouvelle théorie très générale qui comprend les entiers complexes $a + bi$ et $a + b\rho$. Mais ici se présente une particularité remarquable. Les nombres premiers parmi les nombres complexes $a + bi$ et $a + b\rho$ jouissent des mêmes propriétés que les nombres premiers réels. Ainsi un nombre non premier n'est décomposable que d'une seule manière en un produit de facteurs premiers; les puissances d'un nombre premier n'admettent d'autres diviseurs que des puissances moindres de ce même nombre : par exemple, si p est premier, p^3 ne peut être égal à un produit de deux facteurs A et B (en excluant la décomposition évidente $p^3 = p.p^2$). Dans le cas général des nombres complexes de la forme $a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \ldots + a_e\eta_e$, il n'en est plus ainsi; mais l'exception ne se présente que pour des valeurs de n égales ou supérieures à 23. Parmi les nombres composés avec les racines vingt-troisièmes de l'unité, il existe des nombres premiers p pour lesquels on a $p^3 = AB$. Pour expliquer ce fait, il faut recourir à la notion des nombres idéaux : un nombre premier p ne peut, d'après sa définition, être le produit de

deux nombres effectifs; mais, dans l'exemple ci-dessus, le nombre p est le produit de deux nombres idéaux ayant respectivement pour cubes les deux nombres effectifs A et B, et c'est ainsi qu'on a $p^3 = AB$. Telle est, ce me semble, la voie la plus facile à suivre pour acquérir la notion des nombres idéaux. Quant à la manière de traiter ces nombres, c'est chose beaucoup plus difficile. (*Voir* le grand Mémoire de Kummer inséré dans le *Journal de Crelle*, t. XXXV, 1847, et intitulé : *Ueber die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten Complexen-Zahlen in ihre Primfactoren.*) Un nombre idéal se révèle, sans jamais être isolé, dans les propriétés du nombre premier dont il est un facteur, et cela abstraction faite du théorème subséquent d'après lequel il y a toujours des puissances d'un nombre idéal qui sont des entiers actuels. Dans les derniers développements que la théorie des nombres a reçus de Dedekind [1], les irrationnelles prises pour unités sont les racines des équations irréductibles qui ont pour coefficients des entiers positifs ou négatifs, celui de la plus haute puissance de x étant l'unité. Alors se pose cette question : quels seront les analogues des nombres entiers? Dans le cas très simple de l'équation $x^2 + 3 = 0$, on prendra pour un entier l'expression $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ dont la forme semble fractionnaire et qui a pour cube l'unité : c'est le symbole ρ dans la théorie d'Eisenstein. Enfin il faut mentionner une théorie des nombres complexes qui est, à ce qu'il semble, entièrement distincte des théories précédentes : c'est la théorie des imaginaires de congruence établie par Galois. On appelle ainsi les nombres imaginaires qui vérifient une congruence sans solutions réelles. La congruence $x^2 - 2 \equiv 0 \pmod{5}$ par exemple n'a aucune racine réelle; mais prenons pour solution une imaginaire i, l'autre solution sera $-i$; et nous aurons à considérer le système des nombres complexes $a + bi \pmod{5}$, c'est-à-dire les 5^2 nombres obtenus en attribuant successivement à chacun des deux coefficients a et b les cinq valeurs $0, 1, 2, 3, 4$. De même et plus généralement, considérons la congruence $F(x) \equiv 0$ d'ordre n et de module p (p étant un nombre premier quelconque), et désignons par i une racine imaginaire de cette congruence. On en déduit le système des nombres complexes $a + bi + ci^2 + \ldots + ki^{n-1}$,

---

[1] *Sur la théorie des nombres entiers algébriques* (*Bulletin*, 1re série, t. XI, et 2e série, t. II).

les coefficients $a, b, \ldots, k$ ayant l'une quelconque des valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-1$.

En ce qui concerne la théorie des formes réelles, nous signalerons, en dehors des formes quadratiques binaires et ternaires, qui ont été étudiées très complètement, les formes quadratiques à quatre et à plusieurs variables, auxquelles se rattache comme cas très particulier la décomposition d'un nombre en quatre carrés ou en n carrés. On a fait aussi des recherches sur les formes binaires, cubiques et biquadratiques, et sur les formes cubiques ternaires. Les formes quadratiques binaires ont été étudiées à propos des entiers complexes $a + bi$.

Un sujet qui semble isolé dans la théorie des nombres, le théorème de Fermat sur l'impossibilité de la relation $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ pour $\lambda > 3$, a donné lieu à des recherches du plus grand intérêt, mais de la plus grande difficulté.

En dehors de nos Mathématiques ordinaires, il existe quelques théories que je ne puis passer sous silence : ce sont des théories qui confinent à l'Algèbre, à la Géométrie, à la logique. Ici comme en maint autre endroit, il est difficile de tracer une ligne de démarcation. Dans les Mathématiques ordinaires, nous employons des symboles qui ne représentent pas des nombres, que nous combinons néanmoins par voie d'addition et de multiplication, et qui peuvent ne pas obéir à la loi de commutativité $ab = ba$: c'est ce qui a lieu ou peut avoir lieu en particulier pour les symboles d'opération. On ne peut pas dire que la théorie de tels symboles n'intéresse pas l'Algèbre ordinaire. Mais je place en dehors des Mathématiques ordinaires le système d'Algèbre multiple ou d'Algèbre associative linéaire, développé dans le remarquable Mémoire de feu Benjamin Peirce, intitulé *Algèbre associative linéaire* (1870), et réimprimé en 1881 dans l'*American Journal of Mathematics* (t. IV) avec des notes et additions de C.-S. Peirce fils. L'auteur considère des symboles A, B, ..., qui sont des fonctions linéaires d'un certain nombre de lettres ou unités $i, j, k, l, \ldots$, ayant pour coefficients des expressions algébriques ordinaires, réelles ou imaginaires, c'est-à-dire de la forme générale $x + y\sqrt{-1}$. Les lettres $i, j, \ldots$ sont telles que tout produit de deux d'entre elles $i^2, ij, ji, \ldots$ (ij n'étant pas généralement égal à ji) est égal à une fonction linéaire de ces lettres ; mais elles obéissent à la loi d'associativité. Un produit

de trois lettres est défini par l'égalité $ij.k = i.jk$ de sorte qu'il n'existe qu'un seul et unique produit de trois ou plusieurs lettres, ou ce qui revient au même, les lois de combinaison des unités i, j, k sont définies par une table de multiplication donnant les valeurs de $i^2, ij, ji, \ldots$. Les unités primitivement considérées peuvent être remplacées par des fonctions linéaires de ces unités, de manière à donner lieu, pour les unités définitivement adoptées, à une table de multiplication de la forme la plus simple. On remarquera combien de fois on y rencontre des symboles de nullité ou d'équivalence (*nil potent or idem potent*) $i^2 = 0$ ou $i^2 = i$ et des symboles i, j tels que $ij = ji = 0$, et quelle simplicité en résulte pour les tables de multiplication qui définissent les divers systèmes.

J'ai parlé de cette algèbre multiple avant de signaler diverses théories géométriques de date plus ancienne, parce que je considère l'algèbre de Peirce comme étant le vrai fondement, le principe analytique de ces théories. On ne peut chercher à réaliser directement les notions d'addition ou de multiplication des segments, des aires, des relations, des forces et autres grandeurs géométriques, cinématiques ou mécaniques. Il convient de formuler comme il suit leur théorie générale. On considère chacune de ces grandeurs comme déterminée par les paramètres a, b, c, qui la définissent (par exemple, s'il s'agit d'un segment de droite donné en grandeur et en position, ces paramètres seront la longueur du segment, les coordonnées de son origine et les cosinus de la direction qui va de son origine à son extrémité); on représente cette grandeur par une fonction linéaire $ai + bj + ck + \ldots$ forméeavec une série donnée d'unités i, j, k, ayant pour coefficients les paramètres a, b, c. Inversement une telle fonction linéaire représente une grandeur de l'espèce en question. Deux grandeurs données de même espèce sont représentées par deux fonctions linéaires : la somme des deux fonctions linéaires est une pareille fonction linéaire et représente une troisième grandeur de même espèce que les deux premières et que nous pouvons regarder comme leur somme; le produit de ces deux fonctions linéaires (effectué dans un ordre déterminé s'il n'est pas commutatif) représente une grandeur de même espèce qu'on peut regarder comme le produit (effectué dans le même ordre) des deux premières grandeurs. Ainsi est établie la notion de la somme de deux grandeurs et de leur produit effectué dans un ordre déterminé, s'il n'est pas commutatif. La valeur de la théorie relativement

à chaque ordre de grandeur dépendra du système des unités qu'on choisira et des lois de leur combinaison, qu'on devra établir de telle manière que les sommes et les produits de ces grandeurs aient une signification géométrique, cinématique ou mécanique.

Parmi les théories géométriques qui nous occupent, il y a la théorie d'Argand, de Warren et de Peacock sur les imaginaires en Géométrie plane; la très remarquable et très importante théorie des quaternions de Sir W.-R. Hamilton; les théories développées dans l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann (1841 et 1862); la théorie des biquaternions de Clifford, et l'extension récente de la théorie de Grassmann à l'espace non euclidien, extension due à Homersham-Cox. Ces diverses théories ont naturellement été développées, non pas en partant du point de vue d'où je viens de les considérer, mais des points de vue spéciaux de leurs auteurs.

Les symboles littéraux $x, y, \ldots$ employés par Boole dans ses *Laws of thought* (1854) pour représenter les choses comme objets de nos conceptions, sont des symboles qui obéissent aux lois du calcul algébrique (lois de distributivité, de commutativité et d'associativité), mais de plus ils sont tels qu'on a pour l'un quelconque d'entre eux, x par exemple, $x - x^2 = 0$, cette équation n'impliquant pas, comme dans l'Algèbre ordinaire, que x soit nul ou égal à 1. Dans la dernière Partie de l'Ouvrage de Boole sur la théorie des probabilités, on voit difficilement la signification précise des symboles employés; et la théorie remarquable qui y est développée me semble avoir été laissée dans l'oubli, sans qu'on l'ait suffisamment discutée. Dans un autre essai intitulé *On Propositions numerically definite,* le même auteur se place encore sur les confins de la logique et des mathématiques. Je ne puis ici parler des autres systèmes de logique mathématique; mais je mentionnerai l'*Algebra of Logic* (*American Journal of Math.*, t. III), où M. C.-S. Peirce établit une notation pour les *termes relatifs* qui se rattachent aux systèmes d'unités de l'algèbre associative linéaire.

On peut aussi rattacher à la logique l'*Abzählende Geometrie* de Schubert (1878). Mais c'est une théorie essentiellement mathématique et de la plus grande importance. Elle traite ce problème général: combien y a-t-il de courbes ou de figures d'espèce donnée qui satisfassent à certaines conditions? Par exemple, combien y a-t-il de coniques tangentes à quatre coniques données? Ces sortes

de questions, restreintes aux coniques, ont été étudiées d'abord par Chasles, à qui on doit la belle théorie des caractéristiques μ et ν des coniques satisfaisant à quatre conditions. MM. Maillard et Zeuthen se sont occupés des mêmes questions relativement aux cubiques ou aux quartiques. Enfin l'Ouvrage de Schubert présente un corps de doctrine très étendu. Il faut remarquer que les symboles de Schubert sont primitivement, non pas des nombres, mais des symboles purement logiques : par exemple, la lettre g exprime la condition qu'une ligne doit couper une ligne donnée; g^2 exprime qu'elle doit couper deux lignes données, et ainsi du reste. Puis l'auteur combine ces symboles conformément aux lois du calcul algébrique; mais ils n'acquièrent un sens numérique que quand le nombre des conditions devient égal au nombre des paramètres qui déterminent la figure considérée.

Dans tout ce que je viens de dire des théories en dehors des Mathématiques ordinaires, je n'ai eu en vue que l'immense extension des Mathématiques actuelles. Pour conclure, je constate que les Mathématiques ont constamment progressé depuis les géomètres grecs. Rien ne s'est perdu, rien n'a périclité. Les chefs-d'œuvre d'Euclide, d'Archimède et d'Apollonius sont aussi admirables aujourd'hui qu'ils l'étaient du temps de leurs auteurs. La méthode des coordonnées de Descartes est une acquisition définitive. Mais jamais les Mathématiques n'ont été cultivées avec plus de zèle et d'ardeur, ni avec plus de succès que dans ce siècle et que dans sa seconde moitié, c'est-à-dire de nos jours. D'immenses progrès ont été réalisés; devant nous s'ouvre un champ illimité, et l'avenir est plein de promesses. Nous pouvons en toute confiance appliquer à notre science les vers du poète :

Yet I doubt not through the ages one increasing purpose runs,
And the thoughts of men are widened with the process of the suns [1].

---

[1] Je ne doute pas qu'à travers les âges s'accomplisse un dessein de progrès,
Et que les pensées des hommes grandissent avec le cours des soleils.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

FRENET (F.), Professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Lyon. — RECUEIL D'EXERCICES SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL. 4e édit., 1 vol. in-8°, XIV-458 p. Paris, Gauthier-Villars; 1882.

Il y a quelque temps qu'a été publiée la quatrième édition de ce Recueil qui, depuis bientôt trente ans, rend de si importants services à l'enseignement de l'Analyse infinitésimale en France et même à l'étranger, où il a pris rang parmi les Ouvrages classiques. Cependant les Ouvrages de cette nature, si rares chez nous, sont extrêmement nombreux en Angleterre et en Allemagne; mais aucun ne présente, comme celui-ci, une suite complète, continue et graduée d'applications, depuis les exercices de pur calcul, différentiation et intégration des fonctions explicites, intégration des équations différentielles, jusqu'aux applications les plus délicates de l'Analyse à la Géométrie. L'étude des courbes dans l'espace a particulièrement suggéré à l'auteur des applications intéressantes et nombreuses des formules si élégantes et si simples qu'il a depuis longtemps découvertes sur la double courbure des lignes.

Quant aux sujets des exercices de Géométrie plane, beaucoup sont empruntés à la plupart des courbes célèbres; et, pour plusieurs, la réunion, facilitée par des renvois et une Table analytique, des articles où sont établies les diverses propriétés de chacune, en constitue une étude parfois très complète.

Enfin les renseignements historiques et les compléments théoriques qui s'y trouvent intercalés font de ce Recueil un Ouvrage considérable et unique.

Chacune de ses éditions successives lui a d'ailleurs apporté quelque perfectionnement. Celle-ci se distingue surtout de la troisième par un notable accroissement du nombre des exercices. Signalons particulièrement toute une série nouvelle relative à l'intégration des équations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. D'ailleurs les anciennes questions ont été soigneusement revues, et plusieurs ont reçu des développements utiles ou d'heureuses modifications. Enfin l'Ouvrage est complété par la Table analytique déjà mentionnée, dont le but est de favoriser les

recherches et de permettre le rapprochement des divers passages qui se rattachent à un même sujet. En la parcourant, les personnes qui ont fait usage de la troisième édition apprécieront la variété et l'intérêt des questions nouvelles dont le Recueil se trouve enrichi.

Cette édition est donc nettement supérieure à la précédente, mais ce n'est pas la dernière, et nous pensons que la prochaine devra encore être augmentée.

Lors de la première apparition de ce Recueil, en 1856, il renfermait des applications de théories non contenues dans les programmes d'alors. Mais le temps a marché, les programmes se sont étendus, et ces théories, avec d'autres encore, sont devenues obligatoires. A leur tour, elles exigent de nouveaux exercices sur les propriétés des fonctions d'une variable imaginaire et leurs développements, sur l'intégration entre des limites imaginaires, sur la réduction aux intégrales elliptiques, sur les fonctions elliptiques et les fonctions θ, etc., etc., toutes choses qui font maintenant partie de l'enseignement classique.

C'est donc un perfectionnement tout indiqué pour une prochaine édition. J. Collet.

CESÁRO (E.). — Sur diverses questions d'Arithmétique. 1 vol. in-8, 352 p. Bruxelles; 1883.

Le Volume publié par M. Cesáro contient vingt Notes se rapportant à des sujets analogues que l'auteur traite par des méthodes uniformes, des extraits de Lettres adressées à M. Catalan, à M. Hermite, et quelques Notes supplémentaires dont les unes permettent d'éclaircir ou d'étendre quelques propositions antérieurement démontrées, dont les autres se rapportent à divers points d'analyse. C'est surtout des vingt premières Notes que nous nous occuperons.

Elles sont toutes d'un caractère très élémentaire, bien que quelques-unes touchent aux parties les plus élevées de l'Arithmétique; l'auteur y établit un certain nombre d'identités, habituellement faciles à démontrer, et montre, par des applications nombreuses, la fécondité de ces identités; il rencontre ainsi un nombre considérable de formules : les unes sont nouvelles, les

autres déjà connues; parmi ces dernières, plusieurs avaient été données par M. Liouville, le plus souvent sans démonstration. M. Cesáro applique ensuite ses formules et ses méthodes à la détermination des fonctions asymptotiques de diverses fonctions numériques.

Nous signalons dans ce qui suit un certain nombre des identités que considère M. Cesáro.

Soit n un entier positif, et soit $q_p = \left[\frac{n}{p}\right]$ le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{p}$, p étant aussi un entier positif; $f(x)$ étant une fonction quelconque de l'entier positif x, soit

$$F(x) = f(1) + f(2) + \ldots + f(x),$$

on aura

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &F(q_1) + F(q_2) + \ldots + F(q_n) \\ &\quad = q_1 f(1) + q_2 f(2) + \ldots + q_n f(n). \end{aligned} \right.$$

Soient a', b', c', ... les diviseurs de l'entier x et $f(x)$, $g(x)$ des fonctions quelconques de x; si l'on pose

$$F(x) = f(a') + f(b') + f(c') + \ldots,$$
$$G(x) = g(a') + g(b') + g(c') + \ldots,$$

on aura

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &G(a) f\left(\frac{n}{a}\right) + G(b) f\left(\frac{n}{b}\right) + G(c) f\left(\frac{n}{c}\right) + \ldots \\ &\quad = F(a) g\left(\frac{n}{a}\right) + F(b) g\left(\frac{n}{b}\right) + G(c) f\left(\frac{n}{c}\right) + \ldots, \end{aligned} \right.$$

a, b, c, ... étant les diviseurs de l'entier n. M. Cesáro donne de nombreuses applications de cette identité, en mettant à la place des fonctions f et g diverses fonctions numériques, la fonction $\varphi(x)$ qui indique le nombre de nombres premiers à x et non supérieurs, la fonction $\theta(x)$ qui indique le nombre des diviseurs de x, la fonction $\int x$ qui exprime la somme des diviseurs de x, la fonction $\lambda(x)$ égale à $+1$ ou à -1, suivant que le nombre de facteurs premiers qui entrent dans x est pair ou impair, la fonction $\tau(x)$ qui indique le nombre des diviseurs premiers de x, la fonction $\omega(x)$ qui exprime le nombre de manières dont on peut décomposer x en un produit de deux facteurs premiers entre eux, la fonction $\mu(x)$ considérée par M. Mertens et qui est égale à 0

si x admet des diviseurs carrés autres que 1, à $+1$ ou à -1 suivant que x est composé d'un nombre pair ou impair de facteurs premiers inégaux, la fonction $\pi(x)$ qui représente le produit de tous les facteurs premiers qui entrent dans x, affectés du signe —.

Remarquons encore que l'identité (2) subsiste si l'on prend pour $F(x)$ et $G(x)$ deux fonctions plus générales que celles qui ont été considérées, savoir

$$F(x) = \psi(a') f\left(\frac{x}{a'}\right) + \psi(b') f\left(\frac{x}{b'}\right) + \ldots,$$

$$G(x) = \psi(a') g\left(\frac{x}{a'}\right) + \psi(b') g\left(\frac{x}{b'}\right) + \ldots,$$

les quantités x, a', b', c', ... conservant le même sens que précédemment.

En conservant aux quantités $F(x)$ et $G(x)$ la signification plus particulière qui a été d'abord expliquée, l'identité (2) conduit à l'égalité

$$(3) \qquad \sum \frac{g(n)}{n^m} \sum \frac{F(n)}{n^m} = \sum \frac{G(n)}{n^m} \sum \frac{f(n)}{n^m},$$

les sommations étant relatives à la lettre n et s'étendant depuis $n = 1$ jusqu'à $n = \infty$.

Les séries, bien entendu, sont supposées convergentes.

Chacun des deux membres de l'identité (3) est égal à

$$\sum \frac{H(n)}{n^m},$$

en faisant

$$H(n) = f(a) G\left(\frac{n}{a}\right) + f(b) G\left(\frac{n}{b}\right) + \ldots,$$

où a, b, ... sont tous les diviseurs de n. Cette identité contient une proposition due à Liouville, et qui s'exprime par l'égalité

$$\sum \frac{\varphi(n)}{n^m} = \frac{S_{m-1}}{S_m},$$

où

$$S_m = \frac{1}{1^m} = \frac{1}{2^m} + \ldots.$$

M. Cesàro montre de même que l'on a

$$\sum \frac{fn}{n^m} + S_m S_{m-1},$$

et donne un très grand nombre de formules analogues, où figurent, entre autres, les diverses fonctions numériques que l'on a énumérées un peu plus haut; signalons celle-ci, en particulier,

$$\sum \frac{1}{p^m} = \frac{1}{S_m} \sum \frac{\tau(n)}{n^m},$$

où, dans le premier membre, on doit mettre à la place de p les divers nombres premiers.

En désignant par (x, y) le plus grand commun diviseur de x et y, par $\psi(m)$ une fonction quelconque de l'entier m, posons

$$F(a) = \psi\left(\frac{n\alpha}{a}\right) + \psi\left(\frac{n\beta}{a}\right) + \ldots,$$

où a est un diviseur quelconque de n et où α, β, ... sont les nombres premiers à a et non supérieurs à a; appelons $a, b, c, \ldots$ tous les diviseurs de n; on aura

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\psi(1)f(n,1) + \psi(2)f(n,2) + \ldots + \psi(n)f(n,n) \\ &\quad = F(a)f\left(\frac{n}{a}\right) + F(b)f\left(\frac{n}{b}\right) + F(c)f\left(\frac{n}{c}\right) + \ldots. \end{aligned} \right.$$

En désignant par α, β, γ, ... les $\varphi(n)$ nombres premiers à n et non supérieurs à n, et en posant

$$F(x) = f(a) + f(b) + f(c) + \ldots,$$
$$G(p) = g(p\alpha) + g(p\beta)) + g(p\gamma) + \ldots,$$

où l'on suppose, pour la première égalité, que a, b, c, ... sont tous les diviseurs de x et, pour la seconde, que p est un des nombres α, β, γ, ..., on aura

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &g(\alpha)F(\alpha) + g(\beta)F(\beta) + g(\gamma)F(\gamma) + \ldots \\ &\quad = G(\alpha)f(\alpha) + G(\beta)f(\beta) + G(\gamma)f(\gamma) + \ldots. \end{aligned} \right.$$

L'identité (4), par exemple, fournit les suivantes :

$$\frac{\pi(a)\varphi(a)}{a^2} + \frac{\pi(b)\varphi(b)}{b^2} + \ldots = \frac{1}{n},$$

$$a^m \varphi_m\left(\frac{n}{a}\right) + b^m \varphi_m\left(\frac{n}{b}\right) + \ldots = 1^m + 2^m + \ldots + n^m.$$

Dans ces deux égalités, a, b, c, ... sont les diviseurs de n, $\pi(x)$ est une fonction définie ci-dessus, $\varphi_m(x)$ est la somme des $m^{\text{ièmes}}$

puissances des nombres premiers à x et non supérieurs à x. La seconde de ces identités est due à M. Liouville.

L'identité (1) est susceptible d'une importante généralisation : laissons les fonctions $g(x)$ et $f(x)$ arbitraires et soient toujours

$$G(x) = \sum_1^x g(x), \quad F(x) = \sum_1^x f(x);$$

supposons que de l'inégalité $y \gtreqless \psi(x)$ on puisse tirer $x \gtreqless \psi'(y)$ et désignons, pour abréger, par q_p et q'_q les plus grands entiers contenus dans $\psi(p)$ et $\psi'(p)$; on aura

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} & g(1)F(q_1) + g(2)F(q_2) + g(3)F(q_3) + \ldots \\ & \quad = f(1)G(q_1) + f(2)G(q_2) + f(3)G(q_3) + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Par exemple, si a, b, n sont trois entiers positifs quelconques, l'inégalité

$$y \gtreqless \frac{n - bx}{a}$$

entraîne

$$\lambda \gtreqless \frac{n - ay}{b},$$

et l'inégalité (6) donne, comme cas très particulier, l'élégante relation

$$\left[\frac{n-b}{a}\right] + \left[\frac{n-2b}{a}\right] + \left[\frac{n-3b}{a}\right] + \ldots$$
$$= \left[\frac{n-a}{b}\right] + \left[\frac{n-2a}{b}\right] + \left[\frac{n-3a}{b}\right] + \ldots,$$

signalée à M. Cesáro par M. Hermite.

Les huit dernières Notes sont consacrées, en général, à la recherche d'expressions asymptotiques de diverses fonctions numériques ou, suivant le langage de l'auteur, à la recherche de valeurs moyennes. Le point de départ de ces recherches a été l'étude d'un certain nombre de théorèmes contenus dans un Mémoire *Sur quelques applications de la fonction gamma à la théorie des nombres,* présenté par M. A. Berger à la Société des Sciences d'Upsal en avril 1880, et dont M. Catalan a publié quelques extraits dans la *Nouvelle Correspondance mathématique,* sous ce titre : *Théorèmes extraordinaires*. La marche suivie par M. Ce-

sáro lui a permis de retrouver plusieurs des théorèmes de M. Berger et d'autres propositions beaucoup plus générales.

Si l'expression

$$\frac{\psi(1)+\psi(2)+\ldots+\psi(n)}{n}$$

tend, lorsque n augmente indéfiniment, vers une limite finie, M. Cesáro appelle cette limite *valeur moyenne* de la fonction $\psi(N)$; plus généralement, si les deux fonctions

$$\frac{\psi(1)+\psi(2)+\ldots+\psi(n)}{\psi(n)},\quad \frac{\psi'(1)+\psi'(2)+\ldots+\psi'(n)}{\psi'(n)}$$

tendent vers une même limite finie, il dit que la fonction $\psi(N)$ est égale, en moyenne, à la fonction $\psi'(N)$.

Ces définitions admises, si, $f(x)$ étant une fonction quelconque de l'entier x dont les diviseurs sont a, b, c, ..., on fait

$$\psi(x)=f(a)+f(b)+f(c)+\ldots,$$

M. Cesáro montre, en partant de l'égalité

$$\psi(1)+\psi(2)+\ldots+\psi(n)=q_1f(1)+q_2f(2)+\ldots+q_nf(n),$$

que, si la série

$$f(1)+\tfrac{1}{2}f(2)+\tfrac{1}{3}f(3)+\ldots$$

est convergente et si

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}[f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)]=0,$$

la fonction $\psi(N)$ est égale, en moyenne, à

$$f(1)+\tfrac{1}{2}f(2)+\tfrac{1}{3}f(3)+\ldots.$$

Par exemple, la somme des inverses des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des diviseurs d'un nombre est égale, en moyenne, à la somme de la série

$$1+\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{3^{m+1}}+\ldots.$$

Ce théorème, dans le cas de $m=2$, avait été signalé par M. Berger.

La différence entre le nombre des diviseurs impairs et le nombre des diviseurs pairs d'un nombre entier est égale, en moyenne, au logarithme népérien de 2, ...

Par une voie un peu différente, l'auteur arrive à cette proposition :

La somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des diviseurs d'un nombre N *est égale, en moyenne, à la $m^{\text{ième}}$ puissance de ce nombre, multipliée par la somme de la série*

$$1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} + \ldots.$$

En se servant toujours des mêmes identités, M. Cesáro parvient aux valeurs moyennes des fonctions $\omega(N)$, $\varphi(N)$, $\theta(N)$ que Dirichlet avait déjà données; il discute avec détail la solution, donnée dans le *Bulletin* par M. Perott, du problème relatif à la valeur moyenne de $\varphi(N)$, ainsi que celle qui est due à M. Mertens.

Signalons encore les résultats suivants :

$$\lim \frac{\varphi_m(1) + \varphi_m(2) + \ldots + \varphi_m(n)}{n} = \frac{1}{(m+1)(m+2)} \frac{6}{\pi^2},$$

$$\lim \frac{\psi_m(1) + \psi_m(2) + \ldots + \psi_m(n)}{n} = \frac{1}{2m+1} \frac{1}{1.2\ldots m} \left(\frac{3}{\pi^2}\right)^m,$$

relatifs à la fonction $\varphi_m(x)$ antérieurement définie et à la fonction $\psi_m(x)$ qui représente la somme des produits m à m des nombres premiers à x et non supérieurs à x, la recherche de la valeur moyenne du nombre des restes obtenus en divisant n par les nombres 1, 2, ..., n qui sont inférieurs à la moitié du diviseur correspondant, la recherche de la valeur moyenne du nombre de solutions, entières et positives, de l'équation

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = n,$$

dans laquelle on suppose A, C positifs et $4AC - B^2 = \delta^2$, valeur moyenne que M. Cesáro trouve égale à

$$\frac{\pi}{2\delta} - \frac{B}{\delta^2} - \ldots.$$

La dernière Note est consacrée à l'analyse critique d'un Mé-

moire de M. Mertens : *Ueber Vertheilung der Primzahlen* (*Journal de Borchardt*, 1878). C'est d'ailleurs un sujet sur lequel M. Cesáro a l'intention de revenir dans un nouveau travail.

Les deux lettres à M. Catalan, qui suivent les Notes, s'analyseraient difficilement : écrites avec un abandon qui n'est pas sans agrément, elles contiennent beaucoup d'idées qui semblent ingénieuses et dont M. Cesáro saura sans doute tirer parti, mais qui ne sont pas encore arrivées à une forme définitive.

Dans la Lettre à M. Hermite, dont nous avons déjà dit quelques mots, M. Cesáro établit ce résultat :

L'équation $ax + by = n$, où a, b, n sont des nombres positifs dont les deux premiers sont premiers entre eux, admet un nombre de solutions entières et positives égales à $\left[\frac{n}{ab}\right] + 1$, ou à $\left[\frac{n}{ab}\right]$, suivant que le reste de la division de n par ab a, ou non, la forme $a\beta + b\alpha$, α et β étant des entiers positifs.

Diverses autres Notes sont consacrées à la démonstration et à la généralisation de plusieurs théorèmes dus à M. Catalan, à l'établissement de la formule de Thacker, à l'étude de quelques fonctions numériques. Enfin le volume de M. Cesáro contient encore une Note d'Analyse relative aux fonctions $\Gamma(x)$ et $\frac{d \log \Gamma(1+x)}{dx}$, où l'on trouvera une démonstration élémentaire de la formule de Stirling, et se termine par un rapport élogieux de M. Catalan, lu à la Société royale des Sciences de Liège, dans la séance du 2 mai 1882. J. T.

MÉLANGES.

ASSOCIATION FRANÇAISE POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES.

SESSION DE ROUEN.

Ire ET IIe SECTIONS. — MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIE, GÉODÉSIE ET MÉCANIQUE.

Président..... M. Édouard COLLIGNON, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

Vice-Président..... M. Eugène CATALAN, Professeur à l'Université de Liège.

Secrétaires..... { M. GOHIERRE DE LONGCHAMPS. M. WEST.

Séance du 17 août 1883.

M. Édouard Lucas, professeur au Lycée Saint-Louis : *Sur l'arithmétique figurative.* — M. Lucas se propose de montrer l'emploi qu'on peut faire de l'échiquier dans la théorie des permutations. Si l'on numérote les colonnes d'un échiquier carré de gauche à droite, et ses lignes de bas en haut, chaque case sera déterminée par deux coordonnées x, y pouvant avoir les valeurs de $1, 2, \ldots, n$.

Un système de n jetons placés sur un échiquier de n^2 cases, de telle sorte qu'il n'y en ait pas deux sur la même ligne ou sur la même colonne, constitue une *permutation figurée* (en même temps qu'il donne une solution du *problème des tours*). Si l'on considère, en effet, les jetons placés sur les colonnes successives, la suite formée par leurs coordonnées présentera précisément une permutation des n indices $1, 2, \ldots, n$.

M. Lucas détermine successivement le nombre des permutations figurées qui sont symétriques soit par rapport au centre de l'échiquier, soit par rapport à une des diagonales, soit par rapport aux deux diagonales, puis le nombre des permutations figurées qui coïncident avec elles-mêmes lorsqu'on fait tourner l'échiquier d'un quart de tour autour de son centre.

On doit à M. Neuberg (*Mathesis*, t. I, p. 27) deux formules

symboliques relatives au nombre Q^n des permutations figurées, n'ayant aucun élément sur une des diagonales, relatives à un échiquier à n^2 cases. Si l'on désigne par P^n le nombre $n!$, ces deux formules sont

$$P^n = (Q+1)^n \quad \text{et} \quad Q^n = (P-1)^n.$$

M. Lucas établit maintenant des formules analogues pour le nombre des permutations figurées qui présentent diverses espèces de symétrie et qui n'ont aucun élément sur l'une des diagonales.

Il examine enfin le *problème des fous,* lequel consiste à placer sur un échiquier un nombre maximum de jetons, de telle sorte que deux quelconques d'entre eux ne se trouvent point sur une même parallèle aux diagonales, et fait voir que, pour un échiquier à n^2 cases, le nombre maximum de jetons est $2n-2$, tandis que le nombre total des solutions du problème est égal à 2^n.

M. de Longchamps, professeur au Lycée Charlemagne : *Sur les nombres pseudo-bernoulliens et ultra-bernoulliens.*

M. E. Catalan, professeur à l'Université de Liège, donne lecture d'une série de *Notes d'Algèbre et d'Arithmétique.*

I. Sur la résolution en nombres entiers de l'équation

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

II, III. Sur la série récurrente définie par

$$P_1 = 1, \quad P_2 = 2a, \quad \ldots \quad P_n = 2aP_{n-1} - P_{n-2},$$

a désignant un nombre entier, tel que $a^2 = 2b^2 + 1$. La valeur de P_n est

$$P_n = \frac{1}{2b\sqrt{2}}\left[(a+b\sqrt{2})^n - (a-b\sqrt{2})^n\right].$$

Maintenant, si l'on fait

$$Q_n = \tfrac{1}{2}\left[(a+b\sqrt{2})^n + (a-b\sqrt{2})^n\right],$$

l'équation $2x^2 = y^2 - 1$ est vérifiée en posant $x = bP_n$, $y = Q_n$.

Deux nombres consécutifs P_n, P_{n+1} sont toujours premiers entre eux. Si n est pair, P_n est divisible par $P_2 = 2a$. Plus généralement, P_{kl} est divisible par P_k et P_l.

IV. Sur la décomposition de $(a^2+b^2)(a^4+b^4)\ldots(a^{2^n}+b^{2^n})$ en deux carrés.

V. Si a et b désignent des nombres entiers et que l'on pose

$$\alpha = a + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \beta = a - \sqrt{a^2 + b^2},$$

la quantité

$$\frac{\alpha^{2m-1} + \beta^{2m-1}}{\alpha + \beta}$$

est : 1° la somme de deux carrés ; 2° la somme de trois carrés.

VI. Si $x = p$, $y = q$ sont les nombres les *plus simples* satisfaisant à l'équation

$$Ax^2 = y^2 + 1,$$

où $A = a^2 + b^2$, cette équation sera aussi vérifiée par

$$x_n = \frac{(p\sqrt{A} + q)^{2n-1} + (p\sqrt{A} - q)^{2n-1}}{2\sqrt{A}}.$$

M. G. Leveau, astronome adjoint à l'Observatoire de Paris, donne lecture d'un *Mémoire sur les comètes périodiques et particulièrement sur la comète de d'Arrest.*

M. Édouard Collignon : *Sur la chaînette d'égale résistance.* — Dans la chaînette ordinaire, qui est la figure d'équilibre d'un fil homogène pesant, la tension varie d'un point à l'autre de la courbe. M. Collignon se propose de chercher la forme d'équilibre d'un fil à section variable dans lequel la tension par unité de surface serait constante ($= R$) en tous les points.

Si l'on admet pour axe des x la tangente au point le plus bas de la courbe et pour axe des y la normale de la courbe au même point, on trouve que l'abscisse d'un point de cette courbe est proportionnelle à l'angle formé entre la tangente correspondant à la courbe et l'axe des x. L'équation de la courbe est donc de la forme

$$\cos\frac{x}{a} = e^{-\frac{y}{a}}.$$

Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des y et admet pour asymptotes une série de droites équidistantes, parallèles à cet axe. Du reste, la courbe complète est composée d'une infinité de branches égales, situées du côté des y positifs, comprises entre des valeurs de x égales à $\frac{(4n-1)\pi a}{2}$ et $\frac{(4n+1)\pi a}{2}$, et séparées les

unes des autres par des intervalles égaux compris entre les parallèles $x = \frac{(4n+1)\pi a}{2}$ et $x = \frac{(4n-3)\pi a}{2}$.

M. Collignon examine ensuite les propriétés principales de cette courbe, relatives à son arc, son rayon de courbure, son aire, etc.

Si l'on suppose que la section transversale du fil considéré soit un cercle de rayon r très petit, et que l'on désigne par R la tension constante par unité de surface, on aura pour la tension totale

$$T = \pi r^2 R \quad \text{ou bien} \quad T = \frac{\pi r_0^2 R}{\cos\frac{x}{a}},$$

r_0 désignant la valeur de r correspondant au point le plus bas de la courbe. Si l'on représente maintenant la tension T par le poids d'un fil de même rayon que la chaînette au point considéré et de même poids spécifique, la longueur de ce fil devra être constante et égale à a.

De même qu'en prenant le symétrique d'un polygone funiculaire par rapport à un plan horizontal on obtient, d'après Gregory, une *voûte sans frottement,* de même, en renversant la *chaînette d'égale résistance,* on obtient la *voûte sans surcharge* proposée par M. Yvon Villarceau.

M. le colonel Perrier, membre de l'Institut : *Sur le passage de Vénus sur le Soleil.*

Séance du 18 août.

M. Desboves : *Sur la résolution complète en nombres entiers de l'équation biquadratique* $8x^4 - 3y^4 = 5z^2$.

M. Emile Lemoine, ancien élève de l'École Polytechnique : *Sur les nombres considérés en leurs relations avec les nombres formés des mêmes chiffres écrits en sens inverse.*

Soient deux nombres entiers K et K′, qu'on peut supposer avoir un nombre égal de chiffres (puisque autrement on pourrait faire précéder le plus petit d'entre eux par un certain nombre de zéros) et désignons par k et k' les nombres formés avec les chiffres de K et K′ écrits dans l'ordre inverse. M. Lemoine demande quand on peut avoir $K + K' = k + k'$, et démontre que, dans le cas

où K et K′ sont d'un nombre pair de chiffres, il faut et il suffit que les chiffres de $p^{\text{ième}}$ ordre de K et K′ aient la même somme que les chiffres du même ordre de k et k', tandis que, dans le cas où le nombre de chiffres de K et K′ est impair, il faut de plus que les chiffres de milieu de K et K′ soient les mêmes.

Le même : *Sur les quatre groupes de deux points du plan d'un triangle qui sont à la fois les foyers d'une conique inscrite et d'une conique circonscrite à ce triangle.*

Les quatre solutions de ce problème correspondent aux quatre cercles qui touchent les côtés du triangle ABC considéré. Ainsi les droites qui joignent les points A, B, C au centre d'un de ces quatre cercles constituent les normales à une conique circonscrite au triangle ABC et homofocale à une conique inscrite dans le même triangle. Cette dernière conique touche les côtés de ABC à des points où ces côtés sont touchés respectivement par trois autres des cercles considérés. Le centre des médianes antiparallèles du triangle formé par les centres de ces trois cercles est le centre des deux coniques homofocales correspondantes.

M. Leveau : *Théorie de Vesta par la méthode de Hansen.*

M. Lechalas : *De l'emploi de l'hypothèse dans les Sciences mathématiques.*

Séance de l'après-midi.

M. Collignon présente un travail de M. *Jung*, professeur à l'Institut technique supérieur de Milan, intitulé : *Sur les systèmes de points qui n'ont point de barycentre.*

M. Jung considère un système de n points pesants n'ayant point de barycentre (c'est-à-dire un système tel que, si l'on applique à ses points des forces parallèles, proportionnelles à leurs masses, ces forces se font équilibre, quelle que soit leur direction) et démontre que *les surfaces centrales d'inertie de tous les groupes de $n - 1$ points appartenant au système sont des surfaces homothétiques de second ordre.* M. Jung ajoute une extension de cette proposition, due à M. Reye, et consistant en ce que *les surfaces centrales de tous les systèmes qu'on peut former en ajoutant au système considéré un point pesant quelconque sont des surfaces homothétiques de second ordre.*

M. Collignon fait ensuite une Communication *sur quelques problèmes sur le mouvement relatif*. Le premier problème traité par M. Collignon est celui-ci :

On suppose qu'un point matériel M, *de masse égale à l'unité, soit attiré vers deux points* O *et* L *proportionnellement aux masses de ces points et aux distances* MO, ML. *Des deux points attirants, l'un* O *est supposé fixe; l'autre* L *est animé d'un mouvement uniforme de rotation autour du premier (le plan* OML *restant toujours fixe). On donne la vitesse angulaire n du rayon* OL *autour du point* O. *On demande le mouvement du point* M *par rapport à deux axes rectangulaires* OX, OY, *dont l'un coïncide avec la droite* OL.

La solution complète de ce problème se ramène, dans le cas général, à la résolution d'une équation différentielle linéaire du quatrième ordre à coefficients constants. Pourtant, dans le cas où $n^2 = k^2 + k'^2$ (k^2 et k'^2 étant les attractions exercées par les centres O et M sur le point M, supposé à l'unité de distance de ces centres), le problème dépend d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Dans ce cas, le mouvement absolu peut être considéré comme le résultat de la composition de trois mouvements élémentaires : 1° un mouvement circulaire uniforme de M autour d'un certain point mobile I; 2° un mouvement de translation uniforme du système IM parallèlement à l'axe OY; 3° un mouvement de rotation uniforme des axes OX, OY autour du centre fixe O.

M. Collignon considère en second lieu le mouvement d'un point matériel attiré d'un côté par le globe terrestre, supposé en O, et d'autre part par la Lune, supposée en L, en tenant compte du mouvement que la Lune possède autour de la Terre. Vu les difficultés de ce problème, pris dans toute sa généralité, M. Collignon en restreint un peu l'étendue, de manière à rendre applicables les méthodes d'approximation et les procédés graphiques; aussi suppose-t-il tout d'abord : 1° que l'on fasse abstraction de la résistance de l'air; 2° que le point de départ du mobile soit pris dans le plan même de l'orbite terrestre, au point pour lequel la Lune occupe le zénith, et qu'il soit lancé de manière à ne pas sortir du plan de l'orbite pendant le trajet; 3° que la Lune occupe en ce moment la

région apogée de son orbite et enfin qu'elle soit à cette époque en son premier ou en son dernier quartier.

Le problème se ramène de cette manière à la résolution des deux équations différentielles simultanées

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{fmx}{z^3} + \frac{fm'(R-x)}{z'^3} + n^2x + 2n\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{fmy}{z^3} - \frac{fm'y}{z'^3} + n^2y - 2n\frac{dx}{dt},$$

où $\frac{fm}{z^2}$ et $\frac{fm'}{z'^2}$, $(z = \sqrt{x^2+y^2},\ z' = \sqrt{(R-x)^2+y^2})$ représentent les attractions exercées par O et L sur le point M.

Pour simplifier le problème d'intégration, M. Collignon suppose que y ait une valeur absolue très petite, c'est-à-dire que le mouvement du mobile M s'opère aux environs de la droite OL. De cette manière il substitue aux équations précédentes celles-ci :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{fm}{x^2} + \frac{fm'}{(R-x)^2} + n^2x + 2n\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2n\frac{dx}{dt},$$

dont l'intégration s'effectue au moyen de quadratures.

M. Collignon cherche ensuite à déterminer les constantes introduites par l'intégration de manière que le projectile puisse atteindre la Lune.

M. Édouard Lucas : *Sur le problème du cavalier aux échecs.*

M. Stéphanos : *Sur la décomposition d'une fonction rationnelle en fonctions simples.*

M. Gohierre de Longchamps présente et analyse un Mémoire de M. *Schoute,* professeur à l'Université de Groningue, *sur deux transformations géométriques uniformes.*

M. Schoute étudie dans ce travail deux transformations uniformes (birationnelles) dans le plan, auxquelles il a été conduit en généralisant des résultats dus à M. Le Paige.

La première transformation consiste dans la correspondance involutive établie sur les diverses droites issues d'un point P, par les courbes C_n de degré n passant $n-2$ fois par le point P et une fois par chacun de $4(n-1)$ autres points Q (appartenant par con-

séquent à un faisceau). Par cette correspondance une droite quelconque est transformée en une courbe d'ordre $2n-1$ ayant le point P pour point $2(n-1)^{\text{uple}}$ et les points Q pour points simples. M. Schoute généralise encore ce mode de transformation en remplaçant le faisceau de droites issues de P par un faisceau de courbes C_m d'ordre m, dont une quelconque a la propriété de ne rencontrer chacune des courbes C_n du premier faisceau qu'en deux points. C'est la correspondance entre deux pareils points qu'il considère.

La seconde transformation étudiée par M. Schoute est obtenue en généralisant une transformation plane, due à M. Le Paige, et qui consiste dans la correspondance involutive établie par les droites d issues d'un point fixe P par les cubiques appartenant à un réseau qui passent par le point d'intersection de la droite d avec une droite fixe L.

M. Schoute remplace d'une part le réseau de cubiques par un système linéaire de courbes C_n, d'ordre n, et d'autre part il substitue à la droite L une courbe C_p, d'ordre quelconque $p \leqq n-2$. Les courbes C_n doivent former un système linéaire à $p+1$ paramètres et admettre le point P pour point $(n-p-2)^{\text{ple}}$. La transformation étudiée par M. Schoute consiste ainsi dans la correspondance involutive établie sur les droites issues de P par les courbes C_n qui passent par les p points de rencontre de la droite d avec la courbe C_p.

M. Vaněček, professeur à Firin (Bohême) : *Explications relatives à la transformation par rayons vecteurs réciproques* (communiqué par M. G. de Longchamps).

M. Vaněček trouve que, dans l'exposition des propriétés de la transformation par rayons vecteurs réciproques, certains auteurs tombent dans des inexactitudes qu'il se propose de relever dans cette Communication. Les inexactitudes en question seraient relatives à la manière dont on doit envisager la transformation des courbes passant par un ou par plusieurs points fondamentaux de l'inversion (centre d'inversion et points à l'infini sur le cercle d'inversion). Par exemple, on dit ordinairement qu'un cercle se transforme en un autre cercle, tandis qu'en vérité un cercle se transforme en une courbe du quatrième ordre composée d'un cercle et des deux asymptotes du cercle d'inversion.

Remarques analogues pour le cas de la transformation dans l'espace. Par exemple, on ne doit point dire qu'un plan π se transforme en une sphère, mais qu'il se transforme en une surface du quatrième ordre composée d'une sphère et de deux plans touchant la sphère d'inversion aux points d'intersection du plan π avec le cercle à l'infini.

M. Vaněček : *Sur la transformation des figures polaires réciproques.* — M. Vaněček étudie les lieux décrits par le quatrième sommet d'un tétraèdre, conjugué par rapport à une surface du second ordre, lorsque les trois autres sommets sont assujettis à décrire des droites ou des plans convenables.

Il suppose d'abord que deux des sommets d'un tel tétraèdre doivent se trouver sur deux droites M, M′, polaires réciproques par rapport à la surface S^2. Alors, si un troisième sommet L de ce tétraèdre décrit une droite l, le quatrième sommet N décrit une cubique gauche passant par les points d'intersection de S^2 avec les trois droites M, M′ et l. D'autre part, si le point L doit se trouver sur un plan a, le point N décrit une surface du troisième ordre passant par le pôle du plan λ et par les deux droites M, M′.

M. Vaněček considère par la suite diverses autres combinaisons sous des conditions élémentaires auxquelles on peut assujettir trois des sommets du tétraèdre considéré, et examine en particulier les cas où les lieux décrits par le quatrième sommet se décomposent.

Séance du 20 août.

M. Mantel, de Delft : *Sur les combinaisons d'éléments dispersés dans un plan.* — M. Mantel se propose de montrer qu'il y a utilité à considérer les combinaisons d'éléments dispersés dans un plan d'une manière déterminée. Il présente d'abord deux exemples d'une pareille application relatifs l'un à la démonstration de la formule du binôme, l'autre aux formules qui donnent les sommes des puissances semblables des racines d'une équation. Il expose ensuite quelques considérations sur le problème des reines au jeu des échecs.

M. G. de Longchamps : *Sur les transformations unicursales et réciproques dans le plan,* c'est-à-dire sur les transformations des

formes du plan qui établissent des homographies involutives sur toutes les droites d'un faisceau.

M. Cyp. Stéphanos : *Sur un système remarquable de six positions d'une figure plane sur un plan.* — Étant données cinq positions arbitraires $F'_1, F''_2, \ldots, F^{v}_5$ d'une figure plane F, sur un plan π, il y a quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 de cette figure F dont les cinq positions correspondantes se trouvent sur des cercles. Le quadrangle formé par les centres B_1, B_2, B_3, B_4 de ce cercle et le quadrangle formé par les quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 ont la propriété que, de quelque manière qu'on les déplace séparément sur le plan π, leurs points correspondants A_i, B_i constituent quatre couples des points conjugués par rapport à un cercle. De plus, il arrive que la figure F peut prendre sur le plan π une sixième position F^{vi}, telle que les quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 de cette figure viennent à tomber sur les mêmes cercles que dans les cinq positions précédentes.

M. Genaille, ingénieur civil : *Sur une machine à calculer.*

M. Laisant : *Sur un système de figures semblables.* — M. Laisant résout par la méthode des équipollences le problème suivant : *Sur les côtés* A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 *d'un triangle* $A_1A_2A_3$, *on construit les triangles* $B_1A_2A_3$, $B_2A_3A_1$, $B_3A_1A_2$ *directement semblables, puis les triangles* $C_1A_2A_3$, $C_2A_3A_1$, $C_3A_1A_2$ *directement semblables, connaissant les points* B_1, B_2, B_3 *et les points* C_1, C_2, C_3 (tels que les centres de gravité des deux triangles $B_1B_2B_3$ et $C_1C_2C_3$ coïncident), *on propose de retrouver le triangle primitif.*

M. Laisant : *Remarque sur les intégrales définies.* — Démonstration et extension d'une formule donnée par M. Marchand (*Nouvelles Ann.*, p. 450; 1882).

M. Édouard Lucas : *Sur un Mémoire de Cauchy et sur les nombres de Bernoulli.*

Séance du 22 août.

Mme Clémence Royer : *Critique de l'hypothèse de Laplace et sur la détermination du plan de l'orbite solaire.*

M. Brocard, capitaine du génie à Montpellier : *Nouvelles pro-*

priétés du triangle (communiqué par M. Em. Lemoine). — M. Brocard se propose d'indiquer divers systèmes de points remarquables du plan d'un triangle situés en ligne droite. Plusieurs de ces points sont relatifs aux *cercles de sept points,* ou sont définis à l'aide du procédé bien connu de corespondance entre deux foyers d'une conique inscrite dans un triangle.

M. le général Parmentier : *Sur le problème des n reines aux échecs.* — M. Parmentier s'attache surtout à l'application d'une méthode due à M. de la Noë. Cette méthode a pour point de départ la décomposition de l'échiquier de n^2 cases en un carré central (formé d'une seule case ou de quatre cases suivant que n est impair ou non) et en une suite de bandes concentriques. On est ainsi conduit à une classification rationnelle des solutions du problème en question d'après le nombre des reines qui doivent se trouver sur les bandes successives. Si, en partant d'une solution du problème, on envisage les sept autres, distinctes en général de la première et entre elles, et qui s'en déduisent par rotation ou par symétrie, on remarque qu'elles appartiennent toutes à une même classe.

Pour $n = 6$ il n'y a que quatre solutions, qui sont toutes du type $4 - 2 - 0$ (4 reines sur la bande extérieure et 2 sur la bande moyenne) et peuvent se déduire toutes d'une solution primordiale. — Pour $n = 7$ il y a quarante solutions appartenant à quatre types différents ($4 - 1 - 2 - 0$, $3 - 3 - 1 - 0$, $4 - 2 - 0 - 1$, $4 - 2 - 1 - 0$) et se déduisant de six solutions primordiales.

M. Parmentier présente le tableau de toutes les solutions du problème pour les cas de $n = 6, 7, 8, 9$.

M. Genaille, ingénieur civil : *Graphique de la résistance des matériaux.*

M. Édouard Lucas : *Calendrier perpétuel.*

NOTES POUR L'HISTOIRE DES LIGNES ET SURFACES COURBES DANS L'ANTIQUITÉ [1];

PAR M. PAUL TANNERY.

VII.

LE CONCEPT DE COURBE.

Après la quadratrice d'Hippias, après la *spire* d'Archytas, nous avons encore une fois à revenir aux temps antérieurs à la découverte des coniques. Eudoxe de Cnide (408-355 av. J. C.), en effet, en dehors de l'*hippopède*, dont nous avons déjà parlé, s'est signalé par l'invention d'une courbe destinée à la solution du problème de Délos et qu'il appela du terme général de καμπύλη (infléchie).

Malheureusement Eutocius (*Archimède*, éd. Torelli, p. 135 et 144) n'a pas compris la solution d'Eudoxe qui subsistait encore de son temps, et, la trouvant erronée, ne nous l'a pas conservée. On est donc réduit, sur la nature de la *kampyle*, à des conjectures sans appui [2].

Je ne veux m'arrêter à ce terme de *kampyle* que pour en préciser l'historique. Il n'est pas douteux qu'Eudoxe ne l'ait détourné d'un sens général pour lui attribuer une signification toute particulière; mais cela laisse supposer que le sens général était relativement vague.

Toutefois, tandis qu'il serait difficile de rencontrer, antérieurement à Eudoxe, le mot καμπύλον dans le sens précis de *courbe* opposée à droit (εὐθύ) [3], immédiatement après lui, et peut-être à cause même de son adoption de ce terme, quoiqu'il l'eût pris dans un sens

---

(1) *Voir* les numéros d'octobre 1883 et de janvier 1884.

(2) J'ai supposé ailleurs (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 2e série, t. II, p. 277-283) qu'il s'agissait de l'une des projections des courbes gauches de la solution d'Archytas. Cette projection a pour équation polaire

$$\rho = \frac{b^2}{a\cos^2\varphi};$$

son intersection avec le cercle $\rho = a\cos\varphi$ donne pour le rayon vecteur une des deux moyennes proportionnelles entre a et b, $\rho^3 = ab^2$.

(3) Ainsi on ne le trouve pas dans Platon, qui oppose d'ordinaire la circonférence à la droite. Auparavant, Héraclite oppose le σκολιόν à l'εὐθύ.

particulier, la signification générale précise semble s'imposer. Elle est courante chez Aristote, qui donne d'ailleurs l'opposition *droit-courbe* (εὐθὺ-καμπύλον) comme une des dix que certains pythagoriciens de son temps regardaient comme fondamentales.

Si Euclide ne nous fournit aucune indication, Archimède oppose aussi aux droites les lignes καμπύλαι, à la vérité seulement dans un plan et en y comprenant les lignes brisées (*De sphæra et cylindro,* axiome I); son objet est d'ailleurs de définir la concavité.

Par un singulier retour, après Archimède, le sens général se perd au moins chez les mathématiciens, car il se retrouve naturellement chez les commentateurs d'Aristote ([1]). Mais le terme καμπύλη ne se trouve point chez Pappus, qui dit seulement en général γραμμή (ligne), et, si on le rencontre dans Proclus (*Geminus*), il s'y trouve opposé aux circonférences d'une part, aux lignes hélicoïdes de l'autre.

« Platon (*Philèbe,* 51, C.) ayant posé les deux espèces les plus simples et les plus primordiales de la ligne, la droite et la circulaire, fait provenir de leur mixtion toutes les autres, aussi bien toutes celles qu'on appelle *hélicoïdes* et qui sont planes ou bien s'engendrent autour des solides, que toutes les espèces de lignes *kampyles* qui proviennent des sections des solides. » (Éd. Friedlein, 103, 21 à 104, 5).

De même dans les *Definitiones* du Pseudo-Héron.

« 4. *Quelles sont les différences des lignes?* — Des lignes, les unes sont droites, les autres non; de celles qui ne sont pas ([2]) droites, les unes sont circulaires, celles qu'on appelle περιφέρειαι ([3]), les autres *hélicoïdes,* les autres *kampyles.* »

Pour les *kampyles,* la même compilation (7), après avoir dit qu'il y en a une infinité, se contente de reproduire la définition de la concavité d'après Archimède; pour les *hélicoïdes* (8), elle dé-

---

([1]) Ainsi, chez Proclus (éd. Friedlein, 121, 16), dans un passage qu'il emprunte exceptionnellement à son maître Syrianus, ἡμῖν ἑπομένοις τῷ ἡμετέρῳ καθηγεμόνι (p. 123, 19).

([2]) Heron, éd. Hultsch, p. 8, l. 122. — Οὐκ est évidemment à rétablir avant εὐθειῶν.

([3]) Ce terme désigne, chez les géomètres classiques, aussi bien un arc de cercle que la circonférence entière.

finit la spirale plane d'après Archimède aussi (περὶ ἑλίκων), et l'hélice cylindrique d'après Apollonius (περὶ τοῦ κοχλίου).

C'est donc l'invention de la spirale et de l'hélice par Archimède qui a été l'occasion de ne pas maintenir la généralisation qu'il avait adoptée; la véritable cause qui a fait rejeter cette généralisation est d'ailleurs indiquée par Proclus; elle doit être cherchée dans une tentative de retour aux idées de Platon.

Ce retour — c'est-à-dire la tripartition des lignes en droites, circulaires et mixtes, les deux premières espèces étant d'ailleurs regardées comme simples — nous apparaît comme propre à Geminus, quoique lui-même ait sans doute emprunté cette division à quelque autre auteur.

Pappus ne la reconnaît point explicitement : les termes de lignes *simples* et *mixtes* lui sont inconnus; cependant leur distinction subsiste au fond dans son classement des problèmes en plans (c'est-à-dire dont la solution n'emploie que les lignes simples) et solides ou grammiques (qui réclament des lignes mixtes).

De même Pappus, qui, au contraire de Geminus, fait des coniques une classe toute spéciale (solution des problèmes solides), distingue vaguement pour les autres lignes entre celles qui sont engendrées par des intersections de surfaces et non plus seulement par des sections planes, et celles qui sont engendrées par des mouvements, comme les hélices, les quadratrices, les cochloïdes, les cissoïdes. Mais ce n'est point l'opposition tranchée de Proclus et des *Definitiones* entre les *hélicoïdes* et les *kampyles*, opposition que l'on doit cependant ramener originairement à une grossière distinction entre les formes plutôt qu'à la différence du mode de génération.

Quoique la classification platonicienne de Geminus n'ait donc pas rallié l'assentiment général, elle n'en a pas moins joui d'une certaine faveur vers la fin de la période alexandrine, et en tout cas elle a empêché l'adoption d'un terme technique comme celui de *kampyle*, pour désigner les courbes par opposition aux droites, malgré l'exemple d'Archimède. Les citations de Proclus montrent d'ailleurs que la classification en *simples* et *mixtes* avait donné lieu, antérieurement à Geminus, à des discussions qu'il essaya de clore.

Ainsi (p. 104-106) on s'était demandé s'il ne fallait pas consi-

dérer comme une troisième ligne simple l'hélice cylindrique, en raison de sa propriété que tous ses arcs sont superposables, ou, ainsi que le disaient les anciens, puisqu'elle est *homéomère* au même titre que la droite et le cercle.

Geminus rejette cette opinion en se fondant sur ce que l'hélice est engendrée par la combinaison de deux mouvements, simples à la vérité, mais différents.

« Geminus a remarqué que si plusieurs mouvements simples engendrent une ligne, elle n'est pas toujours mixte, elle ne l'est que si ces mouvements sont dissemblables. Ainsi, qu'on imagine un carré et deux mouvements de même vitesse, l'un suivant la longueur, l'autre suivant la largeur, la ligne engendrée est la diagonale, c'est-à-dire une droite; mais il ne faut pas dire pour cela qu'elle est mixte, car elle n'est pas précédée, comme l'hélice cylindrique, par une autre ligne différente engendrée par un mouvement simple. De même, si l'on imagine une droite inscrite dans un angle droit et dont le milieu décrit un cercle, il ne faut pas conclure que la ligne circulaire engendrée est mixte; car les extrémités de la droite ont des mouvements rectilignes, mais d'ailleurs non uniformes pour toutes deux (p. 106, l. 13, lire ἀνωμάλως au lieu de ὁμαλῶς); le milieu ne se meut donc pas uniformément et décrit un cercle, tandis que les autres points décrivent des ellipses, en sorte que la génération de la ligne circulaire résulte de la non-uniformité dans le mouvement du milieu, ou de ce que la ligne droite est donnée inscrite dans un angle droit et n'a pas son mouvement naturel. »

Nous avons déjà vu, d'un autre côté, que la distinction des simples et mixtes s'était étendue des lignes aux surfaces, où le plan et la sphère étaient regardés comme simples. Geminus (*Proclus*, p. 117-118) a remarqué que le concept de *mixte* n'était pas identique pour les lignes et pour les surfaces. Pour ces dernières, il n'y a, dit-il, ni composition (σύνθεσις) ni confusion (σύγχυσις), mais plutôt en quelque sorte *mélange* (κρᾶσις) des éléments. Les différentes sections qu'on y peut faire redonnent ces éléments générateurs (par exemple la droite et le cercle dans le cône); on résout ainsi les surfaces en leurs éléments simples. Pour les lignes, au contraire, il n'y a rien de semblable ; la mixtion a plutôt le caractère d'une *fusion* (σύγχυσις).

« L'hélice est mixte, elle n'a pas une partie droite, une partie courbe, comme les mixtes par composition; on ne peut la couper de façon à faire apparaître les éléments, comme dans les mixtes par *mélanges;* mais ces éléments ont comme disparu en se fondant ensemble; c'est donc à tort que Théodore le mathématicien [1] a admis un mélange pour les lignes. »

L'historique que je viens d'essayer de retracer n'a guère d'autre intérêt, au fond, que de marquer un empiètement malheureux de la Philosophie dans le domaine des Mathématiques; cet empiètement ne pouvait aboutir à une classification rationnelle, ni pour les lignes, ni pour les surfaces.

VIII.

LA SPIRALE D'ARCHIMÈDE.

Comme je n'ai pas l'intention d'aborder ici l'histoire des coniques, qui a droit à être traitée pour elle-même, il ne me reste désormais qu'à dire quelques mots sur la spirale d'Archimède, sur la conchoïde et sur la cissoïde.

Je puis être d'autant plus bref sur la première de ces courbes que nous possédons le Traité d'Archimède Περὶ ἑλίκων (éd. Torelli, p. 217-255), où il a résolu en général le problème de mener en un point donné la tangente à la spirale et trouvé la mesure de l'aire comprise entre la courbe et un rayon vecteur quelconque.

Nous venons d'ailleurs de voir que le nom d'ἕλιξ donné par Archimède à sa spirale servit également dans l'antiquité pour désigner toutes les courbes, planes ou gauches, présentant une forme enroulée ou tortillée; et nous avons notamment rencontré déjà l'hélice cylindrique, également inventée par Archimède au point de vue pratique, et des hélices coniques et sphériques imaginées ultérieurement.

Par opposition à ces hélices gauches, la spirale d'Archimède est appelée (*Definitiones,* 8, *Pappus,* p. 234), *hélice plane* (ἕλιξ ἐν ἐπιπέδῳ). Il est très douteux au reste que les anciens aient considéré d'autres spirales planes.

---

[1] Probablement Théodore de Soles, qui avait donné une explication des passages mathématiques de Platon (Plutarque, *De orac. defect.* — *De anim. procr.*).

Le seul indice qui se rencontre à cet égard est un passage assez obscur de Proclus (p. 176), où, après avoir remarqué que non seulement des droites, mais encore d'autres courbes peuvent être prolongées indéfiniment sans se rencontrer, il ajoute : « Ainsi il est possible d'imaginer des hélices tracées dans une telle relation avec des droites ([1]) que, si on les prolonge indéfiniment en même temps que ces droites, elles ne se rencontrent jamais ».

Si l'on admet que Proclus voulait ici parler de spirales planes et qu'il ne comptait pas comme telles la conchoïde ou la quadratrice, on ne pourrait guère penser qu'à la spirale hyperbolique ; mais, en fait, l'hypothèse première est assez improbable.

La spirale d'Archimède fut, après son inventeur, l'objet de quelques travaux ; nous avons déjà vu la relation indiquée par Pappus entre cette courbe, l'hélice cylindrique et la quadratrice ; nous avons également vu que la spirale d'Archimède avait été employée pour résoudre le problème du partage d'un angle dans un rapport donné ([2]).

Dans son Livre IV (p. 234-242), Pappus expose quelques théorèmes d'Archimède et leur ajoute celui-ci : que l'aire engendrée par un rayon vecteur est proportionnelle au cube de ce rayon. Les théorèmes généraux d'Archimède (prop. 26-28) ont un énoncé beaucoup plus compliqué, parce qu'ils portent sur des différences entre les aires et des secteurs circulaires ; la simplification ne présentait aucune difficulté et elle doit être très antérieure à Pappus.

On peut enfin signaler le terme technique d'*hélice monostrophe* employé par Proclus (p. 180-187) pour désigner la courbe correspondant à la première révolution du rayon vecteur ; ce terme, en effet, n'est point dans Archimède, et Pappus ne l'emploie que pour l'hélice cylindrique. Il faut, au reste, remarquer que le passage de Proclus (p. 187) n'est nullement emprunté à Geminus,

---

([1]) Τεταγμένας ἕλικας περὶ εὐθείας (l. 23-24). On pourrait lire παρά, au lieu de περὶ (autour), qui indiquerait, par exemple, l'hélice cylindrique autour de son axe. Mais, plus loin, Proclus distingue avec Geminus les lignes *asymptotes* (qui ne se rencontrent pas, quelque loin qu'on les prolonge), suivant qu'elles sont ou non dans un même plan, et ne donne comme exemple des *asymptotes* dans un plan que des droites parallèles d'une part, que l'hyperbole et la conchoïde d'autre part.

([2]) Pappus, p. 286. — Proclus, p. 272.

puisque, en contradiction formelle avec ce dernier (p. 111), Proclus y reconnaît des courbes s'arrêtant brusquement [1].

Quant au nom de Conon qui a parfois été substitué à celui d'Archimède dans la désignation de la spirale, il a été emprunté à Pappus, qui dit formellement (p. 234) : « La théorie de la *spirale* tracée dans un plan a été proposée par le géomètre Conon de Samos. » Mais il ne peut y avoir là qu'une méprise sur le sens du langage d'Archimède dans sa Préface. Ce langage est pourtant assez clair, et la méprise de Pappus n'est malheureusement pas de nature à nous inspirer une grande confiance dans la parfaite exactitude de tous les renseignements qu'il nous a conservés.

IX.

LES CONCHOÏDES DE NICOMÈDE.

J'ai déjà établi, d'après un passage des commentaires de Simplicius sur la *Physique* d'Aristote (éd. Diels, p. 60), que l'inventeur de la courbe

$$\rho = a + \frac{b}{\cos \varphi}$$

a dû être plus âgé qu'Apollonius, s'il était d'autre part plus jeune qu'Eratosthène ; il vivait donc au IIIe siècle avant notre ère.

Pappus qui, de même que Jamblique dans Simplicius, appelle cette courbe *cochloïde,* en parle dans deux de ses Livres.

III (p. 58-62). « Nicomède a résolu le problème (des deux moyennes proportionnelles) par la ligne cochloïde, au moyen de laquelle il a également effectué la trisection de l'angle. » Suit la solution classique du problème des deux moyennes proportionnelles.

IV (p. 242-250). On retrouve une répétition plus détaillée de cette solution, avec la définition de la courbe et les indications suivantes :

Nicomède appelait κανών (règle) la droite fixe, πόλος le point fixe, διάστημα (intervalle) la longueur a, et distinguait quatre cochloïdes, dont la première correspondait aux valeurs positives de a (les trois autres, ajoute Pappus, servaient pour d'autres théorèmes). Il

---

[1] Il donne précisément l'exemple assez malheureux de l'*hélice monostrophe*

indiquait le tracé à l'aide d'un instrument et démontrait que la *règle* est asymptote; enfin il n'aurait exposé que la solution du problème de Délos sans démonstration.

Eutocius (p. 146-149) reproduit la démonstration de Pappus et ne nous apprend guère plus, si ce n'est que l'invention de Nicomède fut mise par lui en rivalité avec le *Mésolabe* d'Eratosthène, et qu'il avait écrit un Traité spécial *sur les lignes conchoïdes*.

Enfin Proclus cite la conchoïde (p. 111) parmi les lignes ne formant pas figure, mais se prolongeant indéfiniment, tandis que page 177, où d'ailleurs il parle de son asymptote, il la range seulement parmi celles qui se prolongent indéfiniment, et paraît entendre, ainsi que nous l'avons déjà vu, une des espèces de la conchoïde comme type des courbes formant boucle et se prolongeant ensuite indéfiniment.

Il parle encore de la conchoïde (p. 112), comme pouvant, par exemple, être la méridienne d'une surface de révolution (p. 113), comme décrite par Geminus; enfin (p. 272, cf. 356), il en attribue formellement l'invention à Nicomède, dit que ce dernier en a donné la génération, le classement et les caractères, et que d'autre part il s'en est servi pour obtenir la trisection de l'angle droit.

Ainsi que l'a remarqué M. Cantor (*Vorlesungen*, p. 305), la solution de ce dernier problème se retrouve en fait dans Pappus (p. 274), et quoique celui-ci semble vouloir s'en arroger l'invention (p. 246), il n'est pas douteux qu'on ne doive la faire remonter à Nicomède, au moins dans son essence.

Quant aux trois autres espèces de conchoïde distinguées par Nicomède après la première et seule dont parle Pappus, le savant historien moderne croit devoir laisser indécise la question de leur restitution; mais, malgré son opinion, je crois que l'on ne peut méconnaître dans ces trois espèces les trois formes que prend la courbe lorsque a est négatif, suivant qu'il est, en valeur absolue, plus petit que b, égal ou plus grand.

Je viens de rappeler un passage de Proclus où la quatrième espèce, la conchoïde à boucle, est très probablement indiquée. Je n'ai donc qu'à réfuter les objections que l'on a pu faire à l'identification proposée.

En premier lieu, il est clair, d'après Eutocius, que Nicomède débutait par la description de l'instrument servant au tracé des

conchoïdes, instrument qui se prête facilement à la variation de a dans tous les sens, mais suppose que la directrice est rectiligne; le classement établi, suivant Proclus, après l'exposé de la génération, ne pouvait donc porter sur des conchoïdes à directrice courbe, conjecture qui a été émise.

D'autre part, les théorèmes auxquels servaient les trois dernières conchoïdes pouvaient très bien, quelle que soit l'expression de Pappus, être de simples transformations des solutions obtenues avec la première conchoïde, et il est facile de les imaginer; car, pour inscrire, par exemple, dans un angle donné une droite de longueur donnée dont le prolongement passe par un point donné, on peut évidemment prendre l'un ou l'autre des deux côtés de l'angle pour directrice de la conchoïde, et l'on peut par conséquent résoudre le problème soit avec la première conchoïde, soit avec l'une des trois autres.

Ajouterai-je que la forme avec boucle est peut-être la seule qui justifierait l'appellation de *cochloïde* employée par Pappus et Jamblique, au lieu de celle de *conchoïde* qui paraît être la véritable ?

X.

LA CISSOÏDE ET DIOCLÈS.

La dernière courbe dont il me reste à parler n'a été identifiée que par une hypothèse très plausible à la vérité, mais qui, il convient de le remarquer, n'est nullement assurée.

Le nom de Dioclès ne se trouve que dans Eutocius (*Archimède*, p. 138, 163, 171), qui lui attribue un Ouvrage Περὶ πυρείων et en donne deux extraits, dont l'un est la solution par les coniques du problème d'Archimède : *Couper par un plan une sphère dans un rapport donné;* dont le second est la solution du problème des deux moyennes proportionnelles par une courbe dont le nom n'est pas donné et dont l'équation est

$$y^2(R + x) = (R - x)^3.$$

Ainsi le nom de *cissoïde* ne se trouve pas dans Eutocius, tandis que Pappus et Proclus ne donnent point celui de Dioclès et ne définissent nullement, de fait, la courbe dénommée d'après son analogie avec la feuille de lierre.

Pappus la cite deux fois (p. 54 et 270), mais seulement comme une courbe qui n'est pas engendrée par une section plane d'un solide géométrique et qu'il classe par conséquent avec les hélices, quadratrices, conchoïdes.

Proclus dit (p. 113) que Geminus en donnait la génération (p. 111 et 152), que la cissoïde est une ligne mixte tracée sur un plan et formant une figure en retombant sur elle-même (p. 126), que lorsque les lignes cissoïdes vont se réunir en un même point, figure qui se présente sur la feuille de lierre (κισσός) et d'où vient le nom de la ligne, elles forment un angle qui est compris sous des lignes mixtes. Cette indication est partiellement corrigée (p. 128), où il est dit que l'angle est formé en réalité par une seule ligne, car on appelle *cissoïde* la courbe tout entière et non l'une de ses parties.

Ainsi la cissoïde est une courbe plane fermée, et présentant au moins soit un rebroussement, soit un point saillant. On peut évidemment l'identifier avec la courbe de Dioclès, à condition toutefois, comme nous l'avons déjà remarqué, de la limiter à l'intérieur du cercle générateur de rayon R et de la compléter par la courbe symétrique

$$y^2(R - x) = (R + x)^3.$$

Mais on pourrait évidemment aussi supposer une courbe tout à fait différente, comme, par exemple, telle épicycloïde ou telle hypocycloïde.

L'hypothèse courante est plausible en ce qu'elle place sous un nom assigné par les Grecs à une certaine courbe la seule ligne dont on sache qu'ils se soient occupés, sans connaître comment ils la désignaient; mais cette hypothèse devrait tomber immédiatement si l'on découvrait quelque preuve, par exemple, que Dioclès était postérieur à Geminus.

Le sujet de l'Ouvrage de Dioclès est au reste assez incertain. Galien emploie le terme de πυρείων pour désigner les miroirs ardents avec lesquels, suivant la tradition, Archimède porta l'incendie sur la flotte romaine. Si cette tradition est à peine soutenable, il n'en est pas moins avéré qu'Archimède s'était occupé de la réflexion sur les miroirs [1] et l'on peut supposer que Dioclès avait

---

[1] *Voir* Heiberg, *Quæstiones Archimedeæ*, p. 33.

repris un sujet déjà abordé par le Syracusain, et peut-être ainsi contribué à la formation ultérieure de la légende.

On a récemment retrouvé dans un manuscrit de l'*Ambrosienne* un fragment grec relatif à la théorie des miroirs ardents et qui a été publié sous le titre de *Fragmentum mathematicum Bobiense* (Hermes, XVI, p. 261 et suiv., *voir* p. 637 et suiv.). M. Cantor a pensé qu'on pouvait attribuer à Dioclès ce fragment qui témoigne de la connaissance du foyer de la parabole (1). M. Heiberg (2) a combattu cette opinion et restitué à bon droit, croyons-nous, l'honneur du nouveau texte à l'ingénieur Anthemius de Tralles (3), contemporain d'Eutocius (VIe siècle après J.-C.). Toutefois la date de la découverte que constate ce texte peut rester incertaine, car si Anthemius, dans un passage sur les πυρεῖς, revendique l'originalité pour ses travaux et prétend que ses précurseurs ont employé des sections coniques sans discernement et sans démonstrations, la chose est assez peu croyable, surtout quand on voit Dioclès traiter des problèmes qui semblent si éloignés de son sujet. Mais, à l'époque où vivait Anthemius, les écrits anciens qui subsistaient encore étaient déjà assez souvent mutilés et défigurés pour qu'on puisse expliquer son langage sans ajouter foi à ses assertions.

Quoi qu'il en soit, nous retombons pour Dioclès sur les seules données d'Eutocius. Elles peuvent suggérer les remarques suivantes :

Il semble bien qu'Eutocius ait effectivement eu à sa disposition l'Ouvrage Περὶ πυρείων, ce qui n'était pas le cas, je crois, ni pour bon nombre d'écrits d'auteurs dont il cite les solutions du problème de Délos, ni pour Dionysodore dont il donne, concurremment avec celle de Dioclès, la solution du problème d'Archimède.

Pour Dionysodore en effet, Eutocius ne donne pas le titre de l'Ouvrage où il avait publié sa solution, et l'on peut penser qu'elle

---

(1) On sait qu'Apollonius connaissait les foyers de l'ellipse et de l'hyperbole; on n'a, au contraire, aucun autre indice que ce nouveau fragment de la découverte par les anciens du foyer de la parabole.

(2) *Zeitschrift für Math. und Phys.*, t. XXVIII, p. 4.

(3) Je signale en passant la donnée de Suidas : « Archimède de Tralles, philosophe, auteur d'un Commentaire sur Homère et de Traités de Mécanique », comme une preuve qu'Anthemius avait reçu, comme mécanicien, le surnom glorieux d'Archimède de Tralles, et fut par suite confondu ultérieurement par Suidas avec un commentateur d'Homère.

se trouvait comme complément sur des exemplaires du traité d'Archimède : *De la sphère et du cylindre.*

Les citations des coniques d'Apollonius qui se trouvent dans la solution de Dioclès doivent être des interpolations d'Eutocius et ne peuvent servir pour déterminer la limite supérieure de l'époque où vivait Dioclès; je crois cependant que ce dernier doit être regardé comme postérieur à Apollonius et, en raison même de la mutilation qu'avait déjà subie de son temps le Traité précité d'Archimède, je serais porté à le rapprocher, le plus possible au moins, de l'âge de Geminus.

D'un autre côté, Eutocius remarque très justement que la solution du problème de Délos par Dioclès est au fond identique à celles de Sporos et de Pappus, si l'on supprime l'emploi de la courbe pour y substituer un autre procédé graphique plus simple. Il est dès lors très peu probable que, si Sporos a joint à la compilation qu'il faisait (1) une solution qu'il s'attribuait, il en ait également reproduit une autre susceptible de diminuer singulièrement l'originalité de son travail. Ce n'est donc point dans cette compilation qu'Eutocius a dû trouver la solution de Dioclès.

Ainsi l'Ouvrage Περὶ πυρείων devait encore exister, plus ou moins complet au reste, à l'époque d'Eutocius et d'Anthemius; on pourrait donc avoir quelque espoir d'en rencontrer une version arabe. Malheureusement l'indication qui existe à ce sujet dans Casiri paraît erronée, comme M. Heiberg l'a fait voir.

---

(1) *Voir* un Essai *Sur les fragments d'Eudème de Rhodes,* dans les *Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux,* p. 70; 1882.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

STEINHAUSER (ANTON). — HILFSTAFELN ZUR PRÄCISEN BERECHNUNG ZWANZIGSTELLIGER LOGARITHMEN ZU GEGEBENEN ZAHLEN UND DER ZAHLEN ZU ZWANZIGSTELLIGEN LOGARITHMEN. Wien, Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn. XII-296 p.; 1880.

Il ne manque pas aujourd'hui de Tables logarithmiques auxquelles peuvent recourir les mathématiciens qui ont besoin d'un grand nombre de figures pour le développement de calculs numériques.

Des Tables auxiliaires spéciales, permettant le calcul d'un logarithme avec plus de décimales que d'ordinaire, se trouvent dans de nombreux Ouvrages faciles à se procurer, par exemple, les Tables de Gardiner, Callet, Westphal, Salomon, Schrön et Gernerth. En particulier, une Table de logarithmes avec plus de décimales pour les nombres premiers a été ajoutée par Wolfram au *Thesaurus* de Vega, et Stiozzi-Rudolfi a fait une semblable addition à l'édition florentine de Gardiner.

Dès 1857 parut la Table auxiliaire de Steinhauser pour le calcul des logarithmes à onze figures; en 1876, les *Tafeln zur dreissigstelligen Logarithmen-Rechnung* de R. Hoppe (Leipzig, Koch); elles reposent sur l'artifice suivant : diviser préalablement le nombre donné par des facteurs de un ou deux chiffres, le rapprocher ainsi aussi près que possible de l'unité et le décomposer de la sorte en facteurs de la forme

$$1 + n.10^{-k}.$$

Ces Tables sont d'ailleurs dans le système naturel.

Elles sont dépassées par celles qu'a laissées en manuscrit un calculateur bien connu, A. Namur, et qui vont jusqu'à trente-six décimales; leur disposition a été exposée par P. Mansion (*Mathesis*, t. I, p. 41). Namur montre que l'on peut appliquer son procédé pour un module quelconque; soient M ce module, N le nombre dont le logarithme est à déterminer avec la plus grande exactitude; il rapproche d'abord le nombre N de M, de la même

manière que Hoppe le rapproche de l'unité et en sorte que $(N - M)^3$ tombe au-dessous d'une limite déterminée avec précision, puis il emploie la relation

$$\log N = \Delta + N - \frac{(N - M)^2}{2M},$$

où Δ est un nombre constant pour le système de logarithmes considéré.

Il y a déjà de longues années que, de son côté, A. Steinhauser, dont les travaux pour la Mathématique appliquée méritent d'être connus dans le cercle le plus large, poursuivait le calcul de Tables à vingt figures, qui ont pu être publiées grâce aux sacrifices de l'éditeur et à un appui pécuniaire accordé par l'Académie d'Autriche. Naturellement, le grand âge de l'auteur ne lui permettait pas d'accomplir sans aide un travail aussi gigantesque; il lui a été grandement facilité par le concours de son neveu, le professeur A. Steinhauser, et par celui de M. Slawik qui a particulièrement calculé une Table de 10000 multiple du module 0,43429..., pour faciliter le passage des logarithmes de Briggs aux logarithmes hyperboliques. Pendant la préparation du manuscrit pour l'impression, M. Steinhauser a pu disposer de plus du Traité de Burnier et utiliser les corrections proposées par ce dernier.

Pour prendre, dans les Tables dont nous rendons compte, le logarithme d'un nombre de plusieurs figures, on commence par le partager en quatre facteurs par trois diviseurs qui vont d'ailleurs en diminuant successivement de longueur. Pour chacun de ces facteurs, on peut chercher directement le logarithme dans une des colonnes A, B, C, D. Il n'y a aucune autre Table qui réduise à un pareil minimum le calcul à faire par celui-là même qui l'utilise; cet avantage et la confiance que doit inspirer le nom de Steinhauser assurent certainement à ses Tables à vingt figures la supériorité sur tous les Ouvrages qui pourraient lui faire concurrence. S. G.

RICCARDI (Pietro). — Cenni sulla storia della Geodesia in Italia dalle prime epoche fin' oltre la metà del secolo XIX. Memoria del professor Pietro Riccardi, Part. II, Capo I. — Bologna, tipi Gamberini et Parmeggiani, 68 p.; 1883.

J'ai déjà rendu compte dans le *Bulletin* de la première Partie de cet Ouvrage, entrepris sur de vastes proportions. La seconde Partie, dont la publication est désormais commencée, doit comprendre plusieurs Chapitres; mais le premier a pu être édité séparément, comme offrant une vue générale sur l'ensemble des matières, et comme nous faisant connaître les noms de tous les personnages qui, dans le cours des XVIIe et XVIIIe siècles ont exercé une influence sur le développement de la Géométrie pratique en Italie. Il ne s'agit guère ici de travaux spéciaux et hors ligne qui aient changé d'un coup le caractère de la Science; mais, précisément pour cela, l'esquisse des progrès accomplis pas à pas est une entreprise méritoire qui ne pouvait être tentée avec succès que par quelqu'un ayant sur cette matière des connaissances aussi approfondies que M. Riccardi. Tout le monde conviendra qu'il est relativement plus facile, pour un homme du métier, d'exposer dans une monographie les mérites d'un coryphée, que de tirer, d'une foule de matériaux rares et difficilement accessibles, précisément les points dont la réunion peut former un tableau fidèle et clair du progrès intellectuel pendant une longue période.

Parmi les nombreux écrits géodésiques qui appartiennent à cette époque et dont notre auteur caractérise le contenu au moins par quelques traits, les plus saillants sont les *Istruzioni per l'ingegnere civile* d'Alberti, les *Elementa Geometriæ et Practicæ* de Lecchi, et le *De re ichnographica* de Marinoni, Ouvrage qui s'est répandu dans un cercle plus étendu et qui a été édité à Vienne en 1751.

En ce qui concerne le matériel instrumental, les géomètres du XVIIe siècle se trouvaient en présence de cette multiple variété de dispositions pour tel ou tel but, que nous ont déjà fait connaître les études antérieures de M. Riccardi, et il ne manqua pas de gens qui, comme Riccioli par exemple, crurent nécessaire d'ajouter aux anciens instruments d'autres nouveaux d'une utilité plus ou moins douteuse. Cependant on commença peu à peu, et c'était

un progrès décisif, à préférer la mesure directe des longueurs à celle, toujours très peu sûre, des distances à un poste, aussi bien qu'à se servir du carré géométrique pour la détermination des angles; le cercle divisé et la boussole entrèrent également dès lors en jeu.

L'invention d'un *diastimètre*, vraiment digne de ce nom et muni d'une lunette, est due à Geminiano Montanari, que l'histoire de l'Astronomie mentionne également avec honneur; M. Riccardi voit dans cet instrument le précurseur immédiat de nos télémètres modernes.

Vers la fin de la période en question fut inventé un *microgoniomètre* dont un certain Perez réclame la priorité, aux dépens du P. Eliseo, des Carmes. Des détails plus précis sur l'idée qui est au fond de cet instrument nous intéresseraient d'autant plus que, comme on le sait, le géologue allemand Friedrich Pfaff s'est signalé par un appareil du même nom destiné à la mesure des très petits angles et qu'il a reconnu aussi comme très approprié aux recherches sur le mouvement de translation des glaciers.

Notre auteur consacre une étude spéciale à la mesure des hauteurs et au nivellement; au reste, ce domaine spécial fut un de ceux où se déploya le plus l'esprit d'invention des géodètes italiens; ainsi Alberti, que nous avons déjà mentionné, donna trois constructions différentes pour le niveau d'eau.

Parmi les nivellements les plus considérables qui furent exécutés à cette époque, on doit signaler celui que le cardinal Conti fit faire pour donner au Reno une nouvelle embouchure dans l'Adriatique.

D'un autre côté, une série d'auteurs consacrait ses efforts à la Stéréométrie appliquée, qui se propose de traiter les volumes de forme quelconque, problème pour la solution duquel le chemin avait déjà été indiqué par le célèbre Cavalieri, dans sa *Centuria di varii problemi per dimostrare l'uso e la facilità dei logaritmi* (Bologne, 1612).

Un coup d'œil est jeté en passant sur le dessin des plans architectoniques; il est remarquable qu'on doive le meilleur recueil des plans de villes italiennes à un étranger, Le Français-Lalande, qui, comme auteur de voyages, occupe un rang aussi considérable que pour ses abrégés astronomiques.

Pour la partie purement géométrique de la Géodésie, le partage des surfaces d'après des conditions données, un Traité intéressant était déjà écrit par Citaldi, l'inventeur des fractions continues; plus tard, des phénomènes naturels, les fréquents débordements des fleuves de Toscane et de Lombardie, provoquèrent les savants à entreprendre, d'après les règles scientifiques, le partage de terrains ondulés; Fiorini et Barattieri s'en occupèrent.

L'art du dessin topographique avait déjà été solidement fondé par Pomodoro dans la précédente période; l'Ouvrage de Marinoni, sur ce sujet, se répandit au loin, tandis que Marc Antonio Cellio inaugurait une méthode destinée plus tard à de grands perfectionnements, la copie de dessins d'après des procédés optiques.

Magini et Cavalieri avaient fait connaître en Italie le calcul trigonométrique, et dans le *Vero nuovo geodeta siciliano*, Benedetto Maria del Castrone mettait en honneur, comme faisant partie de l'arpentage, la résolution des triangles au moyen de formules, à une date (1730) où, en Allemagne, on n'employait encore que de grossiers procédés graphiques pour les opérations de la Géodésie inférieure.

Des solutions manuelles de problèmes géodésiques avaient déjà été proposées par Commandino pour des cas simples; dans cet ordre d'idées, Muzio Oddi et le marquis del Monte sont à citer comme précurseurs de Galilée, à qui son compas de proportion bien connu assura à cette époque au moins autant de gloire que l'une quelconque de ses grandes découvertes mécaniques. Il fut suivi dans cette voie par de nombreux compatriotes, parmi lesquels je me bornerai à nommer Lorgna.

Quant à la planimétrie mécanique, comme paraît l'avoir, le premier, remarqué A. Favaro, c'est encore Marinoni qui se crée un titre par sa *Bilancia planimetrica*.

Mais, pendant que les mathématiciens italiens déployaient ainsi un zèle méritoire et fécond pour le développement de la Géodésie inférieure, les plus hautes branches de cette science étaient presque complètement négligées. D'ailleurs, on n'entreprit guère d'opérations importantes; on se borna à dresser des plans topographiques, des cartes territoriales et cadastrales; ce niveau ne fut guère dépassé que pour des opérations hydrauliques destinées à régulariser le cours des fleuves.

J'ai cherché à donner une rapide esquisse d'un travail accompli avec une remarquable érudition; j'ajouterai que l'attention y est appelée, en général, sur ce qui se faisait à l'étranger pendant la même période, qu'on y mentionne notamment en leur lieu et place les représentants les plus considérables de la Géodésie allemande, Prætorius, Schwenter, Faulhaber (ce dernier nom est mal écrit). S. G.

POULLET-DELISLE. — Intorno alla vita ed ai lavori di Antonio Carlo Marcellino Poullet-Delisle, Notizie raccolte da B. Boncompagni.

Sous ce titre, l'illustre éditeur du *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche,* le prince Balthazar Boncompagni vient de publier, à Rome, une intéressante Notice biographique, qui remet en lumière un savant mathématicien français, un administrateur intègre et distingué, mort il y a moins de quarante ans, injustement oublié de ses compatriotes et même de l'Université dont il avait été l'un des serviteurs les plus dévoués. Nul bibliographe francais, à l'exception de Quérard, n'a songé à seulement mentionner le nom et les Ouvrages de Poullet-Delisle.

Né à Janville (diocèse de Chartres) le 17 janvier 1778, mort le 23 août 1849 à Arrou (arrondissement de Châteaudun), Antoine-Charles-Marcellin Poullet-Delisle, ancien élève de l'École Polytechnique et professeur de Mathématiques au lycée d'Orléans, n'avait pas encore trente ans, lorsqu'il publia, sous le titre de *Recherches arithmétiques,* sa traduction des *Disquisitiones arithmeticæ* de Gauss. Deux ans plus tard, en 1809, il faisait paraître et dédiait à Laplace un *Traité d'application de l'Algèbre à la Géométrie* qui fut longtemps classique. Mais bientôt il quittait l'enseignement des Mathématiques pour entrer dans l'Administration universitaire, et, le 15 décembre de cette même année 1809, il était nommé Inspecteur de l'Académie d'Orléans. Dans ces fonctions, comme dans celles de Recteur d'Académie et d'Inspecteur général qu'il obtint ensuite, pendant toute la durée de sa longue carrière administrative, ainsi qu'il le dit lui-même, *il attaqua de front les coupables et défendit ouvertement l'innocence injus-*

tement attaquée. Il fut toujours juste envers ses subordonnés, remplissant ainsi le premier des devoirs d'un chef; mais on ne le fut pas toujours à son égard. Une lettre qu'il écrivit de Limoges, le 10 juin 1825, au Directeur de l'Instruction publique, le démontre suffisamment. Cette lettre, conservée aux Archives nationales, a été reproduite intégralement dans la Notice du prince Balthazar Boncompagni; nous regrettons de ne pouvoir la donner ici tout entière, mais nous ne pouvons nous empêcher d'en citer les lignes suivantes, en rappelant que c'était M. l'abbé Frayssinous, évêque d'Hermopolis, premier aumônier du roi, qui remplissait alors les fonctions de Ministre Secrétaire d'État au département des Affaires ecclésiastiques et de l'Instruction publique.

Poullet-Delisle s'exprime ainsi : « En 1824, je me trouve exilé d'Angers à Limoges, parce qu'un homme ambitieux et intrigant, qui cherche à peupler de ses créatures le département de Maine-et-Loire qu'il veut dominer, travaillait depuis dix-huit mois à faire placer son ancien précepteur à la tête de l'Académie d'Angers, et que lui et ses amis d'alors, car je doute qu'il les ait tous conservés, trompèrent la religion de Son Excellence, en lui persuadant que l'on désirait un recteur ecclésiastique. Cependant, Monsieur le Directeur, Son Excellence daigna m'assurer que j'étais loin d'avoir rien perdu dans son estime, et qu'Elle ne m'envoyait à Limoges que pour rétablir l'ordre de cette Académie, ajoutant qu'Elle tiendrait compte du sacrifice qu'Elle m'imposait. Dans la conversation Elle s'aperçut que je n'avais pas la croix de la Légion d'honneur. Elle eut la bonté de s'en étonner, et surtout que je ne l'eusse pas demandée. « *Monseigneur,* lui répondis-je, *elle s'obtient, mais ne* » *se demande pas!* »

Nous devons être reconnaissants au prince Balthazar Boncompagni d'avoir fait connaître au monde savant, et particulièrement au public français, un mathématicien et un administrateur si digne d'estime, et nous applaudissons sincèrement pour notre part à cet acte de réparation et de justice. ARISTIDE MARRE.

MÉLANGES.

SUR LA DÉCOMPOSITION EN FRACTIONS SIMPLES D'UNE FONCTION RATIONNELLE HOMOGÈNE;

PAR M. CYPARISSOS STEPHANOS.

Lorsqu'on considère la décomposition en fractions simples d'une fonction rationnelle

$$\frac{\varphi}{f^2}$$

(où φ et f désignent deux formes binaires $\varphi = \varphi_x^{2m}$ et $f = a_x^{m+1}$, dont la seconde a son discriminant D différent de zéro), on est conduit à remarquer que *la somme des fractions du premier degré, dans le résultat de la décomposition en question, est égal à*

$$\frac{1}{D}\,\frac{t_x^{m-1}}{f},$$

$t = t_x^{m-1}$ *représentant un covariant simultané des deux formes* φ *et* f, et que, de même, *la somme des fractions restantes est égale à*

$$\frac{1}{D}\,\frac{\alpha_x^{2m}}{f},$$

où $\alpha = \alpha_x^{2m}$ *représente également un covariant simultané des deux formes* φ *et* f.

En allant plus loin, on reconnaît que *la forme* α *coïncide avec la jacobienne* $(f, s)_1$ *de* f *et d'une autre forme* $s = s_x^{m+1}$, *laquelle constitue encore un covariant simultané des deux formes* φ *et* f.

Les formes s et t satisfont ainsi à la relation

$$D\varphi = (f, s)_1 + ft$$

et sont, par conséquent, telles que l'intégrale

$$D\int \frac{\varphi}{f^2}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)$$

soit égale à

$$\frac{1}{m+1}\,\frac{s}{f} + \int \frac{t}{f}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1).$$

Il nous a semblé intéressant d'examiner les propriétés des formes

s et t ainsi définies. Cette étude nous a conduit à divers résultats, dont nous nous proposons d'exposer quelques-uns dans le petit travail qui suit [1].

A côté de propriétés se rattachant directement à la décomposition en fractions simples, la présente Note contient aussi quelques autres résultats qui ne me paraissent pas dénués de tout intérêt. Parmi ceux-ci, je citerai avant tout les résultats du n° 24, relatifs à la forme $\Lambda = \Lambda_x^{3m-3}$, dont l'évanouissement identique constitue la condition nécessaire et suffisante pour que la forme $f = a_x^{m+1}$ admette deux racines doubles distinctes ou bien une racine quadruple.

Dans une prochaine occasion, nous espérons revenir sur quelques autres propriétés des formes s et t, relatives à la manière dont on peut représenter ces formes au moyen d'opérations (*Ueberschiebungen*) portant une seule fois sur chacune des formes φ, f et le covariant $\Delta = \Delta_x^{2m-2}$ de f, défini par les relations

$$(\Delta, f)_m = 0, \quad (\Delta, f)_{m+1} = 0 \text{ [2]}.$$

I.

Formules et remarques préliminaires.

1. Rappelons tout d'abord certaines formules où figurent les racines de $f = a_x^{m+1}$ et qui nous seront bien utiles par la suite.

---

[1] La plupart des résultats de cette Note (n°s 1-22) nous étaient déjà connus lors de la rédaction de notre Mémoire *Sur les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne* (présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 12 décembre 1881, et inséré dans le t. XXVII du *Recueil des Mémoires des Savants étrangers*, 1883). Le § 4 de la première Partie du Mémoire en question est consacré à l'étude de faits étroitement liés avec ceux exposés dans la présente Note.

[2] *P. S.* — Dans une Note *Sur l'intégration d'une fonction rationnelle homogène*, insérée dans les *Comptes rendus* du 3 décembre 1883 (t. XCVII, p. 1290), nous avons indiqué la solution d'une question plus générale dont voici l'énoncé :

Étant données deux formes binaires

$$\varphi = \varphi_x^{m_1+m-1} \quad \textit{et} \quad f = a_x^{m+1}$$

ou

$$m_1 + m + 2 \geq (m+1)(n+1),$$

déterminer l'expression générale des formes S *et* T, *d'ordres respectifs* m_1 *et*

Les facteurs linéaires de f seront désignés par

$$(xx_1),\ (xx_2),\ \ldots,\ (xx_m),\ (xx_{m+1}),$$

étant posé, pour abréger,

$$(xx_i) = x_1 x_{i2} - x_2 x_{i1}.$$

Nous aurons ainsi

$$f = a_x^{m+1} = (xx_1)(xx_2)\ldots(xx_{m+1}).$$

De là on déduit

$$(1) \qquad (m+1)a_y a_x^m = f\sum\frac{(yx_i)}{(xx_i)},$$

$$(2) \qquad \frac{m(m+1)}{2}a_y^2 a_x^{m-1} = f\sum\frac{(yx_i)(yx_j)}{(xx_i)(xx_j)} \qquad (i \lessgtr j),$$

.....

Maintenant, si l'on pose

$$\Pi_i = (x_i x_1)(x_i x_2)\ldots(x_i x_{i-1})(x_i x_{i+1})\ldots(xx_{m+1}),$$

on aura

$$(3) \qquad (m+1)a_y a_{x_i}^m = \Pi_i(yx_i),$$

$$(4) \qquad \frac{m(m+1)}{2}a_y^2 a_{x_i}^{m-1} = \Pi_i(yx_i)\sum\frac{(yx_i)}{(xx_j)} \qquad (i \lessgtr j),$$

.....

De la formule (4) on déduit

$$\frac{m(m+1)}{2}(aa')^2 a_{x_i}^{m-1} a_{x_i}'^{m-1} = \Pi_i a_{x_i}^m \sum\frac{a_{xj}}{(x_i x_j)}, \quad \text{où} \quad a_x^{m+1} = a_x'^{m+1}.$$

$m_1 - (n-1)(m+1) - 2$, *satisfaisant à la relation*

$$D^n\varphi = (f, S)_1 + f^n T$$

(*où* D *désigne le discriminant de* f, *supposé différent de zéro*).

La détermination de ces formes S et T est ramenée également à la considération de la forme Δ.

Quant aux formes s et t, considérées dans la présente Note, elles ont pour expressions

$$s = (\Delta, \sigma)_{2m-2}, \quad t = (\Delta, \tau)_{2m-2},$$

étant posé

$$\sigma = \sigma_y^{2m-2} = a_x(a_x^m \varphi_y^m - a_y^m \varphi_x^m)\varphi_x \varphi_y^{m-1} : (xy),$$

$$\tau - \tau_y^{2m-2} = \left[(a\varphi)a_y^m \varphi_x^m \varphi_y^{m-1} - \frac{1}{m+1}(a\varphi)a_x^m \varphi_y^{2m-1} - \frac{a_y(a_x^m \varphi_y^m - a_y^m \varphi_x^m)\varphi_x \varphi_y^{m-1}}{(xy)}\right] : (xy).$$

Nous aurons ainsi, par suite de (3),

$$(5)\qquad \frac{(m+1)^2}{2}(aa')^2 a_{x_i}^{m-1} a'^{m-1}_{x_i} = -\Pi_i^2.$$

Si l'on pose maintenant

$$f = (xx_i)p_x^m,$$

on aura, conformément aux formules précédentes,

$$(6)\qquad (m+1)a_y a_{x_i}^m = (yx_i)p_{x_i}^m,$$

$$(7)\qquad \frac{m+1}{2} a_y^2 a_{x_i}^{m-1} = (yx_i)p_y p_{x_i}^{m-1}.$$

Soit remarqué, en passant, que la dernière de ces formules exprime cette propriété bien connue qu'*étant donné un groupe de* $m+1$ *éléments* $f = a_x^{m+1}$ (*points d'une droite, etc.*), *les deux points* y (*qui sont centres*) *harmoniques du second degré d'un quelconque* x_i *de ces éléments par rapport au groupe* $f = 0$, *coïncident l'un avec le point* x_i, *l'autre avec le point* (*qui est centre*) *harmonique du premier degré de* x_i *par rapport au groupe des* m *points restants* $p_x^m = \frac{f}{(xx_i)}$ *de* f.

2. Les notations précédentes étant adoptées, la formule ordinaire, pour la décomposition de

$$\frac{h}{f} = \frac{h_x^m}{a_x^{m+1}}$$

en fractions simples, devient

$$(8)\qquad \frac{h}{f} = \sum \frac{h_{x_i}^m}{\Pi_i} \frac{1}{(xx_i)},$$

la forme f étant supposée à racines inégales.

A côté de cette formule, il convient de placer cette autre,

$$(9)\qquad \sum \frac{t_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i} = 0$$

(t_x^{m-1} désignant une forme quelconque d'ordre $m-1$), laquelle n'est au fond, comme on sait, qu'un cas particulier de la formule précédente (8).

Si dans la formule (8), écrite comme il suit,

$$h_x^m = \sum \frac{h_{x_i}^m}{\Pi_i} p_i, \quad \text{où} \quad p_i = \frac{f}{(xx_i)},$$

on remplace les symboles h_1, h_2 par y_2 et $-y_1$, et puis les x_1, x_2 par les symboles $-h_2$, h_1, on obtient la formule

$$h_y^m = \sum \frac{(h, p_i)_m}{\Pi_i} (yx_i)^m,$$

qui fournit la relation linéaire par laquelle la forme h_y^m est liée aux puissances $m^{\text{ièmes}}$ des $m+1$ expressions (yx_i). De même, il est à remarquer que la formule (9) peut être écrite

$$\sum \frac{(xx_i)^{m-1}}{\Pi_i} = 0,$$

et fournit ainsi la relation linéaire qui doit exister entre les puissances $(m-1)^{\text{ièmes}}$ des $m+1$ facteurs linéaires de f.

3. Il n'y a pas, à proprement parler, de formule de décomposition en fractions simples, pour le quotient de deux *formes*, dans le cas où la forme en numérateur serait d'un degré moindre de plus d'une unité que le degré du dénominateur (celui-ci étant supposé à racines inégales). Pourtant, s'il s'agissait, par exemple, de l'expression

$$\frac{t}{f} = \frac{t_x^{m-1}}{a_x^{m+1}},$$

on pourrait appliquer la formule (8) à l'expression $\frac{(xy)t}{f}$. De cette manière, on obtient

$$(10) \qquad (xy)\frac{t}{f} = (xy)\frac{t_x^{m-1}}{a_x^{m+1}} = -\sum \frac{t_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i} \frac{(yx_i)}{(xx_i)}.$$

Cette dernière formule se prête fort bien aux besoins d'une première intégration. En effet, comme on a

$$(11) \qquad d\left[\log\frac{(xx_i)}{(xy)} + \text{const.}\right] = \frac{(yx_i)}{(xy)(xx_i)}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1),$$

on doit aussi avoir

$$(12) \qquad \left\{\begin{aligned} \int \frac{t}{f}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1) &= -\sum \frac{t_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i}[\log(xx_i) - \log(xy)] + C \\ &= -\sum \frac{t_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i}\log(xx_i) + C. \end{aligned}\right.$$

4. En appliquant la formule (8) à l'expression

$$\frac{g}{(xy)f} = \frac{b_x^{m+1}}{(xy)a_x^{m+1}},$$

on obtient

$$\frac{b_x^{m+1}}{(xy)a_x^{m+1}} = -\sum \frac{b_{x_i}^{m+1}}{\Pi_i} \frac{1}{(xx_i)(yx_i)} + \frac{b_y^{m+1}}{(xy)a_y^{m+1}},$$

ou bien

$$(13) \qquad \frac{a_x^{m+1} b_y^{m+1} - a_y^{m+1} b_x^{m+1}}{(xy)} = \sum \frac{b_{x_i}^{m+1}}{\Pi_i} \frac{f(x)}{(xx_i)} \frac{f(y)}{(yx_i)}.$$

De là on déduit la valeur remarquable suivante pour la jacobienne $(m+1)(f, g)_1$:

$$(14) \qquad (m+1)(ab)a_x^m b_x^m = \sum \frac{b_{x_i}^{m+1}}{\Pi_i} \frac{f^2}{(xx_i)^2}.$$

Il résulte de cette formule (14) que *l'expression générale des jacobiennes des faisceaux $\lambda f + \mu g$ qui contiennent une forme donnée*

$$f = a_x^{m+1} = (xx_1)(xx_2)\ldots(xx_{m+1})$$

est

$$(15) \qquad \alpha_x^{2m} = f^2 \sum \frac{\lambda_i}{(xx_i)^2},$$

où les λ_i désignent des paramètres arbitraires.

Maintenant la formule (13) montre ceci de plus, qu'étant donnée une forme telle que (15), c'est-à-dire qui soit la jacobienne d'un faisceau $\lambda f + \mu g$ contenant la forme $f = a_x^{m+1}$, la condition pour que deux points x et y appartiennent à une même forme de ce faisceau est

$$(16) \qquad \frac{f(x)g(y) - f(y)g(x)}{(xy)} = (m+1)\sum \lambda_i \frac{f(x)}{(xx_i)} \frac{f(y)}{(yx_i)} = 0.$$

5. On aurait pu arriver également à la formule (14) en considérant la différentielle de l'expression rationnelle

$$\frac{b_x^{m+1}}{a_x^{m+1}} = -\sum \frac{b_{x_i}^{m+1}}{\Pi_i} \frac{(xy)}{(xx_i)(yx_i)} + \frac{b_y^{m+1}}{a_y^{m+1}}.$$

Cette différentielle est, en effet,

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} d\frac{b_x^{m+1}}{a_x^{m+1}} &= (m+1)\frac{(ab)a_x^m b_x^m}{f^2}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1) \\ &= \sum \frac{b_{x_i}^{m+1}}{\Pi_i} \frac{1}{(xx_i)^2}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1), \end{aligned} \right.$$

et cela par suite de la formule

$$(18) \qquad d\frac{(xy)}{(xx_i)} = -\frac{(yx_i)}{(xx_i)^2}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1),$$

qu'il convient de comparer à la formule (11) précédente.

La propriété exprimée par la relation (17) fait voir que la détermination des faisceaux de formes binaires de degré $m+1$ ayant une jacobienne donnée $\alpha = \alpha_x^{2m}$ fournit la solution de cette question : *Déterminer les formes $f = a_x^{m+1}$ qui sont telles que l'intégrale*

$$\int \frac{\alpha}{f^2}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1),$$

où α est une forme binaire donnée de degré $2m$, ait une valeur algébrique de la forme $\frac{b_x^{m+1}}{a_x^{m+1}}$ (¹).

(¹) C'est exprès que je dis « de la forme $\frac{b_x^{m+1}}{a_x^{m+1}}$ », parce qu'il y a aussi d'autres expressions rationnelles (dont les termes sont des formes d'un degré supérieur à $m+1$) qui conduisent à des différentielles telles que

$$\frac{\alpha}{f^2}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1),$$

f étant une forme de degré $m+1$ admettant des systèmes convenables de racines multiples.

Le problème de la recherche de ces diverses expressions rationnelles rentre, comme cas particulier, dans la question de la *détermination des formes*

$$f = a_x^{m+1} = (xx_1)^{k_1}(xx_2)^{k_2}\ldots(xx_n)^{k_n}, \quad (\Sigma k_i = m+1),$$

auxquelles correspond une intégrale

$$\int \frac{\psi_x^{m+n-1}}{\Pi(xx_i)^{k_i+1}}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)$$

(*où ψ désigne une forme donnée*) *admettant une valeur algébrique* $\frac{b_x^{m+1}}{a_x^{m+1}}$. (En prenant $n = m+1$, on a le cas considéré dans le texte.)

Il est à remarquer que les conditions auxquelles doivent satisfaire les n facteurs linéaires d'une pareille forme f (supposés inégaux et de degrés de multiplicité $k_i > 0$) coïncident avec celles qui expriment que la forme $\varphi_x^{2m} = \psi.\Pi(xx_i)^{k_i-1}$ constitue la jacobienne d'un faisceau $\lambda a_x^{m+1} + \mu b_x^{m+1}$ contenant la forme f. Le nombre de ces conditions est égal à $n-1$, comme cela a déjà été remarqué (Serret, *Algèbre supérieure*, t. I, p. 506). Nous examinerons plus bas (nos 21 et 22) ce que deviennent les n conditions en question dans le cas où l'on a $n = m+1$ (pour $k_i = 1$). Dans le cas où $f = (xx_1)^{k_1}(xx_2)^{k_2}$, $(n = 2)$, on doit avoir simplement $\psi_{x_1}^{k_2}\psi_{x_2}^{k_1} = 0$.

En effet, on voit bien que, si pour une valeur déterminée de $f = a_x^{m+1}$ l'intégrale précédente devient égale à $\frac{b_x^{m+1}}{a_x^{m+1}}$, toute autre forme $\lambda a_x^{m+1} + \mu b_x^{m+1}$, placée dans l'expression de l'intégrale considérée, au lieu de f, doit également conduire à une valeur algébrique

$$\frac{\lambda' a_x^{m+1} + \mu' b_x^{m+1}}{\lambda a_x^{m+1} + \mu b_x^{m+1}}$$

de la même intégrale.

6. Deux formes binaires a_x^{m+1} et b_x^{m+1}, d'un même degré, sont appelées *conjuguées* (d'après M. Rosanes), dans le cas où leur invariant simultané $(ab)^{m+1}$ est nul.

Les formes b_x^{m+1} qui sont conjuguées aux formes d'un *système linéaire à k paramètres*

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k$$

forment aussi un *système linéaire*, à $m - k$ paramètres,

$$\lambda_{k+1} f_{k+1} + \ldots + \lambda_m f_m + \lambda_{m+1} f_{m+1}.$$

(Les formes $f_0, f_1, \ldots, f_k$ doivent être linéairement indépendantes entre elles ; il doit en être de même pour les formes $f_{k+1}, \ldots, f_{m+1}$).

Deux pareils systèmes linéaires, conjugués entre eux, admettent les mêmes covariants (*combinants* des formes f_i qui déterminent ces systèmes). Ainsi, par exemple, les déterminants fonctionnels

$$\sum \pm \frac{\partial^k f_0}{\partial x_1^k} \frac{\partial^k f_1}{\partial x_1^{k-1} \partial x_2} \cdots \frac{\partial^k f_k}{\partial x_2^k}$$

et

$$\sum \pm \frac{\partial^{m-k} f_{k+1}}{\partial x_1^{m-k}} \cdots \frac{\partial^{m-k} f_m}{\partial x_1 \partial x_2^{m-k-1}} \frac{\partial^{m-k} f_{m+1}}{\partial x_2^{m-k}}$$

de ces deux systèmes ne diffèrent entre eux que par un facteur constant.

Lorsqu'on pose

$$a_x^{m+1} = (xx_1)(xx_2) \ldots (xx_{m+1}),$$

l'invariant $(ab)^{m+1}$ devient

$$(ab)^{m+1} = b_{x_1} b_{x_2} \ldots b_{x_{m+1}}.$$

Il résulte de là que, si l'on a

$$a_x^k a_x^{m-k+1} = 0,$$

la forme $(xy)^k(xz)^{m-k+1}$ est conjuguée à $f = a_x^{m+1}$. En particulier, la forme $(xy)^{m+1}$ est conjuguée à f, si l'on a

$$a_y^{m+1} = 0.$$

Dans le cas où les diverses racines $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$ de f sont inégales, l'expression générale des formes conjuguées à f est

$$\lambda_1(xx_1)^{m+1} + \lambda_2(xx_2)^{m+1} + \ldots + \lambda_{m+1}(xx_{m+1})^{m+1}.$$

On dit que la forme a_x^{m+1} est *apolaire* par rapport à une forme c_x^n de degré $n > m+1$, si l'on a identiquement

$$(ac)^{m+1} c_x^{n-m+1} = 0.$$

On voit que dans ce cas la forme c_x^n est conjuguée à toute forme $a_x^{m+1}\lambda_x^{n-m+1}$ contenant f en facteur. On peut désigner cette relation de la forme c_x^n à la forme a_x^{m+1} en disant encore que la forme c_x^n est *conjuguée* à la forme a_x^{m+1}. Si les racines de f sont inégales, on doit avoir, pour des valeurs convenables des λ_i,

$$c_x^n = \lambda_1(xx_1)^n + \lambda_2(xx_2)^n + \ldots + \lambda_{m+1}(xx_{m+1})^n.$$

7. Nous savons déjà (n° 4) que les jacobiennes des faisceaux de degré $m+1$, qui contiennent une forme donnée $f = a_x^{m+1}$, constituent un système linéaire à m paramètres. Il résulte de là que les formes A_x^{2m}, conjuguées à toutes ces jacobiennes, doivent constituer un système linéaire à $m-1$ paramètres.

Comme ces formes A_x^{2m} doivent satisfaire à la relation

$$(Aa)^m(Ab)^m(ab) = 0,$$

quelle que soit la forme b_x^{m+1}, on voit que l'on doit avoir identiquement

$$(Aa)^m A_x^m a_x = 0.$$

Il est manifeste que, réciproquement, toute forme A_x^{2m} satisfaisant à cette relation est conjuguée par rapport à toutes les jacobiennes $(f, g)_1$, quel que soit $g = b_x^{m+1}$.

En ayant égard à l'expression générale des jacobiennes $(f, g)_1$ en question, donnée au n° 4, on voit que, si toutes les racines x_i de f sont inégales, on devra avoir

$$(A, p_i)_{2m} = 0, \quad \text{où} \quad p_i = \frac{f}{(xx_i)},$$

quelle que soit la racine x_i.

8. Comme toute forme $(xy)^m(xz)$, telle que $a_y^m a_z = 0$, est conjuguée à f, on voit que les formes $(xy)^m a_y^m a_x$ doivent être conjuguées à f, quel que soit y.

Plus généralement, toute forme comprise dans l'expression

$$(\lambda a)^m \lambda_x^m a_x$$

doit être conjuguée à f, quelle que soit la forme λ_x^{2m}.

D'après le numéro précédent, il n'y a parmi les formes λ_x^{2m} que m, linéairement indépendantes entre elles, qui donnent lieu à une expression $(\lambda, a)_m$ identiquement nulle. Il suit de là que l'expression $(\lambda, a)_m$ est toujours capable de représenter $m+1$ formes linéairement indépendantes entre elles, lorsque la forme a_x^{m+1} est donnée. On voit ainsi que l'expression $(\lambda, a)_m$ peut représenter, dans tous les cas, toute forme b_x^{m+1} conjuguée à a_x^{m+1}.

Il est aisé d'obtenir l'expression de $(\lambda a)^m \lambda_x^m a_x$ sous la forme $\Sigma \mu_i (x x_i)^{m+1}$. Il suffit pour cela de considérer la formule (14) du n° 4, formule qu'on peut écrire comme il suit :

$$(ab) a_x^m b_x^m = \frac{1}{m+1} \sum \frac{b_{x_i}^{m+1}}{\Pi_i} p_i^2 \quad \text{où} \quad p_i = \frac{f}{(x x_i)}.$$

En changeant dans cette formule les x_1, x_2 en λ_2, $-\lambda_1$ et les b_1, b_2 en $-x_2$, x_1, on obtient, en effet,

$$(\lambda a)^m \lambda_x^m a_x = \frac{1}{m+1} \sum \frac{(\lambda, p_i^2)_{2m}}{\Pi_i} (x x_i)^{m+1}.$$

Il est à remarquer que la formule (13) du n° 4 peut aussi conduire à une représentation de la forme

$$(ac)^{m+1} b_x^{m+1} - (ab)^{m+1} c_x^{m+1}$$

(laquelle est manifestement conjuguée à f), par une expression

$$\Sigma \mu_i (x x_i)^{m+1}.$$

En remplaçant, en effet, dans la formule en question

$$f(x) g(y) - f(y) g(x) = \sum \frac{b_{x_i}^{m+1}}{\Pi_i} (xy) p_i(x) p_i(y),$$

les x_1, x_2 par les symboles c_2, $-c_1$, puis les symboles b_1, b_2 par $-x_2$, x_1, et enfin les y_1, y_2 par b_2, $-b_1$, on obtient

$$(ac)^{m+1} b_x^{m+1} - (ab)^{m+1} c_x^{m+1} = (-1)^m \sum \frac{(bc)(bp_i)^m (cp_i)^m}{\Pi_i} (x x_i)^{m+1}.$$

Dans le cas où la forme $g = b_x^{m+1}$ est conjuguée à f, $(ab)^{m+1}$ étant égal à zéro, la formule précédente donne la représentation de g sous la forme d'une somme

$$\Sigma \mu_i (x x_i)^{m+1},$$

par l'emploi auxiliaire de la forme c_x^{m+1} qui peut être quelconque (différente pourtant de f dans le cas où m est impair).

II.

Décomposition en fractions simples de $\frac{\varphi}{f^2}$.

9. J'arrive maintenant à la décomposition de l'expression rationnelle

$$\frac{\varphi}{f^2}, \quad \text{où} \quad \varphi = \varphi_x^{2m}, \quad f = a_x^{m+1},$$

en fractions simples.

Pour obtenir cette décomposition je procéderai de la manière suivante.

Je remarque que

$$\frac{\varphi_x^{2m}}{f^2}$$

peut être considéré comme le carré de l'expression symbolique

$$\frac{\varphi_x^m}{f},$$

laquelle, d'après la formule générale de décomposition (n° 2), doit être égale à

$$\frac{\varphi_x^m}{f} = \sum \frac{\varphi_{x_i}^m}{\Pi_i} \frac{1}{(x x_i)},$$

en supposant toujours que les racines de $f = 0$ soient inégales. Nous aurons ainsi l'identité

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\varphi}{f^2} &= \left[\sum \frac{\varphi_{x_i}^m}{\Pi_i} \frac{1}{(x x_i)} \right]^2 \\ &= 2 \sum \frac{\varphi_{x_i}^m \varphi_{x_j}^m}{\Pi_i \Pi_j} \frac{1}{(x x_i)(x x_j)} + \sum \frac{\varphi_x^{2m}}{\Pi_i^2} \frac{1}{(x x_i)^2}. \end{aligned} \right.$$

De cette manière la somme des fractions du premier degré dans le développement de $\frac{\varphi}{f^2}$ en fractions simples sera

$$(2) \qquad \frac{1}{D} \frac{l_x^m}{f} = 2 \sum \frac{\varphi_{x_i}^m \varphi_{x_j}^m}{\Pi_i \Pi_j} \frac{1}{(x x_i)(x x_j)} \quad (j > i).$$

D désignant le discriminant de la forme f. Quant à la forme $t = t_x^{m-1}$, elle constitue un covariant simultané des deux formes φ et f, dont les coefficients sont des expressions entières du premier degré par rapport aux coefficients de φ et de degré $2m - 1$ par rapport aux coefficients de f.

De même, la somme des fractions du second degré dans le développement considéré sera

$$(3) \qquad \frac{1}{D}\frac{\alpha_x^{2m}}{f^2} = \sum \frac{\varphi_{x_i}^{2m}}{\Pi_i^2}\frac{1}{(xx_i)^2},$$

$\alpha = \alpha_x^{2m}$ étant un covariant simultané des deux formes φ et f, du premier degré par rapport aux coefficients de φ et de degré $2m$ par rapport aux coefficients de f. Remarquons que, d'après le n° 4, la forme α doit être la jacobienne d'un faisceau $\lambda a_x^{m+1} + \mu b_x^{m+1}$; elle doit donc être de la forme $(ab)a_x^m b_x^m$.

10. Dans le cas où $D = 0$, les deux formes t et α, définies par les relations (2) et (3) précédentes, subsistent encore, quoiqu'elles ne correspondent plus aux sommes des fractions de premier et de second degré dans le développement de $\frac{\varphi}{f^2}$.

En supposant, en effet, que x_i et x_j soient les deux racines de f qui deviennent égales dans ce cas, on aura

$$t = \quad 2[\Pi_{ij}]\varphi_{x_i}^m \varphi_{x_j}^m \frac{f}{(xx_i)(xx_j)},$$

$$\alpha = -2[\Pi_{ij}]\varphi_{x_i}^m \varphi_{x_j}^m \frac{f}{(xx_i)(xx_j)},$$

où

$$[\Pi_{ij}] = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \Pi_1 \Pi_2 \ldots \Pi_{i-1}\Pi_{i+1} \ldots \Pi_{j-1}\Pi_{j+1} \ldots \Pi_{m+1}.$$

et cela en admettant que, dans le cas général, on a

$$D = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \Pi_1 \Pi_2 \ldots \Pi_{m+1}.$$

Maintenant, pour que les formes t et α deviennent identiquement nulles à la fois, il faut et il suffit que la condition $D = 0$ soit accompagnée par une des circonstances suivantes :

1° Que le facteur double $(xx_i) = (xx_j)$ de f entre aussi en facteur (au moins simple) dans φ;

2° Qu'il y ait encore une troisième racine de f qui devienne égale à $x_i = x_j$;

3° Qu'il y ait, en dehors de $x_i = x_j$, un autre couple de racines de f qui deviennent égales entre elles.

11. Tant que les deux formes t et $\alpha = (ab)a_x^m b_x^m$ ne deviennent pas identiquement nulles à la fois, elles peuvent être définies par la relation

$$(4) \qquad D\varphi_x^{2m} = a_x^{m+1} t_x^{m-1} + (ab)a_x^m b_x^m.$$

On voit par là que, dans le cas où $D \lesseqgtr 0$, la forme t ne peut être identiquement nulle que si φ est la jacobienne d'un faisceau

$$\lambda f + \mu g = \lambda a_x^{m+1} + \mu b_x^{m+1},$$

contenant la forme f. De même, lorsque $D \lesseqgtr 0$, la forme

$$\alpha = (ab)a_x^m b_x^m$$

ne peut être identiquement nulle que si la forme φ est divisible par $f = a_x^{m+1}$.

Dans le cas où $D = 0$, l'évanouissement identique de l'une des formes t, α entraîne l'évanouissement identique de l'autre [1].

12. Par suite de l'identité

$$\frac{1}{(xx_i)(xx_j)} = \frac{1}{(xy)}\left[\frac{(yx_i)}{(xx_i)}(x_j x_i)^{-1} + \frac{(yx_j)}{(xx_j)}(x_i x_j)^{-1}\right],$$

il se trouve que l'expression

$$\frac{1}{D}\frac{t}{f} = 2\sum \frac{\varphi_{x_i}^m \varphi_{x_j}^m}{\Pi_i \Pi_j} \frac{1}{(xx_i)(xx_j)}$$

peut être écrite comme il suit

$$(5) \qquad \frac{1}{D}\frac{t}{f} = -2\sum \frac{\varphi_{x_i}^m \varphi_{x_j}^m}{\Pi_i \Pi_j} \frac{1}{(x_i x_j)} \frac{(yx_i)}{(xy)(xx_i)}.$$

Pour obtenir la valeur du coefficient de

$$\frac{1}{\Pi_i} \frac{(yx_i)}{(xy)(xx_i)}$$

---

[1] Lorsque $D = 0$, la condition nécessaire et suffisante pour que φ puisse être mise sous la forme $ft + (f, g)_1$, est que φ admette comme racine k^{uple} toute racine $(k+1)^{\text{uple}}$ de f; mais alors il y a une k^{uple} infinité de déterminations pour les formes t et $(f, g)_1$. Cela correspond encore au problème de la décomposition de $\frac{\varphi}{f^2}$ en fractions simples.

dans cette expression, je remarque que, d'après la formule de décomposition (8) du n° 2, on doit avoir

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{x_i}^m \sum_j \frac{\varphi_{x_j}^m}{\Pi_j(xx_j)} &= \frac{\varphi_{x_i}^m \varphi_x^m}{f(x)} - \frac{\varphi_{x_i}^m \varphi_{x_i}^m}{(xx_i)\Pi_i} \\ &= \frac{\varphi_{x_i}^m \varphi_x^m}{(xx_i)p(x)} - \frac{\varphi_{x_i}^m \varphi_{x_i}^m}{(xx_i)p(x_i)}\end{aligned}\right\} \quad (\text{où } j \neq i).$$

Maintenant, si l'on fait $x = x_i$ dans cette relation, on obtient

$$\varphi_{x_i}^m \sum_j \frac{\varphi_{x_j}^m}{\Pi_j(x_i x_j)} = m \frac{(\varphi p)\varphi_{x_i}^{2m-1} p_{x_i}^{m-1}}{p(x_i)p(x_i)}$$

ou bien

$$\varphi_{x_i}^m \sum_j \frac{\varphi_{x_j}^m}{\Pi_j(x_i x_j)} = -\frac{m(m+1)}{2} \frac{(\varphi a)^2 \varphi_{x_i}^{2m-2} a_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i^2} \text{ (1)},$$

par suite de la formule (7) du n° 1.

On voit par là que le coefficient de

$$\frac{1}{\Pi_i} \frac{(yx_i)}{(xy)(xx_i)},$$

dans l'expression (5), sera

$$m(m+1) \frac{(\varphi a)^2 \varphi_{x_i}^{2m-2} a_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i^2}.$$

On aura de la sorte

$$\frac{1}{D} \frac{t}{f} = m(m+1) \sum \frac{(\varphi a)^2 \varphi_{x_i}^{2m-2} a_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i^3} \frac{(yx_i)}{(xy)(xx_i)}.$$

13. Envisageons maintenant la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{\varphi}{f^2}(x\,dx) = \frac{1}{D}\int \frac{t}{f}(x\,dx) + \frac{1}{D}\int \frac{\alpha}{f^2}(x\,dx),$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$(x\,dx) = x_1 dx_2 - x_2 dx_1.$$

L'application de la formule (11) du n° 3 à l'expression

$$\frac{1}{D}\int \frac{t}{f}(x\,dx) = m(m+1) \sum \left[\frac{(\varphi a)^2 \varphi_{x_i}^{2m-2} a_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i^3} \int \frac{(yx_i)}{(xy)(xx_i)}(x\,dx)\right]$$

---

(1) Cette formule paraît n'être qu'un cas particulier d'une autre plus générale, laquelle serait

$$-\frac{m(m+1)}{2}(\varphi, a)_2 = f^3 \sum \frac{\varphi_{x_i}^m \varphi_{x_j}^m}{\Pi_i \Pi_j} \frac{(x_i x_j)^2}{(xx_i)^3 (xx_j)^3} \qquad (i \neq j),$$

mais dont je n'ai eu l'occasion de vérifier l'exactitude que pour les cas de $m = 1, 2, 3$.

donne

$$(6)\quad \frac{1}{D}\int \frac{t}{f}(x\,dx) = m(m+1)\sum \frac{(\varphi a)^2\,\varphi_{x_i}^{2m-2}\,a_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i^3}\log(xx_i) + \text{const.}$$

D'une manière analogue, en appliquant la formule (18) du n° 5 à l'expression

$$\frac{1}{D}\int \frac{\alpha}{f^2}(x\,dx) = \sum\left[\frac{\varphi_{x_i}^{2m}}{\Pi_i^2}\int \frac{(x\,dx)}{(xx_i)^2}\right],$$

on obtient

$$\frac{1}{D}\int \frac{\alpha}{f^2}(x\,dx) = -\sum \frac{\varphi_{x_i}^{2m}}{\Pi_i^2}\,\frac{(xy)}{(xx_i)(yx_i)}.$$

Dans cette dernière formule, c'est y qui joue le rôle de la constante d'intégration. Toutefois il est aisé de mettre l'expression

$$-\sum \frac{\varphi_{x_i}^{2m}}{\Pi_i^2}\,\frac{(xy)}{(xx_i)(yx_i)}$$

sous une forme où les x et les y figurent séparément.

Pour cela, il suffit de remarquer que, par suite de l'identité symbolique

$$(yx)\varphi_{x_i} = (yx_i)\varphi_x - (xx_i)\varphi_y,$$

on a

$$\sum \frac{\varphi_{x_i}^{2m}}{\Pi_i^2}\,\frac{(yx)}{(xx_i)(yx_i)} = \sum \frac{\varphi_x\,\varphi_{x_i}^{2m-1}}{(xx_i)\Pi_i^2} - \sum \frac{\varphi_y\,\varphi_{x_i}^{2m-1}}{(yx_i)\Pi_i^2}.$$

On obtient ainsi la formule remarquable suivante :

$$(7)\qquad \frac{1}{D}\int \frac{\alpha}{f^2}(x\,dx) = \sum \frac{\varphi_x\,\varphi_{x_i}^{2m-1}}{(xx_i)\Pi_i^2} + \text{const.}$$

La valeur de cette intégrale, si l'on fait abstraction de la constante, se présente, comme on voit, sous la forme

$$\frac{1}{(m+1)D}\,\frac{s}{f},$$

où

$$(8)\qquad s = s_x^{m+1} = (m+1)\,D\sum \frac{\varphi_x\,\varphi_{x_i}^{2m-1}}{\Pi_i^2}\,\frac{f}{(xx_i)}$$

est une forme du $(m+1)^{\text{ième}}$ ordre laquelle constitue un covariant simultané des deux formes φ et f, du premier degré par rapport aux coefficients de φ et de degré $2m-1$ par rapport aux coefficients de f.

Le faisceau $\lambda f + \mu s = \lambda a_x^{m+1} + \mu s_x^{m+1}$ admet précisément pour jacobienne la forme α. Quant à la relation qui doit exister entre deux points x et y appartenant à une même forme de ce faisceau, elle est

$$\frac{f(x)s(y) - f(y)s(x)}{(xy)} = (m+1)\,\mathrm{D}\sum \frac{\varphi_{x_i}^{2m}}{\Pi_i^2}\,\frac{f(x)}{(xx_i)}\,\frac{f(y)}{(yx_i)} = 0.$$

14. Dans le cas où la forme s devient identiquement nulle, il en est naturellement de même pour la jacobienne $\alpha = (f, s)_1$.

Maintenant le cas où la forme α devient identiquement nulle a besoin d'être examiné de plus près, puisqu'alors il peut se faire ou bien que la forme s soit identiquement nulle ou bien qu'elle soit proportionnelle à f (égale, par exemple, à λf, pour $\lambda \lessgtr 0$).

Examinons d'abord le cas où $\mathrm{D} = 0$. Si les racines de f qui deviennent égales entre elles dans ce cas sont x_i et x_j, nous aurons, pour la forme s,

$$s = (m+1)[\Pi_{ij}].\varphi_x \varphi_{x_i}^{2m-1}\,\frac{f}{(xx_i)},$$

étant posé

$$[\Pi_{ij}] = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}\,\Pi_1\Pi_2\ldots\Pi_{i-1}\Pi_{i+1}\ldots\Pi_{j-1}\Pi_{j+1}\ldots\Pi_{m+1}.$$

L'évanouissement de α est accompagné, dans ce cas, par une des circonstances indiquées au n° 10.

Si la première de ces circonstances a lieu, c'est-à-dire si la forme φ devient nulle pour $x = x_i$, on voit que $\varphi_x \varphi_{x_i}^{2m-1}$ sera divisible par (xx_i). La forme s sera alors égale à λf, λ étant un coefficient qui ne devient nul que si la forme φ admet (xx_i) pour facteur double ou bien si, en même temps que l'on a $\varphi(x_i) = 0$, une des deux autres circonstances se présente.

La forme s devient aussi identiquement nulle si la deuxième ou la troisième des circonstances mentionnées a lieu, c'est-à-dire si la forme f admet une racine triple ou bien deux racines doubles.

Je passe maintenant au cas où, D étant différent de 0, on a $\mathrm{D}\varphi = ft$, par suite de $\alpha = 0$. On a alors

$$2m\,\mathrm{D}\varphi_x \varphi_{x_i}^{2m-1} = (xx_i)\,t_{x_i}^{m-1}.\Pi_i$$

et

$$s = (m+1)\,\mathrm{D}f\sum \frac{\varphi_x \varphi_{x_i}^{2m-1}}{(xx_i)\Pi_i^2} - \frac{(m+1)}{2m}\,f\sum \frac{t_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i}.$$

Mais comme, d'après le n° 2, on a $\sum \frac{t_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i} = 0$, on voit bien que la forme s est, dans ce cas, identiquement nulle.

Il est à remarquer que la forme s est aussi identiquement nulle toutes les fois que φ est divisible par f, et cela quel que soit D.

III.

Propriétés relatives à la forme s.

15. La forme s, définie dans ce qui précède par la relation

$$(1) \qquad s = s_x^{m+1} = (m+1)\,\mathrm{D} \sum \frac{\varphi_x \varphi_{x_i}^{2m-1}}{\Pi_i^2} \frac{f}{(xx_i)},$$

devient, comme nous venons de remarquer (n° 14), identiquement nulle toutes les fois que φ est divisible par f, quel que soit du reste D. C'est là un fait bien important et dont découlent des propriétés bien remarquables de cette forme.

Comme la forme s ne contient les coefficients de φ qu'au premier degré, on voit qu'elle ne doit pas être altérée lorsqu'on remplace φ par $\varphi + fh$, h désignant une forme quelconque d'ordre $m-1$. Parmi ces formes $\varphi + fh$ se distingue la forme $\varphi - \frac{1}{\mathrm{D}} ft$, laquelle constitue la jacobienne d'un faisceau contenant la forme f.

Tout cela fait voir que la forme s est déterminée, à un facteur constant près, toutes les fois qu'on donne la forme $f = a_x^{m+1}$ et le faisceau $\lambda a_x^{m+1} + \mu b_x^{m+1}$ qui doit contenir s.

Du reste, pour calculer la forme s, en partant de ces données, on n'a qu'à supposer

$$\varphi = (ab) a_x^m b_x^m,$$

dans l'expression précédente (1) de la forme s.

Ainsi, en remarquant que

$$\varphi_x \varphi_{x_i}^{2m-1} = (ab) a_x a_{x_i}^{m-1} b_{x_i}^m + \frac{1}{2}(xx_i)(ab)^2 a_{x_i}^{m-1} b_{x_i}^{m-1}$$

$$= \frac{1}{m+1} \Pi_i b_x b_{x_i}^m + \frac{1}{2}(xx_i)(ab)^2 a_{x_i}^{m-1} b_{x_i}^{m-1},$$

on obtient

$$s = \mathrm{D}\sum \frac{b_x b_{x_i}^m}{\Pi_i}\frac{f}{(xx_i)} + \frac{m+1}{2} f\,\mathrm{D}\sum \frac{(ab)^2 a_{x_i}^{m-1} b_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i^2}$$

$$= \mathrm{D}\, b_x^{m+1} + \frac{m+1}{2} f\,\mathrm{D}\sum \frac{(ab)^2 a_{x_i}^{m-1} b_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i^2}.$$

Si maintenant la forme s devait être proportionnelle à la forme b_x^{m+1}, le coefficient de f, dans l'expression précédente, devait être nul.

Cela montre que *les formes s, contenues dans l'expression*

$$s = (m+1)\,\mathrm{D}\sum \frac{\varphi_x \varphi_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i}\frac{f}{(xx_i)},$$

sont toutes liées à la forme $f = a_x^{m+1}$ par la relation invariante

$$\mathrm{D}\sum \frac{(as)^2 a_{x_i}^{m-1} s_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i^2} = 0. \tag{2}$$

En d'autres termes, les formes s considérées doivent être toutes conjuguées à la forme

$$\mathrm{D}\sum \frac{(xx_i)^{m-1} a_x^2 a_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i^2}, \tag{3}$$

laquelle constitue bien un covariant de f.

Il est à remarquer que, si l'on désigne par $\Delta = \Delta_x^{2m-2}$ le covariant

$$\Delta = (m+1)\mathrm{D}\sum \frac{(xx_i)^{2m-2}}{\Pi_i^2}$$

de f, la forme (3) *sera égale à* $(\Delta a)^{m-1}\Delta_x^{m-1} a_x^2$ [1].

16. Parmi les formes s il en existe toujours une qui soit composée par un facteur de degré m, $p = \frac{f}{(xx_i)}$, de la forme f et

---

[1] La forme Δ a la propriété d'être *conjuguée* (*voir* n° 6) par rapport aux premières polaires $a_y a_x^m$ de la forme f. Aussi satisfait-elle aux relations

$$(\Delta a)^m \Delta_x^{m-2} a_x = 0, \quad (\Delta a)^{m+1}\Delta_x^{m-3} = 0.$$

L'évanouissement identique de cette forme Δ constitue la condition nécessaire et suffisante pour que la forme f admette soit un facteur linéaire triple, soit deux facteurs linéaires doubles distincts. Il est aussi à noter que, si l'on désigne par Π la hessienne $(f, f)_2$ de f, on doit avoir

$$\mathrm{D} = -\tfrac{1}{2}(\Pi\Delta)^{2m-2}.$$

par un autre facteur linéaire (xz_i). Il est à remarquer que ce facteur (xz_i) coïncide avec la forme $p_x p_{x_i}^{m-1}$, c'est-à-dire qu'il représente le point (qui est centre) harmonique de premier degré de x_i par rapport au groupe des m points $p = 0$.

Cette propriété résulte simplement de ce que la forme s

$$s = (m+1)\,\mathrm{D} \sum \frac{\varphi_x \varphi_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i^2} \frac{f}{(xx_i)},$$

qui correspond à $\varphi = p^2$, est égale à

$$s = (m+1)\,\mathrm{D}\, p \frac{p_x p_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i}.$$

Ainsi donc *l'expression générale des formes s, dans le cas où les facteurs (xx_i) de f sont inégaux, est*

$$\Sigma \lambda_i p_x p_{x_i}^{m-1} \frac{f}{(xx_i)}, \quad \text{où} \quad p = \frac{f}{(xx_i)}.$$

17. De la proposition que nous venons d'établir, on peut aisément conclure que la relation invariante (2), par laquelle les formes s sont liées à f, peut être écrite de la manière suivante :

$$(5) \qquad s_0 \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial a_0} + s_1 \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial a_1} + \ldots + s_{m+1} \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial a_{m+1}} = 0,$$

étant supposé que

$$f = \sum \binom{m+1}{i} a_i x_1^{m-i-1} x_2^i, \quad s = \sum \binom{m+1}{i} s_i x_1^{m-i-1} x_2^i.$$

Pour cela, il suffit, évidemment, de prouver qu'il en est ainsi pour une quelconque des formes

$$(5) \qquad p(xz_i), \qquad \text{où} \qquad p = \frac{f}{(xx_i)}, \quad (xz_i) = p_x p_{x_i}^{m-1}.$$

Dans ce cas on doit, en effet, avoir

$$\sum s_k \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial a_k} = z_{i1} \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial x_{i1}} + z_{i2} \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial x_{i2}},$$

c'est-à-dire

$$\sum s_k \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial a_k} = 2\,\mathrm{D} \sum_j \frac{(z_i x_j)}{(x_i x_j)},$$

par suite de ce que

$$\mathrm{D} = (x_1 x_2)^2 (x_1 x_3)^2 \ldots (x_m x_{m+1})^2.$$

Comme maintenant

$$\sum_j \frac{(z_i x_j)}{(x_i x_j)} = \frac{1}{m} \frac{p_{z_i} p_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i} = 0,$$

on voit que la relation (4) est bien satisfaite pour chacune des formes (5) et, par conséquent, pour toutes les formes s considérées.

La propriété que nous venons de démontrer est intimement liée à ce fait que, dans le cas où la forme f admet un facteur double (xx'), la forme Δ (du n° 15) devient proportionnelle à $(xx')^{2m-2}$, tandis que la forme (3), c'est-à-dire la forme $(\Delta a)^{m-1} \Delta_x^{m-1} a_x^2$, devient proportionnelle à $(xx')^{m+1}$.

On sait en effet que, dans ce cas, les diverses dérivées

$$\frac{\partial D}{\partial a_0}, \frac{\partial D}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial D}{\partial a_{m+1}}$$

du discriminant D sont respectivement proportionnelles à

$$x_1'^{m+1}, \binom{m+1}{1} x_1'^m x_2', \ldots, x_2'^{m+1} \text{ (1)},$$

tandis que, d'après ce que nous venons de voir, on a, en général,

$$\left(x_1^{m+1} \frac{\partial D}{\partial a_{m+1}} - x_1^m x_2 \frac{\partial D}{\partial a_m} + \ldots \right) = -m(m+1)(\Delta a)^{m-1} \Delta_x^{m-1} a_x^2.$$

IV.

Propriétés relatives à la forme t.

18. Je passe maintenant à l'examen des propriétés relatives à la forme $t = t_x^{m-1}$, laquelle a été définie, dans ce qui précède (§ II), par la relation

$$(1) \qquad \frac{1}{D} \frac{t}{f} = 2 \sum \frac{\varphi_{x_i} \varphi_{x_j}^m}{\Pi_i \Pi_j} \frac{1}{(xx_i)} \frac{1}{(xx_j)},$$

ou bien par celle-ci :

$$(2) \qquad \frac{1}{D} \frac{t}{f} = m(m+1) \sum \frac{(\varphi a)^2 \varphi_{x_i}^{2m-2} a_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i^3} \frac{(yx_i)}{(xy)(xx_i)}.$$

Nous avons déjà vu que dans le cas où $D \leqq 0$, la forme t ne peut être identiquement nulle que si la forme φ est la jacobienne

(1) *Voir* Salmon, *Higher Algebra*, 3e édition, n° 113.

d'un faisceau contenant la forme f. Grâce à cette circonstance, l'étude des propriétés de cette forme t peut avoir son utilité dans l'étude des formes $\alpha = (ab)a_x^m b_x^m$, correspondant à des faisceaux contenant la forme f.

19. La comparaison de la formule (2) avec celle-ci :

$$\frac{t}{f} = \sum \frac{t_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i} \frac{(yx_i)}{(yx)(xx_i)}$$

(*voir* le n° 3), montre qu'on a

$$(3) \qquad \frac{1}{D} t_{x_i}^{m-1} = m(m+1) \frac{Q_i}{\Pi_i^2},$$

étant posé

$$Q_i = (\varphi a)^2 \varphi_{x_i}^{2m-2} a_{x_i}^{m-2}.$$

On doit bien remarquer que les $m+1$ expressions Q_i sont liées entre elles par la relation linéaire

$$(4) \qquad \sum \frac{Q_i}{\Pi_i^3} = \sum \frac{(\varphi a)^2 \varphi_{x_i}^{2m-2} a_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i^3} = 0,$$

laquelle est une conséquence de la formule (9) du n° 2.

20. On aurait pu arriver à la formule (3) de la manière suivante :

De la relation

$$D\varphi = (f, g)_1 + ft,$$

qui peut servir à définir les formes $\alpha = (f, g)_1$ et t, pour le cas où $D \gtrless 0$ (*voir* n° 11), on déduit la relation importante

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} &2m(2m-1)D(\varphi, f)_2 = m(m-1)f(f, g)_3 \\ &\quad + (m+1)(2m-1)t(f, f)_2 + (m-1)(m-2)f(f, t)_2. \end{aligned} \right.$$

En faisant maintenant $x = x_i$ dans cette relation, on obtient

$$\frac{2m}{m+1} DQ_i = t_{x_i}^{m-1} (aa')^2 a_{x_i}^{m-1} a'^{m-1}_{x_i},$$

formule qui ne diffère point de la formule (3), par suite de ce qu'on a (*voir* le n° 1)

$$\frac{(m+1)^2}{2} (aa')^2 a_{x_i}^{m-1} a'^{m-1}_{x_i} = -\Pi_i^2.$$

21. Dans le cas où la forme φ est la jacobienne d'un faisceau $\lambda f + \mu g$ contenant la forme f, la forme $(\varphi, f)_2$ a la propriété d'être divisible par f. La relation

$$\varphi = (f, g)_1$$

conduit, en effet, à

$$(6) \qquad (\varphi, f)_2 = \frac{m-1}{2(2m-1)} f(f, g)_3,$$

conformément à la formule (5) précédente.

On voit par là que, dans le cas considéré, on doit avoir

$$(7) \qquad Q_i = (\varphi a)^2 \varphi_{x_i}^{2m-2} a_{x_i}^{m-1} = 0,$$

pour toutes les racines x_i de f. Dans les cas où $D \gtrless 0$, on pourrait aussi déduire ce fait de ce que la forme t doit être identiquement nulle lorsque φ est la jacobienne d'un faisceau contenant la forme f.

Ainsi donc dans le cas où $D \gtrless 0$ (et aussi dans le cas où la forme f n'a qu'une seule racine double) les $m+1$ relations (7) suffisent bien pour exprimer que la forme f est contenue dans un faisceau ayant φ pour jacobienne. On doit toutefois remarquer que, dans ce cas, une de ces relations est une conséquence des autres, et cela d'après la relation (4) [1].

22. Par suite de la formule (7) du n° 1, la relation (7) précédente peut être écrite comme il suit :

$$(8) \qquad (\varphi p) \varphi_{x_i}^{2m-1} p_{x_i}^{m-1} = 0, \quad \text{où} \quad p = \frac{f}{(x x_i)}.$$

---

[1] Dans le cas où $D = 0$ et

$$f = (x x_1)^{k_1} (x x_2)^{k_2} \ldots (x x_n)^{k_n}, \qquad (k_i > 0),$$

il n'y a que n des relations (7) qui soient différentes entre elles.

On pourrait cependant, plus généralement, se demander, pour ce même cas, quelle est la nature des conditions qui découlent de la supposition que la forme $(\varphi, f)_2$ est divisible par f.

La réponse à cette question est la suivante :

Si x_i est une racine simple ou double de f (c'est-à-dire si $k_i = 1$ ou 2), la divisibilité de $(\varphi, f)_2$ par $(x x_i)^{k_i}$ n'implique qu'une seule condition (laquelle est $\varphi_{x_i}^m = 0$ dans le cas où $k_i = 2$). Mais, si l'ordre de multiplicité k_i de x_i est plus grand que 2, la divisibilité de $(\varphi, f)_2$ par $(x x_i)^{k_i}$ n'implique que *deux* conditions, consistant en ce que x_i doit être une racine double de φ. De cette manière on voit que si le nombre des racines *simples* et *doubles* de f est n' et que le nombre des racines restantes de f est n'', $2n'' + n'$ sera le nombre de conditions qu'implique la divisibilité de $(\varphi, f)_2$ par f (étant toujours supposé que D soit nul).

Cette relation exprime que la valeur de x pour laquelle on a $p_x p_{x_i}^{m-1} = 0$ doit satisfaire aussi à la relation $\varphi_x \varphi_{x_i}^{2m-1} = 0$ [1].

Il résulte donc des relations (7) ce fait, que *les jacobiennes* $\varphi = (f, g)_1$ *des faisceaux contenant une forme donnée* $f = a_x^{m+1}$ *sont toutes conjuguées aux* $m+1$ *formes*

$$(9) \qquad A_i = (xx_i)^{2m-2} a_{x_i}^{m-1} a_x^2 = \frac{2}{m+1} (xx_i)^{2m-1} p_{x_i}^{m-1} p_x.$$

Dans le cas où $D \gtrless 0$ ces $m+1$ formes sont toutes différentes entre elles et ne sont liées que par une seule relation linéaire

$$(10) \qquad \sum \frac{A_i}{\Pi_i^3} = \sum \frac{(xx_i)^{2m-2} a_{x_i}^{m-1} a_x^2}{\Pi_i^3} = 0,$$

laquelle est une conséquence de la relation (4).

On voit par là que, dans le cas considéré ($D \gtrless 0$), *l'expression générale des formes* A_x^{2m} *qui sont conjuguées aux jacobiennes* $\varphi = (f, g)_1$ *des faisceaux contenant une forme* $f = a_x^{m+1}$ (n° 7) *est*

$$(11) \qquad A_x^{2m} = \Sigma \mu_i (xx_i)^{2m-2} a_{x_i}^{m-1} a_x^2.$$

23. Lorsqu'on a un système linéaire à $m-1$ paramètres composé de formes d'ordre $2m$, le déterminant fonctionnel de ce système (*voir* n° 6) est une forme d'ordre $m(m+1)$ qui admet comme facteur linéaire $(k+1)^{\text{ple}}$ tout facteur linéaire $(m+k)^{\text{ple}}$ d'une des formes du système. Or nous savons que parmi les formes A_x^{2m}, lesquelles forment précisément un système linéaire à $m-1$ paramètres, il y en a $m+1$ qui admettent respectivement comme facteurs $(2m-1)^{\text{ples}}$ les $m+1$ facteurs linéaires de f : les $m+1$ formes en question sont les formes (9). Cela montre que *le déterminant fonctionnel du système des formes* A_x^{2m} *et, par conséquent, aussi le déterminant fonctionnel du système conjugué, constitué par les jacobiennes des faisceaux contenant la forme* f, *coïncide avec la* $m^{\text{ième}}$ *puissance de la forme* f.

C'est là une proposition qui constitue une généralisation assez curieuse de ce qui arrive pour le cas bien connu de $f = a_x^2$.

Dans le cas où $f = a_x^3$, les formes biquadratiques $\alpha = (f, g)_1$ sont en nombre doublement infini, tandis que les formes A_x^4 du

---

[1] Cette propriété aurait pu aussi être déduite de l'expression générale des jacobiennes des faisceaux contenant une forme $f = a_x^{m+1}$ donnée (*voir* n° 4).

système conjugué constituent un *faisceau* ayant f^2 pour jacobienne. Dans ce cas, il y a ceci de remarquable que les formes A_x^4 coïncident avec les jacobiennes α des faisceaux $\lambda a_x^3 + \mu b_x^3$ pour lesquels on a $(ab)^3 = 0$. De là il résulte que toutes ces formes A_x^4 sont équianharmoniques et conjuguées les unes aux autres.

Dans le cas où $f = a_x^4$, les formes A_x^6 sont en nombre doublement infini, et sont caractérisées par la propriété que leur covariant $i = (A, A)_4$ coïncide avec la forme $f = a_x^4$.

24. *La forme* Λ. — La relation linéaire

$$\sum \frac{Q_i}{\Pi_i^3} = 0$$

qui existe entre les $m+1$ expressions

$$Q_i = (\varphi a)^2 \varphi_{x_i}^{2m-2} a_{x_i}^{m-1},$$

fait voir que la forme

$$Q = (\varphi a)^2 \varphi_x^{2m-2} a_x^{m-1}$$

est conjuguée à la forme de degré $3m - 3$ suivante

$$\Lambda_x^{3m-3} = D \sum \frac{(x x_i)^{3m-3}}{\Pi_i^3}, \tag{12}$$

quelle que soit φ_x^{2m}.

Cette forme Λ_x^{3m-3} constitue un covariant entier (de degré $2m - 3$) de la forme f, jouissant des propriétés bien remarquables. Ainsi non seulement elle satisfait à la relation

$$(\Lambda a)^{m-1} \Lambda_x^{2m-2} a_x^2 = 0, \tag{13}$$

laquelle n'est qu'une autre forme de la relation (10), mais elle est aussi *conjuguée* aux formes f et $H = (f, f)_2$. Il est, en effet, aisé de voir que l'on a

$$(\Lambda a)^{m+1} \Lambda_x^{2m-4} = 0 \text{ (1)} \tag{14}$$

et

$$(\Lambda H)^{2m-2} \Lambda_x^{m-1} = 0. \tag{15}$$

---

(1) A côté des relations (13) et (14) il convient de placer cette autre

$$(m+1)^2 (\Lambda a)^m \Lambda_x^{2m-3} a_x = \Delta_x^{2m-2},$$

où figure la forme Δ considérée au n° 15.

Il est à remarquer que cette dernière relation est une conséquence des relations (13) et (14).

Dans le cas où $D \lessgtr 0$, l'équation (13) peut aussi être considérée comme une conséquence des relations (14) et (15), et cela grâce à la relation (5). Maintenant, si l'on voulait déduire des deux systèmes de conditions (14) et (15) l'expression de la forme Λ_x^{3m-3}, les valeurs des coefficients de cette forme qu'on aurait ainsi obtenues contiendraient D en facteur. Cela tient à ce que dans le cas où $D = 0$ les équations (14) et (15) peuvent aussi être satisfaites par une simple infinité de formes de degré $3m - 3$ (formes qui appartiennent à un faisceau).

Tant que $D \lessgtr 0$ la forme Λ ne saurait être identiquement nulle. Maintenant, lorsque $D = 0$ et qu'on suppose $(x_i x_j) = 0$, la forme Λ est égale à ce que devient la forme

$$\frac{D}{(x_i x_j)^2} \frac{1}{(x_i x_j)} \left[\frac{(x x_i)^{3m-3}}{q^3(x_i)} - \frac{(x x_j)^{3m-3}}{q^3(x_j)} \right],$$

où

$$q(x) = \frac{f}{(x x_i)(x x_j)},$$

lorsqu'on suppose que les x_i, x_j soient venus à coïncider. En d'autres termes, la forme Λ est, dans ce cas, proportionnelle à

$$D(q),\ (x x')^{3m-4} q_{x'}^{m-2} q_x, \qquad (x' = x_i = x_j),$$

$D(q)$ désignant le discriminant de la forme q_x^{m-1}.

On reconnaît par là que la forme Λ ne peut devenir identiquement nulle que lorsque f admet (au moins) deux couples de racines égales ou bien une racine quadruple. Ainsi donc *la condition nécessaire et suffisante pour que la forme f admette deux racines doubles distinctes, ou bien une racine quadruple, est exprimée par l'évanouissement identique de la forme*

$$\Lambda_x^{3m-3} = D \sum \frac{(x x_i)^{3m-3}}{\Pi_i^3}.$$

Dans le cas où $m = 2$, la forme Λ_x^3 coïncide avec $f = a_x^3$. Dans le cas où $m = 3$, la forme Λ_x^6 constitue le covariant sextique $T = (aa')^2 (aa'') a_x a_x'^2 a_x''^3$ de $f = a_x^4$.

Paris, août 1883.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

L. KRONECKER. — Festschrift zu Herrn E.-E. Kummer's Doctor-Jubilaeum.

Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen.

I.

Nous sommes ici en présence d'une recherche fondamentale. Une étude arithmétique des quantités algébriques, j'entends l'Arithmétique telle que Gauss l'a conçue, a permis à M. Kronecker de ramener l'étude de ces quantités à celle de formes dont les coefficients sont fonctions rationnelles, à coefficients entiers, de plusieurs variables indépendantes.

Le Mémoire se divise en deux Parties. Dans la première, M. Kronecker définit les quantités algébriques par un nombre quelconque d'équations entre un nombre également quelconque de variables; il les réduit et les classe en groupes déterminés. Dans la seconde il introduit une notion plus générale que celle de la divisibilité, une divisibilité de rang supérieur au premier, le rang *un* répondant à la divisibilité ordinaire. En associant aux nombres algébriques entiers les quantités indéterminées, il obtient des formes algébriques entières; l'étude de ces formes comprend la plus grande partie du Mémoire : c'est elle qui amène au résultat remarquable que j'ai énoncé en commençant.

La nature si abstraite des questions traitées, l'abondance des matières et enfin le vif désir qu'a éprouvé M. Kronecker de publier son Mémoire capital à l'occasion du cinquantième anniversaire du doctorat de M. Kummer, contribuent à rendre la lecture des *Grundzüge* particulièrement difficile.

Ce mot *Grundzüge* indique déjà qu'il n'a pu entrer dans la pensée de l'auteur d'écrire un Traité d'Algèbre, ni même un Mémoire dans le sens que l'on attache habituellement à ce mot. Ce qu'il a voulu, il le dit lui-même dans sa Préface, c'est indiquer, à grands traits, le point de vue, en grande partie nouveau, sous lequel il envisage l'Algèbre, et ce but peut être considéré comme atteint.

M. Kronecker a soin d'insister longuement sur plusieurs des points qu'il considère comme essentiels. Il est vrai que d'autres points essentiels sont laissés dans l'ombre ou se traduisent par de simples remarques auxquelles on est d'abord tenté de n'attacher qu'une importance secondaire. Mais ces remarques sont fort nombreuses; elles ont été, pour plus d'un des élèves de M. Kronecker, le point de départ de recherches intéressantes et contiennent sans doute encore le germe de plusieurs développements d'Arithmétique et d'Algèbre; pour pénétrer dans la pensée de l'auteur, il convient donc de les étudier avec soin.

L'introduction systématique des quantités indéterminées en Algèbre permet de simplifier considérablement toutes les recherches : aussi ces quantités jouent-elles un grand rôle d'un bout à l'autre du Mémoire.

Pour juger de la portée du travail de M. Kronecker, il importe beaucoup de remarquer que ses démonstrations sont concrètes, c'est-à-dire que chaque pas fait en avant est toujours accompagné de la représentation concrète, à l'aide de nombres entiers seulement, du résultat obtenu. M. Kronecker attache lui-même une grande importance à ne jamais s'écarter de ce principe.

II.

J'ai déjà dit que toute la première Partie du Mémoire est consacrée à la définition des quantités algébriques et à leur classification.

Nous rencontrons d'abord (§ 1, 4) la définition du *domaine de rationalité* et la réduction du domaine le plus général que l'on puisse concevoir à celui qui est formé par des quantités variables et une seule fonction algébrique de ces quantités. Cette réduction exige déjà la connaissance de la théorie générale de l'élimination (§ 10), c'est-à-dire de la décomposition en variétés d'ordres différents d'un système formé par un nombre quelconque d'équations à un nombre également quelconque d'inconnues, quelque particulières que soient ces équations. Un *domaine* qui ne contient pas de fonctions ou nombres algébriques est dit *naturel*.

Nous trouvons ensuite (§ 5) une classification naturelle des quantités algébriques :

Un GENRE *de quantités algébriques est formé par l'ensemble*

de toutes les quantités algébriques s'exprimant rationnellement les unes par les autres dans un domaine naturel de rationalité donné.

*L'*ORDRE *d'un genre est le degré des équations irréductibles que vérifient les éléments de ce genre.*

Une ESPÈCE *de quantités algébriques est formée par toutes les fonctions entières à coefficients entiers d'un nombre fini quelconque de quantités algébriques entières d'un genre déterminé.*

Chaque élément d'une espèce peut donc être exprimé par une fonction *linéaire* d'un nombre fini d'éléments de cette espèce, les coefficients de cette fonction linéaire étant entiers dans le domaine naturel de rationalité dont le genre fixé est dérivé.

Ce nombre fini d'éléments forme un *système fondamental* de l'espèce considérée. Toutes les quantités entières, contenues dans un même genre, font partie d'une même espèce, *l'espèce principale du genre*. Le nombre d'éléments d'un système fondamental d'une espèce se réduit parfois (§ 7) à l'ordre du genre dans lequel est contenue l'espèce. Cette réduction a lieu, par exemple, dans le cas particulier des *nombres algébriques*, ou encore (§ 12) lorsque l'on considère les espèces contenues dans les différents genres déterminés par les racines d'une équation dont les coefficients forment le domaine de rationalité. On ne sait pas encore si, dans ce dernier cas, les coefficients sont entiers.

La théorie de l'*élimination* (§ 10), qui n'avait jamais été traitée dans toute sa généralité, est esquissée à la suite d'un cas spécial dans lequel on considère le résultant de $n+1$ fonctions d'un nombre égal de variables et, en particulier, celui du système formé par n fonctions et leur déterminant fonctionnel.

Elle aboutit au résultat fondamental que l'idée de fonction algébrique donnée par plusieurs équations n'est pas différente de celle qui est donnée par une seule équation, et elle est suivie (§ 11) d'un exposé détaillé du *principe de Galois*, d'après lequel l'étude d'une équation de degré n, quelque particulière qu'elle soit, est ramenée à celle d'un genre de fonctions entières de n variables (§ 12), l'*affection* de l'équation particulière considérée.

Toutes les équations particulières ayant même affection forment une *classe* d'équations.

Les recherches qui précèdent (§ 8-9), et qui ont trait aux discriminants des genres et espèces, font partie de la théorie générale des invariants.

On nomme *discriminant* d'un genre ou d'une espèce déterminée (§ 8) le plus grand commun diviseur de tous les discriminants d'un système fondamental de cette espèce, et l'on démontre, entre autres, que le plus grand commun diviseur des discriminants de toutes les équations dont les racines font partie d'un même genre, est un diviseur d'une puissance du discriminant de ce genre. Il en résulte (§ 12) que, quelque particulier que soit le domaine de rationalité, dans tout genre dont le discriminant est différent de zéro, il est possible de trouver autant de fonctions que l'on veut, telles que toutes les autres fonctions du même genre puissent être exprimées rationnellement par la fonction choisie.

Ce théorème une fois établi, on ramène facilement (13), en suivant la marche de Gauss (1815), la question de l'existence des quantités algébriques en général, à celle plus simple de l'existence des quantités algébriques vérifiant une équation de degré impair, *à coefficients réels*.

Cette dernière question n'est pas traitée dans le Mémoire de M. Kronecker; mais elle a été exposée à plusieurs reprises dans son cours, et complète ses recherches.

Tel est le résumé de la première Partie du Mémoire.

III.

Dans la seconde Partie nous nous mouvons dans une sphère quelque peu différente. Les quantités algébriques entières sont considérées comme existantes, et c'est leur *divisibilité* dont nous abordons l'étude.

On dit que deux quantités algébriques entières sont divisibles l'une par l'autre, lorsque leur quotient est également une quantité algébrique entière.

En *associant* aux éléments d'une espèce, des fonctions linéaires à coefficients indéterminés de ces éléments, on peut étendre à leur *ensemble* l'idée de divisibilité et représenter (§ 14), sans aucune espèce de difficultés, leur plus grand commun diviseur. On peut donc représenter le plus grand commun diviseur d'un nombre quel-

conque de quantités algébriques entières données à l'aide de *formes algébriques,* c'est-à-dire de formes dont les coefficients font partie d'un domaine général de rationalité déterminé.

Ce résultat est entièrement conforme au point de vue général de M. Kronecker, d'après lequel il convient d'étudier toujours simultanément les nombres et les fonctions entières, l'Arithmétique et l'Algèbre.

Les paragraphes suivants contiennent une série de définitions et propositions fondamentales se rapportant aux diviseurs algébriques entiers que M. Kronecker nomme aussi *modules*, et aux formes algébriques entières qui sont, comme nous venons de le dire, intimement liées à ces diviseurs.

Nous y trouvons, en particulier, tout d'abord, la définition d'une unité algébrique, celle d'une forme proprement primitive, celle de l'équivalence absolue de deux modules et celle d'un module premier.

Une *unité algébrique* est une quantité algébrique entière dont la norme est égale à l'unité.

Une *forme proprement primitive* est une forme dont les éléments, c'est-à-dire les coefficients, n'ont aucun diviseur commun.

Deux diviseurs algébriques entiers sont *absolument équivalents* lorsqu'ils sont réciproquement contenus l'un dans l'autre.

Dans une espèce déterminée un diviseur algébrique entier est dit *premier* lorsqu'il n'est divisible par aucun des éléments de cette espèce, si ce n'est par ceux qui lui sont absolument équivalents ou encore qui sont absolument équivalents à l'unité. On peut toujours (§ 18) reconnaître si, pour un diviseur algébrique entier donné, cette condition est remplie, ce qui légitime la définition précédente.

Il est facile de s'assurer (§ 16) que les diviseurs algébriques entiers *linéaires,* ayant mêmes éléments, sont absolument équivalents. Deux diviseurs algébriques entiers quelconques, ayant mêmes éléments, sont également absolument équivalents ; mais la démonstration (§ 17) de ce dernier théorème qui ramène l'étude des diviseurs algébriques entiers quelconques à celle des diviseurs algébriques entiers linéaires exige plus d'attention.

On en déduit une propriété fondamentale des diviseurs algébri-

ques entiers premiers qui peut aussi être donnée comme définition de ces diviseurs :

Dans une espèce déterminée, un diviseur algébrique entier est PREMIER *lorsqu'il n'est pas absolument équivalent à un produit de diviseurs algébriques entiers de cette espèce.*

J'insiste sur ce que cette seconde définition de l'irréductibilité eût été illusoire si elle avait été donnée plus haut.

Nous trouvons plus loin un exposé du *principe de Kummer* et la détermination de l'*équivalence relative* de deux diviseurs algébriques entiers répondant exactement à la détermination de l'équivalence des idéaux, telle qu'elle est contenue dans le célèbre Mémoire de M. Kummer (*Journal de Liouville*, 2e série, t. XXXI) :

Deux diviseurs algébriques entiers d'une espèce donnée sont *relativement équivalents* lorsqu'il existe dans la même espèce un troisième diviseur, tel que les deux produits que l'on obtient en le multipliant par chacun des deux premiers soient absolument équivalents.

IV.

Après avoir ainsi exposé les principes de la théorie des diviseurs algébriques entiers, M. Kronecker passe à un autre groupe de recherches qui est entièrement nouveau.

A cet effet, il introduit tout d'abord (§ 20) des diviseurs de *rangs* différents; en d'autres termes, il généralise la notion de la divisibilité et étend à cette généralisation les mots *contenant* et *contenu*.

Une fonction entière de n variables CONTIENT *un système de fonctions entières, lorsqu'elle peut être exprimée par une fonction homogène et linéaire des éléments de ce système, dont les coefficients soient eux-mêmes fonctions entières des mêmes variables; le tout dans un domaine de rationalité déterminé.*

Le théorème fondamental est que la condition nécessaire et suffisante à laquelle doit satisfaire une fonction entière pour s'annuler en même temps qu'un système de fonctions entières qui, égalées à zéro, sont sans solutions multiples, est de *contenir* ce système dans le sens plus général donné maintenant à ce mot.

Le *rang* de divisibilité du système contenu correspond à la variété représentée par ce système égalé à zéro.

J'ai exposé tout au long [1] comment on pouvait être amené par des considérations élémentaires à faire cette généralisation et de quelle utilité elle pouvait être dans la théorie générale de l'élimination.

C'est un résultat important (§ 21) que l'on puisse *décomposer un système quelconque de modules* en ses diviseurs de rangs différents et qu'ensuite, pour un rang quelconque déterminé, on puisse *décomposer* dans un domaine de rationalité donné, chaque diviseur en ses facteurs irréductibles. Cette dernière décomposition est, pour le rang le plus élevé, en rapport intime avec les formules de Jacobi.

L'idée de divisibilité d'un rang quelconque amène à distinguer (§ 22) entre les formes *proprement primitives* dont les coefficients n'ont aucun diviseur commun de rang quelconque, et les formes *improprement primitives* dont les coefficients, tout en n'ayant aucun diviseur commun dans le sens ordinaire attaché à ce mot, ont cependant des diviseurs de rangs supérieurs au premier.

Les définitions et théorèmes relatifs aux diviseurs algébriques entiers sont ensuite traduits en définitions et théorèmes relatifs aux formes algébriques entières de rang un, et étendus aux formes algébriques de rangs quelconques.

M. Kronecker donne deux définitions de l'*équivalence absolue des formes de rang un*, l'une suivant le principe de Gauss, l'autre suivant celui de Kummer, mais en quittant le domaine restreint des nombres entiers, auquel se rapporte ces deux principes pour s'élever dans un domaine plus général, le domaine général de rationalité. Il montre ensuite l'identité de ces deux définitions. Cette identité repose sur le théorème cité (§ 17), que deux diviseurs algébriques entiers quelconques, ayant mêmes éléments, sont absolument équivalents.

Voici ces deux définitions :

1. *Deux formes homogènes et linéaires sont absolument équivalentes lorsqu'une substitution à coefficients entiers permet de les transformer l'une dans l'autre.*

---

[1] *Acta mathematica.*

2. *Deux formes quelconques sont absolument équivalentes lorsqu'elles ne* DIFFÈRENT *que par des facteurs proprement primitifs.*

Cette équivalence est une équivalence de rang un. Pour obtenir une équivalence de rang quelconque, il est nécessaire de généraliser encore l'idée de contenant et de contenu :

Une forme en CONTIENT *une autre, lorsque la première est équivalente, dans le sens précédent, à une fonction entière homogène de la seconde, prise plusieurs fois pour des systèmes différents d'indéterminées.*

Deux formes sont ABSOLUMENT ÉQUIVALENTES *lorsqu'elles sont contenues réciproquement l'une dans l'autre.* Cette définition comprend la précédente.

On démontre que, dans le sens de l'équivalence absolue qui vient d'être fixé, toute forme algébrique entière de rang quelconque peut être mise, et cela d'une seule manière, sous la forme d'un produit de formes premières, ce qui permet d'étendre l'idée d'irréductibilité aux formes algébriques entières de rangs quelconques.

Pour les formes de rang un, il y a identité entre cette idée d'irréductibilité et celle de l'irréductibilité des nombres entiers. Pour les formes de rang supérieur au premier, il y a cette différence, qu'en *composant,* de toutes les manières possibles, les formes premières, on n'obtient pas toutes les formes possibles.

M. Kronecker termine ce § 22, en insistant sur la nécessité de l'association des formes algébriques entières aux quantités algébriques entières pour étudier ces dernières de la manière *la plus simple possible* et à l'aide d'éléments aussi peu étrangers que possible à la nature du sujet.

Le § 23 est très court. Il ne contient que la définition de l'*équivalence relative* des formes algébriques entières. Le mot relatif se rapporte à une espèce déterminée.

Deux formes de rangs quelconques A *et* B *sont* RELATIVEMENT ÉQUIVALENTES *lorsqu'on peut déterminer deux quantités algébriques a et b telles que les produits* Aa *et* Bb *soient absolument équivalents.* Il importe de remarquer que les formes primi-

tives qui, d'après la définition de l'équivalence absolue donnée plus haut, peuvent paraître arbitrairement dans l'équivalence des produits Aa et Bb, doivent ici nécessairement faire partie de l'espèce déterminée relativement à laquelle on considère l'équivalence des deux formes A et B.

Une FORME FONDAMENTALE (§ 24) *est une forme dont les coefficients sont les éléments du système de diviseurs formé par la composition d'un système de diviseurs quelconque d'un genre déterminé et d'un système fondamental du même genre.*

Toute forme dont les coefficients sont des nombres algébriques entiers est équivalente à une forme fondamentale linéaire. Le § 24 contient un aperçu de la théorie de ces formes et une application des théories générales à ce cas particulier où le domaine de rationalité se réduit à l'unité.

Le dernier paragraphe (§ 25) débute par deux définitions importantes. L'une est celle des formes discriminantes, l'autre celle des équations fondamentales; toutes deux se rapportent à une espèce déterminée.

La *forme discriminante* d'une espèce déterminée d'ordre n est le plus grand commun diviseur de tous les discriminants de n formes algébriques quelconques de cette espèce; c'est l'invariant de l'espèce. Elle est égale au déterminant dont les n premières lignes sont formées par les éléments du système fondamental de l'espèce fixée et les conjugués de ces éléments, tandis que les lignes suivantes ne contiennent que des quantités indéterminées.

L'*équation fondamentale* d'une espèce déterminée est l'équation du degré n dont les n racines sont la forme fondamentale proprement primitive de cette espèce, et les $(n-1)$ conjuguées de cette forme fondamentale.

Nous voici arrivés au théorème fondamental vers lequel convergent toutes les recherches précédentes :

Le discriminant de l'équation fondamentale d'un genre déterminé est absolument équivalent à la forme discriminante du même genre, ou au moins ne contient que des diviseurs de cette forme de rangs supérieurs au premier, ou encore des nombres entiers, mais seulement lorsque le genre donné a des conjugués.

Ainsi, en particulier, pour les nombres algébriques, le discriminant de l'équation fondamentale du genre de Galois est absolument équivalent au discriminant de ce genre.

C'est ce théorème fondamental qui ramène la théorie arithmétique des quantités algébriques à celle de formes de rangs quelconques, dont les coefficients font partie d'un domaine *naturel* de rationalité.

Un résultat capital est donc atteint. La possibilité de s'affranchir de toute irrationalité, en Algèbre, est démontrée.

M. Kronecker n'effectue la démonstration que dans le cas des diviseurs de rang un, et termine son Mémoire en insistant sur l'importance de l'étude des singularités de la forme discriminante, étude commencée par M. Netto, et sur l'identité de cette étude et de celle des séries de Sturm. J. Molk.

É. MATHIEU, professeur à la Faculté des Sciences de Nancy. — Théorie de la capillarité. Paris, Gauthier-Villars, 1883, in-4°, 191 p.

Le nouvel Ouvrage de M. É. Mathieu embrasse et complète les découvertes de Laplace, de Gauss et de Poisson dans la théorie de la capillarité. Dans cette branche importante de la Physique mathématique, on se propose d'étudier l'équilibre des liquides mis en contact avec des corps solides. Laplace est le premier qui ait donné de l'action capillaire une explication rationnelle, bien qu'avant lui Thomas Young, assimilant la surface libre d'un liquide à celle d'une membrane également tendue dans tous les sens, eût trouvé l'équation aux différences partielles à laquelle satisfait cette surface. Gauss, à son tour, approfondit les principes de cette théorie : il chercha la fonction des forces qui régit le liquide. Cette fonction renferme, outre un terme qui provient de la pesanteur, deux intégrales sextuples ; mais par des transformations analytiques, Gauss les ramène à la somme de deux termes proportionnels, l'un à la surface libre du liquide, l'autre à la surface du vase touchée par le liquide. On sait que l'analyse de Gauss a été notablement simplifiée par M. Bertrand. Mais ni Laplace ni Gauss n'avaient tenu compte du changement de densité qui se produit à la surface libre et au voisinage des surfaces en contact avec un so-

lide. C'est Poisson qui combla cette lacune, à l'aide d'une analyse très savante, mais très laborieuse. Les équations auxquelles il parvient sont les mêmes que dans la théorie de Laplace ; seulement, les deux constantes qui y figurent prennent une signification plus compliquée. Mais il n'est pas nécessaire, comme le montre M. É. Mathieu, d'avoir recours à des calculs si difficiles pour modifier la signification des constantes capillaires.

Le Livre de M. Mathieu est divisé en cinq Chapitres.

Dans le premier, l'auteur, à l'exemple de Gauss, forme la fonction des forces dont la variation égalée à zéro donne l'équation générale du principe des vitesses virtuelles. Négligeant d'abord les changements de densité dans le voisinage des surfaces terminales, il retrouve par des raisonnements très simples le résultat obtenu par son illustre devancier; puis, à l'aide de très heureuses considérations synthétiques, il s'affranchit de la restriction d'une densité invariable et fait subir à l'équation de Gauss la correction que Poisson avait appliquée aux équations de Laplace. La relation générale ainsi obtenue contient l'explication de tous les phénomènes capillaires; l'auteur en conclut immédiatement l'équation différentielle de la surface libre du liquide, la constance de l'angle de raccordement, l'existence d'une tension superficielle, exerçant sur la paroi une action normale à la ligne d'intersection de la surface libre avec la paroi et tangente à la surface du liquide.

Dans le deuxième Chapitre l'auteur passe aux applications. Il calcule, en reproduisant l'analyse de Laplace, le poids du liquide soulevé dans un tube par l'effet de la capillarité. Il étudie ensuite l'élévation ou la dépression d'un liquide, soit auprès d'une lame verticale, soit entre deux plaques parallèles. Ce dernier cas donne lieu à une discussion intéressante, suivant que le liquide s'élève ou s'abaisse contre chacune des lames prise isolément. Le problème de l'élévation des liquides dans les tubes circulaires et capillaires fournit à M. Mathieu l'occasion de relever une singulière erreur commise par Poisson dans le calcul de la hauteur maximum. L'intégrale de l'équation du ménisque s'obtient facilement, lorsqu'on suppose très petit le rayon du tube : elle est la même pour un tube de révolution quelconque dont l'axe est vertical que pour un tube circulaire. Dans un tube de révolution, il peut y avoir plusieurs états d'équilibre si le rayon diminue par degrés insensi-

bles : ces divers équilibres sont en général alternativement stables et instables; c'est ce que Laplace avait entrepris de prouver : M. É. Mathieu substitue au raisonnement vague de Laplace une démonstration précise fondée sur les propriétés bien connues de la fonction des forces.

Le troisième Chapitre est en majeure partie consacré à l'étude des conditions d'équilibre des liquides en contact. Après avoir trouvé l'équation générale du principe des vitesses virtuelles qui régit le système des deux liquides, l'auteur examine le cas où le premier figure une goutte superposée au second. Une analyse très complète l'a conduit à la démonstration rigoureuse de ce théorème remarquable, admis sans raison suffisante dans les Ouvrages de Physique : les trois tensions superficielles relatives aux deux surfaces libres et à la surface de contact doivent se faire équilibre. Il faut donc que la plus grande de ces quantités soit plus petite que la somme des deux autres; si cette condition n'est pas remplie, le liquide le moins dense se répandra sur l'autre en couche infiniment mince. Le problème général de l'équilibre de deux liquides en contact se simplifie lorsque la densité est la même pour l'un et pour l'autre; c'est le cas des expériences célèbres de Plateau. On réalise ainsi un liquide sans pesanteur : la figure d'équilibre correspond à un minimum de la surface terminale. M. É. Mathieu restreint son analyse au cas des surfaces de révolution : la solution dépend des intégrales elliptiques; les courbes méridiennes des surfaces minima de révolution se composent d'une infinité d'arcs identiques : calculées pour la première fois par Beer, étudiées au point de vue géométrique par Delaunay, ces surfaces ont été divisées par Plateau, suivant leurs formes, en *onduloïdes* et en *nodoïdes*. Le nodoïde donne comme cas particulier la *caténoïde* qui a pour méridienne une chaînette et le cylindre circulaire droit. M. É. Mathieu montre que les conclusions que Plateau a déduites de ses expériences, relativement à la stabilité du cylindre circulaire droit, ne sont pas conformes à la théorie. On ne trouve dans l'Ouvrage de M. Mathieu aucune intégration relative aux surfaces d'aire minimum qui ne sont pas de révolution : l'auteur renvoie le lecteur aux travaux de Monge, de Riemann, de MM. O. Bonnet, Scherk, Schwarz, Enneper. Le Chapitre se termine par des calculs relatifs aux gouttes liquides suspendues dans les tubes capillaires; si l'on

applique la théorie au cas d'un tube cylindrique, on trouve que l'équilibre n'est pas possible. La contradiction entre l'expérience et la théorie s'explique par l'intervention du frottement, et M. Mathieu nous apprend à calculer dans ce cas la résistance opposée par la viscosité pour contribuer à l'équilibre.

Les forces qui élèvent ou abaissent un liquide en équilibre contre un corps solide exercent aussi une influence sur la pression supportée par ce corps. La modification de la pression hydrostatique fait l'objet du quatrième Chapitre. On y considère en premier lieu deux lames verticales parallèles plongées dans un liquide. En calculant l'attraction ou la répulsion apparente exercée sur l'une des lames par l'autre, Laplace avait négligé l'action de la couche superficielle du fluide. Poisson a le premier tenu compte de cette action, qui n'est pas nulle dans le cas où les deux faces de la lame sont de nature différente. M. Mathieu a réussi à faire subir à la formule de Laplace la correction voulue, sans modifier essentiellement le raisonnement très simple de l'illustre inventeur. Quand on tient compte de la capillarité, la poussée verticale qui sollicite un corps, immergé en partie dans un liquide, n'est plus donnée exactement par le principe d'Archimède. Pour calculer cette poussée, M. Mathieu fait d'abord usage de considérations synthétiques, qui font concevoir plus facilement le détail des phénomènes; mais la démonstration ainsi présentée est insuffisante : on n'y tient pas compte de certaines forces verticales, qui à la vérité s'entre-détruisent, comme l'auteur le prouve ultérieurement. La démonstration analytique que donne ensuite M. Mathieu ne laisse plus subsister aucun doute sur l'exactitude des résultats. Poisson avait abordé cette question par un côté très difficilement accessible; malgré l'habileté de son analyse, il n'était parvenu à déterminer l'effet des actions capillaires que dans le cas où le corps est de révolution et son axe vertical. M. É. Mathieu donne la solution du problème dans le cas d'un corps de forme quelconque. Cette généralisation est certainement l'un des résultats les plus remarquables de l'ouvrage que nous analysons.

Dans le cinquième et dernier Chapitre, il est question de l'élévation d'un liquide au moyen d'un disque circulaire horizontal. L'auteur donne l'expression connue du poids du liquide soulevé en fonction de la hauteur de la base inférieure du disque au-dessus

du plan de niveau, et de l'angle que fait avec l'horizon le plan tangent au bord supérieur du liquide (cet angle n'est pas, comme on serait tenté de le supposer, égal à l'angle de raccordement). Ces deux quantités ne sont évidemment pas indépendantes : elles sont liées par une relation que Laplace a déduite de l'équation approchée de la surface capillaire, dans le cas où le disque est très large, et que M. E. Mathieu obtient avec une approximation plus grande encore. La question précédente conduit naturellement au problème de l'équilibre d'une goutte de liquide posée sur un plan horizontal. On trouvera dans l'Ouvrage de M. Mathieu une démonstration originale du théorème de M. Bertrand sur le volume de la goutte. Dans l'expression de ce volume figurent l'épaisseur de la goutte, sa courbure moyenne au point le plus haut, l'aire et le périmètre de sa base. Afin de mettre en évidence la dépendance mutuelle de ces quantités, il faut faire des hypothèses sur la figure de la goutte. On se restreint au cas d'une goutte de révolution, qu'on suppose d'abord beaucoup plus large que haute. Dans ce cas, on peut intégrer l'équation différentielle de la surface libre, et l'on en déduit aisément les diverses dimensions de la goutte en fonction de son volume. Dans le cas d'une petite goutte, M. É. Mathieu obtient les deux coordonnées d'un point de la courbe méridienne au moyen de développements en série suivant les puissances ascendantes de l'angle φ formé par la tangente au méridien avec l'horizon. Ces développements ne sont suffisamment convergents que pour la partie supérieure de la goutte. A partir d'une certaine valeur φ_1 de l'angle φ, que l'on pourra prendre d'autant plus grande que le rayon de courbure au point le plus haut sera plus petit, on détermine le rayon variable d'un parallèle au moyen d'un autre développement en série : cette nouvelle série procède suivant les puissances ascendantes de la différence entre l'ordonnée verticale du point considéré et celle du point déterminé par l'angle φ_1. Lorsque la goutte a des dimensions moyennes, le calcul des séries ordonnées suivant les puissances de φ devient extrêmement pénible : on peut confondre la partie supérieure du méridien avec une ellipse ayant le même axe de symétrie. La recherche de la figure d'une goutte, suspendue à un solide qu'elle mouille, n'est pour ainsi dire pas un problème différent du précédent au point de vue analytique : il suffit de changer le signe d'une constante capillaire

pour passer des formules relatives au cas d'une goutte reposant sur un plan horizontal à celles du problème actuel. L'auteur applique ses développements en série à des exemples numériques. Le problème de la forme d'équilibre d'une goutte moyenne amène M. Mathieu à l'importante question de l'influence de la capillarité sur le baromètre. Laplace avait indiqué une méthode par quadrature pour déterminer la surface du ménisque mercuriel. Son procédé consiste à diviser le méridien en plusieurs parties qu'il assimile à des arcs de cercle. M. É. Mathieu obtient une exactitude plus grande en substituant aux arcs de cercle des arcs d'ellipse. Vers la fin du Chapitre se trouve reproduite une Table des dépressions barométriques, calculée autrefois par Bravais.

Dans tout le cours de cet Ouvrage, on trouvera des indications courtes, mais substantielles, sur les expériences qui confirment la théorie, et l'explication des désaccords apparents entre la théorie et certaines expériences; dans la plupart des cas, il faut chercher la raison de ces désaccords dans l'altération des surfaces liquides, qui modifie beaucoup l'angle de raccordement. R.

VERONESE. — Interprétations géométriques de la théorie des substitutions de n lettres particulièrement pour $n = 3, 4, 5, 6$ en relation avec les groupes de l'hexagramme mystique.

Le Mémoire de M. Veronese a été présenté au Concours institué pour 1881 par l'Académie royale de Belgique, Concours dont l'objet était la généralisation des propriétés de l'hexagramme mystique. Le prix n'a pas été accordé au Mémoire du géomètre italien; celui-ci a publié son travail dans les *Annali di Matematica* et l'a fait précéder de quelques pages assez vives où il reproduit et discute le Rapport de la Commission de l'Académie. Nous n'avons point à entrer ici dans cette polémique. Si la Commission académique n'a pas proposé de décerner le prix au Mémoire de M. Veronese, c'est sans doute que ce Mémoire ne répondait pas aux intentions des membres de la Commission; mais, d'un autre côté, qu'un Mémoire soit ou non conforme à quelque programme que ce soit, cela n'a rien à faire avec l'importance de

ce Mémoire, et les arguments par lesquels M. Veronese cherche à établir qu'il a atteint le but proposé n'ajoutent rien à l'indiscutable valeur de son travail.

Ce n'est pas, à son sens, dans la théorie des courbes ou des surfaces d'ordre supérieur qu'il y a lieu de chercher des généralisations ou des analogies à l'hexagramme mystique : les éléments que l'on peut, dans ces théories, essayer de substituer aux six points de la conique ne sont pas arbitraires comme ces six points, en sorte que les propriétés ne subsistent pas quand on effectue des permutations sur ces éléments, et cette permanence des propriétés des figures déduites de l'hexagramme mystique, quand on effectue une permutation quelconque sur les sommets, est le fonds même de la théorie de l'hexagramme : elle tient essentiellement à ce que la théorie des groupes de l'hexagramme n'est qu'une expression particulière de la théorie des substitutions de six lettres. Reprendre cette dernière théorie au point de vue des diverses interprétations géométriques dont elle est susceptible, montrer les liens de ces diverses interprétations et plus particulièrement comment elles dépendent de la théorie de l'hexagramme, tel est le but que s'est proposé l'auteur. Il débute par une interprétation générale de la théorie des substitutions de n lettres, interprétation faite dans un espace à $n-1$ dimensions, les n lettres étant regardées comme les coordonnées d'un point de cet espace; à chaque substitution correspond une homographie entre deux espaces à $n-1$ dimensions; l'étude de ces homographies, des figures qui répondent aux groupes de substitutions, des surfaces obtenues en égalant à zéro la fonction qui représente chaque groupe, conduit M. Veronese à un nombre considérable de propositions. Cette théorie d'une nature fort abstraite peut maintenant être interprétée dans l'espace ordinaire et dans le plan. M. Veronese y parvient en appliquant systématiquement la méthode qu'il a développée dans un Mémoire inséré dans le 29e volume des *Mathematische Annalen*, sous ce titre : *Behandlung der project. Verhältnissen der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens*. Étant donnée une configuration quelconque dans l'espace à $n-1$ dimensions, il en déduit, par projection univoque, sur l'espace et sur le plan des configurations qu'il appelle de même classe et dont les propriétés traduisent en

quelque sorte, dans le langage de la Géométrie ordinaire, les propriétés de la première configuration.

Après avoir étudié les substitutions de 3, 4, 5 lettres, leurs groupes et les figures correspondantes dans le plan, dans l'espace à trois et à quatre dimensions, l'auteur arrive à son objet principe, l'étude des groupes des substitutions de six lettres : c'est au moyen de la théorie même de l'hexagramme qu'il forme les substitutions de chaque groupe. Ainsi chacun des 15 triangles dont les côtés contiennent les 6 sommets reste inaltéré par 48 des 720 substitutions que l'on peut effectuer sur les 6 sommets; en d'autres termes, chacun de ces triangles représente un groupe de 48 substitutions; de même chacune des 60 droites de Pascal représente un groupe de 12 substitutions, etc. Le cas le plus intéressant est celui des figures, dites figures II, formées comme il suit : à l'hexagone 123456 par exemple correspond une droite de Pascal; en négligeant les 6 côtés de cet hexagone, il reste 9 des 15 côtés de l'hexagramme; avec ces 9 côtés, on peut construire 3 hexagones 135264, 136425, 153624; les 3 droites de Pascal qui correspondent à ces 3 hexagones se coupent en un point de *Kirkman*, qui correspond à la première droite de Pascal. Les 60 droites de Pascal et les 60 points de Kirkman correspondants se séparent en 6 groupes de 10 droites de Pascal et de 10 points correspondants de Kirkman, de façon que 3 droites de Pascal passent en chacun des 10 points et que 3 points de Kirkman soient situés sur chacune des 10 droites : chaque groupe constitue une figure II. Chaque figure II reste inaltérée par 120 des 720 substitutions qu'on peut opérer sur les 6 sommets et les 120 substitutions sont précisément celles qui constituent le groupe découvert par M. Serret, auquel correspond une fonction de 6 lettres qui n'est susceptible que de 6 valeurs. Les groupes de l'hexagone, ou les groupes correspondants des substitutions de 6 lettres une fois formés, donnent naissance, d'après le procédé qui a été antérieurement expliqué, à des propositions relatives à l'espace à cinq dimensions, propositions qui, par l'application du principe de projection, se traduisent dans l'espace ordinaire et dans le plan. Dans l'espace à cinq dimensions R_5 on fait correspondre à chaque sommet de l'hexagone 123456 un sommet de la pyramide fondamentale à laquelle on rapporte cet espace; par exemple, au sommet 1 de l'hexagone, on

fait correspondre le sommet de la pyramide fondamentale, dont les coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 sont respectivement x_1, 0, 0, 0, 0, 0. Dans ce même espace la conique circonscrite à l'hexagramme a des représentants : il suffit de remarquer que cette conique se transforme en elle-même quand on permute les six paramètres des six points; par suite, dans R_5, toute configuration, toute courbe ou surface, à 2, 3, 4 dimensions, qui passe ou non par les six sommets de la pyramide fondamentale et qui se transforme en elle-même par les permutations des six quantités $x_1, \ldots, x_6$, correspond à la conique. On voit ainsi nettement comment dans cet espace, on peut trouver des analogies directes à la théorie de l'hexagramme. Dans cette voie, une application particulière était tout indiquée : on peut regarder les six quantités $x_1, \ldots, x_6$ comme les coordonnées d'une droite de l'espace à trois dimensions, en prenant comme figure fondamentale les six complexes linéaires deux à deux en involution de M. Klein. Une droite quelconque donne alors lieu en général à un groupe de 720 droites, un point à un groupe de 360 points auquel correspond un groupe de 360 plans; M. Veronese met cette figure en correspondance directe avec l'hexagramme et parvient ainsi à des propositions nouvelles dont le développement forme la fin de son Mémoire.

J. T.

MÉLANGES.

SUR L'AUTHENTICITÉ DES AXIOMES D'EUCLIDE;

PAR M. PAUL TANNERY.

I.

Si l'on devait considérer les *Éléments* d'Euclide comme une œuvre réellement originale, il serait bien difficile d'admettre l'authenticité des *définitions*, des *postulats* et des *axiomes* qui précèdent les propositions du Livre I. C'est incontestablement un début qui n'est point à la hauteur de ce qui suit : autant l'ordonnance des problèmes et des théorèmes du Livre témoigne d'un

art consommé, ainsi que d'une méthode puissamment conçue et systématiquement poursuivie dans son développement peut-être un peu artificiel, autant la disposition des énoncés de l'Introduction offre, là où l'on devrait le moins s'y attendre, de l'incohérence et de singulières négligences.

Je ne m'arrête point aux définitions de la droite et du plan, dont l'obscurité est célèbre, ni à la proposition non démontrée que renferme la définition 17, que le diamètre divise le cercle en deux parties égales. Mais je dois signaler la classification des quadrilatères, où, après le carré, viennent l'ἑτερόμηκες (rectangle), qu'Euclide appelle constamment παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον, le ῥόμβος (losange), dont il ne parlera jamais, le ῥομβοειδές, terme auquel il substituera toujours celui de παραλληλόγραμμον. De même, d'après les définitions, pour les polygones en général, le nom devrait être formé en ajoutant au radical indiquant le nombre des côtés la terminaison πλευρόν : (ainsi, πολύπλευρον, multilatère); Euclide ajoute, au contraire, toujours la terminaison γωνον :(τρίγωνον, πεντάγωνον, etc.)(¹).

Quant aux postulats et axiomes, que je me propose d'examiner spécialement, il me faut en donner une traduction : je suivrai l'excellente édition de M. Heiberg (²) dont le premier Volume vient de paraître.

« *Postulats* (αἰτήματα).

» 1. Qu'il soit demandé de mener de tout point à tout point une ligne droite ;

» 2. Et de prolonger, en ligne droite et en continuité, une droite limitée ;

» 3. Et de décrire un cercle de tout centre et de tout rayon ;

» 4. Et que tous les angles droits soient égaux entre eux ;

(¹) Τετράγωνον exceptionnellement désigne non pas le quadrilatère en général, mais seulement le carré. Par conséquent, Euclide dit exceptionnellement aussi τετράπλευρον pour le quadrilatère en général ; il semble d'ailleurs avoir introduit le terme de τραπέζιον pour désigner le quadrilatère non parallélogramme.

(²) *Euclidis Opera omnia ediderunt* J.-L. Heiberg et H. Menge. — *Euclidis elementa edidit et latine interpretatus est* J.-Heiberg, Dr phil. Vol. I. Libr. I-IV continens. Leipzig, Teubner, 1883.

» 5. Et que, si une droite rencontrant deux droites fait du même côté des angles intérieurs dont la somme soit moindre que deux droits, les deux droites prolongées indéfiniment se rencontrent du côté des angles dont la somme est inférieure à deux droits.

» *Notions communes* (κοιναὶ ἔννοιαι).

» 1. Les choses égales à une même sont aussi égales entre elles;

» 2. Et si à des choses égales on ajoute des choses égales, les sommes sont égales;

» 3. Et si de choses égales on retranche des choses égales, les restes sont égaux;

» [4. Et si à des choses inégales on ajoute des choses égales, les sommes sont inégales];

» 5. Et les doubles d'une même chose sont égaux entre eux;

» [6. Et les moitiés d'une même chose sont égales entre elles];

» 7. Et les choses qui coïncident l'une avec l'autre sont égales entre elles;

» 8. Et le tout est plus grand que la partie;

» [9. Et deux droites ne comprennent pas d'espace] ».

Les trois premiers postulats ont un caractère tout particulier; ce ne peut certainement être qu'un profond penseur qui conçut le premier l'idée originale de réduire les constructions élémentaires au minimum de trois et de les *formuler en postulats*. Cette idée est, au reste, en parfait accord avec le plan d'Euclide, dont la seconde proposition est la solution d'un problème qui n'offre évidemment pas d'intérêt pratique : « Mener (avec la construction des postulats) à partir d'un point donné une droite égale à une droite lonnée. »

Mais ces postulats mis à part, l'impression que donne le reste

est que l'on a ultérieurement recherché dans le premier Livre des *Éléments* tout ce qui était admis sans démonstration et que les propositions formulées à la suite de cette recherche ont été classées tant bien que mal (¹).

Déjà Geminus (un siècle avant J.-C.) voulait séparer les postulats 4 et 5, qu'il considérait comme des théorèmes à démontrer.

Il avait incontestablement raison, en ce qui concerne le postulat 4; mais il semble évident que, si Euclide le premier avait formulé cette proposition, il ne se serait pas mépris sur son caractère, pas plus qu'il n'aurait été arrêté par la difficulté d'une démonstration; le fait est que, d'un bout à l'autre des *Éléments*, l'égalité des angles droits entre eux est prise comme n'ayant pas même besoin d'être postulée.

Quant au fameux énoncé relatif aux parallèles, il est au contraire certain qu'Euclide a dû essayer de le démontrer et renoncer à ses inutiles recherches; il le postule nettement, quoique sous une forme beaucoup plus brève, au cours de la prop. XXIX; mais il est incontestable que sa place logique n'est nullement après les postulats de construction, mais bien après la prop. XXVIII dont il est la réciproque. En rapprochant de celle-ci la prop. XVII : « La somme de deux angles quelconques d'un triangle est inférieure à deux droits », le caractère et la convenance du postulat des parallèles sont mis en toute lumière. Au début du Livre, sa formule est incontestablement malheureuse (²).

On sait que l'édition de Bâle et celle d'Oxford (Gregory) ont rejeté les postulats 4-5 à la fin des notions communes sous les n°s 10 et 11. Cet ordre était parfaitement justifié au point de vue de la convenance de distinguer ces postulats de ceux de construction; mais il est non seulement en contradiction avec l'autorité des meilleurs manuscrits et avec le témoignage de Geminus, mais encore avec le caractère de la seconde série d'énoncés, caractère

---

(¹) Voici, pour chaque postulat et axiome, le numéro de la première proposition où il est employé :

Postulats : 1 (prop. I), 2 (prop. II), 3 (prop. I), 4 (prop. XIV), 5 (prop. XXIX).
Notions communes : 1 (prop. I), 2 (prop. XIII), 3 (prop. III), 4 (prop. XVII), 5 (prop. XLII), 6 (prop. XXXVII), 7 (prop. IV), 8 (prop. VI), 9 (prop. IV).

(²) Gregory pensait qu'il avait dû être posé originairement en corollaire de la prop. XXVIII, avec le rapprochement que j'indique.

indiqué par leur titre *Notions communes* (¹), qui désigne des propositions n'étant pas spéciales à la Géométrie.

Au contraire, plusieurs manuscrits, et des meilleurs, ajoutent aux postulats la prétendue notion commune 9, que Proclus rejette expressément ainsi que trois autres 4, 5, 6; M. Heiberg considère ces quatre propositions comme interpolées, et il ne peut, je crois, y avoir de doutes à cet égard. Le n° 9 a été, en tout cas, tiré du texte même d'Euclide (prop. IV) : « Deux droites comprendront un espace, ce qui est impossible. »

Les trois premières notions communes étaient les seules reconnues par Héron, et ce fait, malgré l'appui que prête Proclus aux notions 7-8, ébranle singulièrement l'autorité de toutes les autres. On peut remarquer que le n° 1 est textuellement reproduit dans la prop. I.

M. Heiberg pense que le n° 4 a pu être emprunté au Commentaire de Pappus, qui avait démontré que l'addition de quantités égales ne change pas la différence. Je ne suis guère disposé à admettre cette hypothèse; je penserais plutôt que ces interpolations sont antérieures à Héron d'Alexandrie, peut-être même à Apollonius de Perge, s'ils avaient réagi contre elles. Mais je crois que M. Heiberg a eu entièrement raison d'écarter complètement la contrepartie de cet axiome, qui forme le n° 5 de l'édition de Gregory : « Si de choses inégales on retranche des choses égales, les restes sont inégaux. »

En effet, Euclide n'emploie pas cet axiome dans son premier Livre (²), et son adjonction aux autres a dû être de date relativement récente, comme l'indique le silence des autorités les plus anciennes.

En tout cas, la formule de la notion 4 est assez malheureuse; le sens de l'inégalité devrait être indiqué.

Les n°s 5 et 6 se retrouvent à peine modifiés dans le texte d'Euclide, prop. XXXVII et XXXVIII : « Les moitiés de choses égales sont égales entre elles », et, prop. XLVII : « Les doubles de choses égales sont égaux entre eux ». M. Heiberg pense qu'il y a eu interpolation dans le texte, et qu'Euclide s'était servi en réalité

(¹) Proclus les appelle *axiomes*, mais il spécifie nettement leur caractère de communauté aux diverses branches des Mathématiques.

(²) Il ne se trouve pas appliqué avant la prop. XVII du Livre III.

des notions 3 et 2. Je ne puis guère adopter cette opinion, car il faut toujours supposer que les notions 5 et 6 ont été déduites du raisonnement d'Euclide, et l'on ne comprendrait guère pourquoi l'interpolation de l'axiome dans le texte aurait été faite là et non pas aussi prop. XLII, pourquoi on n'aurait pas de même interpolé les autres notions communes qui ne se retrouvent pas explicitement dans Euclide. D'autre part, si 5 fait évidemment double emploi avec 2, il n'en est point tout à fait de même de 6 et de 3 (¹).

Quant aux notions communes 7 et 8, elles me paraissent également ne pas davantage appartenir à Euclide, malgré l'autorité de Proclus.

L'énoncé 7 a un caractère géométrique incontestable qui aurait dû le faire exclure des notions communes; d'autre part, il est difficile de voir pourquoi il n'est pas accompagné de sa réciproque, au moins pour les lignes droites, réciproque dont Euclide doit user en premier lieu. En fait, il y a là une définition de l'égalité géométrique, définition plus ou moins suffisante, mais il n'y a pas d'axiome véritable.

Enfin l'énoncé 8 remplace une expression différente d'Euclide : la prop. VI : « Le moindre sera égal au plus grand, ce qui est absurde ». C'est une abstraction substituée à l'intuition de la figure géométrique; abstraction qui, d'ailleurs, se réduit à une définition plus ou moins insuffisante du tout et de la partie, si l'on veut la dégager de sa spécialité géométrique et en faire réellement une notion commune.

II.

Les résultats de cette discussion sont donc les suivants :

Si l'on veut ne conserver comme véritablement euclidiens que les axiomes réellement dignes de l'auteur des *Éléments*, on est conduit à ne lui attribuer, au premier abord, que les trois premiers postulats et peut-être aussi les trois premières notions communes. Mais, pour ces dernières, le doute est très sérieux; car il paraît en même temps que l'illustre géomètre ne se serait nullement astreint à ne faire usage sans démonstration que de ces six

(¹) En fait, 6 doit se démontrer par l'absurde en employant 5, c'est-à-dire 2.

propositions; mais la rigueur extrême de sa méthode conduisit naturellement à rechercher dans son œuvre les autres propositions qu'il avait admises explicitement ou implicitement. On aurait dû, suivant leur nature, ou bien les démontrer en lemmes intercalés à l'endroit convenable, ou bien les classer soit avec les notions communes, soit comme postulats distincts de ceux de construction. Le travail ne fut pas accompli comme il aurait dû l'être, et le classement resta passablement arbitraire, comme le montrent les discordances des autorités les plus anciennes, et passablement incohérent, comme j'ai essayé de le montrer.

Mais l'aspect de la question change tout à fait, si l'on réfléchit que le degré de perfection des premiers Livres des *Éléments*, que les derniers à dire vrai sont loin d'égaler, ne doit pas être considéré comme provenant exclusivement du travail d'Euclide, que de nombreux précurseurs y ont contribué; qu'il n'a fait qu'y mettre la dernière main. Dès lors, il est possible que l'ensemble des observations qui précèdent tombe à faux, en ce sens que ce que nous avons supposé fait par un successeur d'Euclide sur son œuvre peut avoir été fait en réalité par lui sur l'œuvre d'Eudoxe ou de Théétète. Si nous pouvons maintenir que ce n'est pas l'inventeur des postulats de construction qui leur a accolé la proposition sur les parallèles, rien ne nous prouve que cet inventeur ait été Euclide.

Le langage de Geminus, tel que Proclus le rapporte (éd. Friedlein, p. 183-192), prouve très nettement que, de son temps, l'authenticité des cinq postulats, en tant qu'adoptés par Euclide lui-même, ne soulevait aucun doute. On ne peut guère en élever non plus contre l'ensemble des définitions; leur attribution à Euclide est d'autant plus certaine que, bien avant l'époque de Geminus, il y avait d'autres définitions élémentaires courantes, dont certaines auraient dû être préférées à celles que nous retrouvons au début des *Éléments*. Pour les notions communes, la question est moins claire; Geminus ou Proclus s'expriment assez vaguement; ils constatent les divergences des manuscrits et des auteurs et ne s'appuient que sur l'usage fait par Euclide de ces notions, raison qui n'est nullement décisive.

En se plaçant dans ce nouvel ordre d'idées, on serait conduit à admettre qu'Euclide se trouvait en présence, pour son premier

Livre, de matériaux déjà très profondément élaborés et d'un plan général déjà parfaitement défini. Il n'aura pas cru devoir s'imposer une refonte des définitions; elle lui a paru inutile et il a jugé à propos notamment d'y conserver une terminologie qu'il était cependant décidé à ne pas employer, mais dont les lecteurs pouvaient réclamer l'explication.

Aux trois postulats de construction, il a pu ajouter les deux autres: dans ce cas, la célèbre proposition sur les parallèles serait bien de lui; quant à l'égalité des angles droits, elle est supposée admise non seulement dans cette proposition, mais dans la définition des angles aigus, obtus, etc.; la démontrer l'eût obligé à refondre les définitions et à remanier l'ordonnance du début, ce qu'il voulait sans doute éviter, d'autant que les choses étaient déjà sans doute consacrées et ne soulevaient aucune difficulté.

Quant aux notions communes, elles ne seraient pas de lui; il les aurait employées comme allant de soi ou comme supposées par les définitions; l'attention ne se serait portée sur cette question qu'à l'époque d'Apollonius, qui essaya de démontrer [1] ces propositions et reconnut leur liaison avec la définition de l'égalité et des opérations de l'addition et de la soustraction géométriques. Les éditeurs successifs d'Euclide auraient pris depuis lors l'habitude d'insérer un recueil plus ou moins complet de ces notions, suivant le point de vue auquel ils se plaçaient, et la tradition serait restée longtemps assez flottante à cet égard.

En tout cas, il ne faut pas croire que les postulats et les notions communes représentent tout ce qu'Euclide admet de fait dans ses démonstrations. Dès sa première proposition : « Construction d'un triangle équilatéral sur une base donnée, » nous le voyons admettre, sans démonstration, que les deux cercles qu'il trace se coupent, et il serait facile de multiplier des exemples semblables.

En somme, nous nous trouvons en présence de trois opinions : en premier lieu, celle qui attribuerait à Euclide la rédaction des postulats et des notions communes, sauf les suppressions opérées par Heiberg; celle qui ne lui laisserait que les postulats et que je viens d'exposer; celle enfin qui nierait l'authenticité des deux

---

[1] *Voir* mon Essai : *Quelques fragments d'Apollonius, de Perge*, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. V, 2e série.

derniers postulats et celle des notions communes, opinion que j'ai développée plus haut.

Pour faire un choix raisonné entre ces trois opinions, il faut nécessairement recourir à d'autres considérations que celles que nous avons pesées jusqu'à présent, et examiner les habitudes d'esprit des mathématiciens de la même époque.

Trois seulement peuvent être mis en ligne de compte, Autolycus de Pitane, Aristarque de Samos et Archimède.

Du premier, qui vivait un peu avant Euclide, il nous reste deux petits Traités : *Sur le mouvement de la sphère* et *Sur les levers et couchers*.

Le texte grec, dont M. Hultsch prépare une édition, n'est pas encore connu ([1]), mais les définitions et les énoncés des propositions ont été publiés en 1572, par Dasypodius, en 1877 par Hoche.

Or le Livre *Du mouvement de la sphère* commence par deux définitions, que voici :

« 1. Des points sont dits se mouvoir uniformément lorsqu'ils parcourent en des temps égaux des grandeurs égales et semblables.

» 2. Si un point porté sur une ligne parcourt uniformément deux lignes, le rapport sera le même entre les temps dans lesquels il parcourt chaque ligne et entre les deux lignes. »

Il est clair que cette seconde définition est, en réalité, un *postulat*, et nous apprenons ainsi qu'immédiatement avant Euclide, il n'était pas de règle de distinguer avec précision les définitions et les axiomes, que tout était où au moins pouvait être rangé sous une même rubrique. Il y a là un fait considérable.

Le Livre d'Aristarque de Samos, *Sur les grandeurs et distances du Soleil et de la Lune* ([2]), débute par cinq *thèses* ou

---

([1]) L'illustre éditeur de Héron et de Pappus comblera ainsi une lacune bien fâcheuse pour l'histoire des Mathématiques; si Autolycus qui, de fait, est le plus ancien mathématicien grec dont il nous reste un Ouvrage entier, a été négligé jusqu'à présent, c'est d'ailleurs parce qu'on avait pris ses démonstrations pour des scolies récents; de même que l'on a, pendant quelque temps, attribué à Théon d'Alexandrie les démonstrations d'Euclide.

([2]) Aristarque de Samos vivait à peu près à la même époque qu'Euclide, mais devait être un peu plus jeune.

hypothèses qui sont supposées représenter des résultats d'observation. Mais le nom que portaient à l'origine ces propositions est en réalité douteux; elles se trouvent dans le même cas que les sept propositions analogues qui commencent les *Optiques* d'Euclide, et qui sont appelées aussi tantôt *thèses*, tantôt *définitions optiques* (ὀπτικοὶ ὅροι), quoiqu'elles n'aient nullement le caractère de définitions.

Euclide commence ces dernières propositions par le mot ὑποκείσθω (qu'il soit supposé); ce mot manque devant les propositions analogues d'Aristarque, où le verbe est à l'infinitif.

Il est parfaitement possible, au reste, qu'Euclide n'ait nullement inscrit αἰτήματα en tête de ses postulats géométriques; mais, en tout cas, il les a nettement distingués des définitions précédentes en les commençant par ἠτήσθω (qu'il soit demandé). On a pu remarquer qu'il n'y a aucune forme semblable pour les notions communes, et il y a là une raison qui milite contre leur authenticité.

Archimède commence son premier Livre : *Des équilibres des plans*, par une série de *postulats* de statique; αἰτούμεθα (nous demandons).

Dans le préambule de la *Quadrature de la parabole*, il désigne sous le nom de *lemme* cette proposition que, « si deux aires sont inégales, leur différence peut toujours être multipliée par un nombre tel que le produit dépasse toute aire donnée ». Ce lemme, qui paraît remonter à Eudoxe, correspond de fait dans Euclide à une *définition* (VI, 4).

Le Traité *De la sphère et du cylindre* débute par six *axiomes* (ἀξιώματα) qui sont de véritables définitions, et par cinq *lemmes* (λαμβανόμενα), qui sont, au contraire, de véritables *postulats*.

Les autres Traités d'Archimède ne nous apprennent rien de plus.

III.

Les derniers rapprochements que je viens de faire sont évidemment favorables à l'hypothèse qui ferait des αἰτήματα une invention propre à Euclide. Avant lui, ils ne semblent pas trop en usage; après lui, Archimède les imite en Statique, tandis qu'en Géomé-

trie, pour respecter les *Éléments,* s'il introduit de nouveaux postulats, il les désigne sous un nom nouveau.

Pour l'authenticité des notions communes, elle n'a, au contraire, reçu aucun appui, et nous pouvons maintenant mettre en avant contre elles de nouvelles raisons.

Si Euclide avait conçu le projet de distinguer les postulats suivant qu'ils sont communs aux diverses branches des Mathématiques ou qu'ils sont spéciaux à la Géométrie, il n'aurait certainement pas placé la première classe au second rang, et, d'autre part, il ne l'aurait pas désignée sous le nom de *notions communes.*

J'appelle spécialement l'attention sur ce nom; il est clair que si la seconde série de postulats est d'Euclide, le terme de κοιναὶ ἔννοιαι est évidemment aussi de lui. Car une distinction était nécessaire, et s'il avait adopté un autre terme, comme celui d'axiome (hypothèse en désaccord au reste avec l'usage d'Archimède), on ne peut concevoir pourquoi ce terme d'axiome aurait été remplacé ensuite par un autre beaucoup moins convenable.

Le mot ἔννοια, de fait, n'a jamais signifié *proposition*, mais bien *perception* et *notion.* La désignation est donc impropre, et il aurait fallu dire, par exemple : τὰ λαμβανόμενα κατὰ τὰς κοινὰς ἐννοίας (ce qui est admis selon les notions communes).

Ce terme d'ἔννοια, d'autre part, n'est nullement de la langue philosophique de l'époque; on le chercherait vainement avec une signification technique dans l'œuvre de Platon ou dans celle d'Aristote; il appartient aux stoïciens ([1]) dont l'école commençait seulement au temps d'Euclide et dont il ne pouvait subir l'influence à Alexandrie.

Peut-être par une heureuse fortune, ce mot se trouve dans les fragments d'Apollonius que j'ai essayé de reconstituer d'après Proclus et le pseudo-Héron.

Proclus (p. 100, l. 6) : « Disons avec Apollonius que nous avons la notion de ligne (γραμμῆς ἔννοιαν) ».

Cette coïncidence vient à l'appui de la conjecture émise plus haut, que la rédaction des *notions communes* date du temps d'Apollonius, et qu'elle aurait été provoquée par son travail sur les *Éléments.* Elle serait ainsi d'environ un siècle postérieure à Euclide.

([1]) *Voir* l'Index du *Doxographi Græci* de Diels: Berlin, 1879.

Il reste, dans cette conclusion, un certain nombre d'éléments hypothétiques ; je crois cependant avoir suffisamment montré l'impossibilité d'attribuer les *notions communes* à Euclide pour ne pas avoir besoin de revenir sur ce sujet.

Quant à la question des postulats, elle reste obscure, et je ne prétends pas la trancher de même ; mais j'incline à revenir à la première opinion que j'ai exposée.

S'il est prouvé que le texte antérieur aux propositions n'a pas été respecté, il reste possible que les deux derniers postulats aient été ajoutés aux trois premiers en même temps que l'on rédigeait les *notions communes*. Il me semble plus glorieux pour Euclide de n'avoir formulé que les trois postulats de construction.

Cependant il est clair que les postulats d'Archimède n'ont nullement ce caractère constructif, et le fait mérite d'être pris en considération.

On sera peut-être curieux d'avoir quelques détails sur la signification des termes d'αἴτημα et d'ἀξίωμα dans la langue philosophique au temps d'Euclide, telle qu'elle nous apparaît dans Aristote (*Analytica post.* I, 10).

« Tout ce qui est démontrable et que l'on prend comme admis sans le démontrer est une *hypothèse*, si elle est conforme à l'opinion de celui qui reçoit l'enseignement... ; si celui-ci n'a pas d'opinion ou s'il a une opinion contraire, c'est un *postulat*. C'est en cela que diffèrent l'hypothèse et le *postulat*. Le postulat est ce qui choque l'opinion de celui qui reçoit l'enseignement, ou ce que l'on prend sans le démontrer et dont on se sert sans l'avoir prouvé. »

Ce passage montre qu'Euclide a certainement détourné quelque peu le sens du mot αἴτημα, mais aussi qu'il était employé avant lui, quoique probablement seulement en dehors des Mathématiques.

Pour le mot axiome, Aristote l'emploie à peu près dans le même sens que nous, et il nous apprend qu'il était en usage chez les mathématiciens, mais particulièrement pour désigner les *notions communes* (τὰ κοινὰ λεγόμενα ἀξιώματα). Il cite même comme exemple que, si on retranche des choses égales de choses égales, les restes sont égaux. Il distingue, au reste, dans toute science apodictique, trois éléments de la démonstration : 1° ce qui est posé comme étant, et pris comme étant de telle manière ; en Géomé-

trie, les points et les lignes; 2° les axiomes dits communs, qui sont les points de départ des démonstrations; 3° les affections (τὰ πάθη) des éléments posés en premier lieu, affections dont la signification est prise suivant des définitions; ainsi le géomètre pose ce que signifie une grandeur irrationnelle, une ligne brisée sur une autre ligne ou dirigée vers un point, et il démontre l'existence de ces affections en se servant des axiomes communs et de ce qui a déjà été démontré.

« Mais », ajoute-t-il, « rien n'empêche que certaines sciences passent sous silence certains de ces éléments quand ils sont évidents... Ainsi, on ne prend même pas les axiomes communs, ce qui signifie retrancher les choses égales de choses égales, parce que c'est connu immédiatement. »

En résumé, Aristote ne semble pas connaître les *postulats* propres à la Géométrie, ce qui est une bonne raison pour en attribuer l'invention à Euclide. Les *notions communes* sont, au contraire, bien reconnues sous le nom d'axiomes communs ou simplement, comme il dit encore, τὰ κοινά (les communs). Mais il paraît aussi résulter de son texte que les géomètres n'avaient nullement l'habitude de les réunir en tête des *Éléments*, ce qui concorde parfaitement avec nos conclusions.

Il est à remarquer que les stoïciens changèrent complètement le sens du mot ἀξίωμα, et appelèrent de ce nom une proposition quelconque, vraie ou fausse; c'est là qu'il faut chercher la raison de l'adoption d'une autre désignation dans nos textes d'Euclide.

En terminant cette Note, comme j'ai été conduit à l'écrire à la suite de l'étude du premier Volume de l'édition d'Euclide par Heiberg, qu'il me soit permis de louer sans réserve le nouveau travail de l'illustre éditeur d'Archimède et de le recommander aux géomètres curieux de l'histoire de leur science. Je n'ai qu'une bien faible critique à formuler, et, sans doute, elle serait mieux à sa place dans un autre recueil que celui-ci.

Dans l'énoncé d'un προσδιορισμός, c'est-à-dire des conditions auxquelles sont soumises les données d'un problème pour qu'il soit possible, énoncé qui commence régulièrement en grec par δεῖ δή (il faut à savoir que), M. Heiberg a substitué, contre l'autorité des manuscrits, la particule δέ (d'autre part) à δή; je pense que

les textes de Proclus et d'Eutocius qu'il a suivis ne sont nullement concluants; les énoncés semblables sont aussi fréquents dans Diophante qu'ils sont rares chez Euclide, et la formule δεῖ δή y est constante.

SUR LE CARACTÈRE DU NOMBRE 2 COMME RÉSIDU OU NON-RÉSIDU QUADRATIQUE;

PAR M. STIELTJES.

Soit p un nombre premier impair et considérons la suite des $p-1$ nombres

$$\text{(A)} \qquad 1, 2, 3, \ldots, p-1.$$

Nous dirons que deux nombres consécutifs k, $k+1$ présentent une *variation* lorsque l'un d'eux est résidu, l'autre non-résidu quadratique de p.

Cela posé, on voit facilement que le nombre total des variations dans la suite (A) est égal à $\frac{p-1}{2}$. En effet, deux nombres k, $k+1$, présentent une variation ou non, selon que le nombre r_k défini par

$$k+1 \equiv kr_k \pmod{p}$$

est non-résidu ou résidu. Mais il est évident que les nombres

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{p-2}$$

sont tous différents et qu'aucun d'eux n'est égal à l'unité, en sorte que ces nombres sont

$$2, 3, 4, \ldots, p-1,$$

en faisant abstraction de l'ordre. Le nombre des non-résidus parmi eux, c'est-à-dire le nombre des variations dans la suite (A), est donc bien égal à $\frac{p-1}{2}$.

Supposons maintenant $p \equiv 1 \pmod{4}$. Le nombre des variations dans la suite (A) étant pair, et le premier nombre 1 de cette suite étant résidu, il s'ensuit que le dernier $p-1$ ou -1 est aussi résidu. Deux nombres k et $p-k$ sont donc en même temps résidus ou

non-résidus : d'où il suit que le nombre des variations dans la suite

$$(B) \qquad 1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$$

est égal à $\frac{p-1}{4} = n$.

Si n est pair, c'est-à-dire $p \equiv 1$ (mod. 8), le dernier nombre $\frac{p-1}{2}$ sera donc nécessairement résidu, et partant 2 est résidu.

Si n est impair, c'est-à-dire $p \equiv 5$ (mod. 8), $\frac{p-1}{2}$ et 2 seront non-résidus.

Soit en second lieu $p \equiv 3$ (mod. 4). Le nombre des variations dans la suite (A) étant impair, $p-1$ ou -1 sera non-résidu et le nombre des variations dans la suite (B) sera égal à $\frac{p-3}{4} = n$.

Si n est pair, c'est-à-dire $p \equiv 3$ (mod. 8), $\frac{p-1}{2}$ sera résidu, partant 2 sera non-résidu.

Si n est impair, c'est-à-dire $p \equiv 7$ (mod. 8), $\frac{p-1}{2}$ sera non-résidu et 2 résidu quadratique de p.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

NOETHER (M.). — Zur Grundlegung der algebraischen Curven. 1 vol. in-4°, 120 p.; Berlin, 1883.

L'Académie des Sciences de Berlin avait proposé pour le concours du prix Steiner le sujet suivant : « Résoudre quelque question importante se rapportant à la théorie des courbes algébriques dans l'espace ». Deux Mémoires ont été couronnés : l'un d'eux est celui que nous analysons; l'autre, dû à M. Halphen, a paru dans le *Journal de l'École Polytechnique* et a déjà été analysé dans le *Bulletin*.

Le Mémoire de M. Noether, comme celui de M. Halphen, a un caractère nettement algébrique. Au surplus, c'est assurément dans la théorie des fonctions algébriques qu'il faut, comme le dit l'auteur, chercher une base solide à la théorie des courbes algébriques; les résultats obtenus pour les courbes planes, résultats à l'accroissement desquels M. Noether a largement concouru, montraient dans quelle voie il convenait de s'engager.

La bibliographie des travaux relatifs à la théorie des courbes gauches algébriques n'est pas très considérable; il convient de reproduire ici la liste des travaux cités et utilisés par M. Noether.

Cayley. — Considérations générales sur les courbes en espace. (*Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*, t. LIV-LVIII; 1862, 1864.)

Halphen. — Mémoire sur les courbes gauches algébriques. (*Comptes rendus*, t. LXX; 1870.) — Recherches de Géométrie à n dimensions. (*Bull. de la Soc. Math. de France*, t. II.) — Sur quelques propriétés des courbes gauches algébriques. (*Ibid.*)

Brill und *Noether*. — Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie. (*Mathem. Ann.*, t. VII; 1873.)

Ed. Weyr. — Ueber algebraische Raumcurven. (*Inaugural-*

Dissert. Göttingen; 1873.) — Notes diverses insérées dans les *Comptes rendus*, t. LXXVI.)

Noether.—Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde. 2. Aufsatz. (*Math. Ann.*, t. VIII; 1878.)

Sturm. — Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung. (*Journal de Borchardt*, t. LXXXVIII; 1879.) — On some new theorems on curves of double curvature. (*Report of the British Assoc.*; 1881.)

Valentiner. — Bidrag til Raumcurvernes Theorie. (*Inaugural Dissert.* Kopenhagen; 1881.)

Le Mémoire de M. Noether comprend trois parties.

Dans la première partie, l'auteur commence par rappeler certaines définitions et propositions qui concernent les courbes algébriques planes : une courbe *adjointe* à une courbe plane f_m^p d'ordre m, de genre p, est une courbe qui admet chaque point $i^{\text{up e}}$ de f_m^p pour point $(i-1)^{\text{uple}}$; deux groupes G_Q, G_R de Q et de R points qui (en dehors des points multiples de f_m^p) constituent la totalité des points d'intersection de f_m^p et d'une de ses adjointes sont dits *réciproquement résiduels;* l'un de ces groupes est le *reste* de l'autre; deux groupes G_R, $G_{R'}$, résiduels à un groupe G_Q, sont dits *corésiduels;* le *théorème des restes* consiste en ce que, si G_R et $G_{R'}$ sont restes de G_Q, et si G_R est reste de $G_{Q'}$, $G_{R'}$ est aussi reste de $G_{Q'}$; la considération des *faisceaux spéciaux* ou *faisceaux de groupes spéciaux,* c'est-à-dire des faisceaux linéaires de groupes de points déterminés sur f_m^p par des courbes φ_{m-3}, adjointes à f_m^p et d'ordre $m-3$ donne lieu à diverses propositions particulièrements importantes. Ces définitions et propositions sont ensuite étendues aux surfaces et courbes algébriques; soit, en général, F_μ une surface algébrique d'ordre μ, sans point multiple; si deux courbes R, R_1 situées sur F_μ constituent l'intersection complète de cette surface par une autre surface F_ν, elles sont dites réciproquement résiduelles; chacune est le *reste* de l'autre; si deux courbes sont restes d'une troisième, elles sont corésiduelles; il y a un théorème des restes pour les surfaces : si les deux courbes R, R_1, situées sur F_μ sont restes de R' et si R est reste de R'_1, R_1 est aussi reste de R'_1; il y a aussi un théorème

des restes pour les courbes dans l'espace; la notion de *faisceaux spéciaux* s'étend aussi aux courbes dans l'espace.

Entre les nombres p, m (genre et ordre), p', m' relatifs à deux courbes R_m^p, $R_{m'}^{p'}$ qui sont réciproquement résiduelles dans l'intersection de deux surfaces F_μ, F_ν, les ordres μ, ν de ces surfaces, les nombres de points doubles apparents des deux courbes, le nombre de leurs points communs, existent diverses relations.

M. Noether développe deux procédés pour la génération d'une courbe algébrique R_m^p; dans le premier, une telle courbe est donnée par l'intersection d'un cône

$$f_m(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

dont le sommet est au point $O(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0)$ et d'un *monoïde*, c'est-à-dire d'une surface dont l'équation est de la forme

$$x_4 \psi_{n-1}(x_1, x_2, x_3) - \psi_n(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

ψ_{n-1} et ψ_n étant des fonctions entières de degrés $n-1$, n : une telle surface présente évidemment un point multiple d'ordre n en O. Ce mode de génération, qui a été considéré d'abord par M. Cayley, a servi de point de départ aux recherches de M. Halphen.

L'autre procédé repose sur une transformation univoque; on part d'une courbe plane irréductible d'espèce p. Si l'on connaît un faisceau linéaire triplement infini de groupes de m points déterminés sur f par l'intersection de courbes adjointes,

$$\alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \alpha_3 \psi_3 + \alpha_4 \psi_4 = 0$$

et si l'on suppose que le faisceau ne soit pas spécial, la transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \psi_1 : \psi_2 : \psi_3 : \psi_4$$

définira une courbe algébrique R_m^p.

L'étude des projections sur un plan d'une courbe algébrique R_m^p conduit ensuite l'auteur à diverses propositions, parmi lesquelles nous signalerons la suivante qui a été aussi rencontrée par M. Valentiner : « La condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe irréductible plane f_m^p soit la projection d'une courbe R_m^p, projection faite d'un point quelconque de l'espace, consiste en ce que, si l'on a $p \geqq m - 2$, les h points doubles de f_m^p ne re-

présentent pour les courbes adjointes à f_m^p du $(m-4)^{\text{ième}}$ ordre que $h-1$ conditions ; si l'on a $p < m-2$, il n'y a pas de condition.

Les courbes R_m^π données par l'intersection de deux surfaces F_μ, $F_\nu (\mu \leqq \nu)$ et qui admettent comme reste une courbe plane sont ensuite l'objet d'une étude spéciale bien légitimée par la propriété suivante de ces courbes F_μ; elles admettent le plus grand genre possible π.

C'est au début de la seconde section, consacrée à l'étude des courbes considérées comme intersections de surfaces algébriques générales, que M. Noether démontre cette propriété, en partant d'une proposition analogue relative aux courbes. La multiplicité maximum d'un faisceau linéaire déterminant sur une courbe plane f_μ, d'ordre μ, sans points doubles, un groupe de Q points, est égale à celle d'un pareil faisceau de Q points qui admettent comme reste un groupe de points en ligne droite. L'auteur établit ensuite les conditions pour qu'une surface F_μ, d'ordre μ, passe par une courbe R_m^p, de genre p, d'ordre m; en désignant par

$$N_\mu = \tfrac{1}{6}(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)-1$$

la multiplicité des surfaces F_μ et par λ le plus grand entier positif qui satisfasse aux deux inégalités

$$\mu m < 2(N_\mu - \lambda), \quad p > \mu m - (N_\mu - \lambda),$$

il existera un faisceau linéaire λ fois infini de surfaces F_μ qui passeront par la courbe R_m^p. On peut encore se demander, lorsque l'on connaît déjà une surface irréductible F_μ qui passe par la courbe irréductible R_m^p, s'il existe d'autres surfaces F_ν, d'ordre ν égal ou supérieur à $\mu - 3$, qui ne contiennent pas F_μ en facteur et qui passent par la courbe R_m^p; le théorème suivant donne une réponse à cette question : « Si l'on désigne par λ le plus grand entier positif qui satisfasse aux inégalités

$$\nu m < 2(W_{\nu,\mu} - \lambda), \quad p > \nu m - W_{\nu,\mu} + \lambda,$$

il existe un faisceau linéaire λ fois infini de surfaces F_ν (ne contenant pas F_μ en facteur) qui passent par la courbe irréductible R_m^p; dans ces inégalités, $W_{\nu,\mu} = N_\nu - N_{\nu-\mu} - 1$ désigne la multiplicité des courbes du $\mu\nu^{\text{ième}}$ ordre que l'ensemble des surfaces du $\nu^{\text{ième}}$ ordre déterminent sur la surface F_μ. »

Ce théorème, toutefois, en fournissant des conditions suffisantes, ne donne pas une solution complète de la question. M. Noether donne deux méthodes pour reconnaître dans les cas exceptionnels s'il passe ou non par la courbe R''_m une surface F_ν; l'une de ces méthodes, dite méthode des restes, consiste à substituer à la courbe R''_m une courbe corésiduelle à laquelle s'applique la méthode générale. L'autre méthode, dite des sections planes, repose sur la considération des groupes de points déterminés sur une section plane irréductible f_μ de F_μ par les surfaces qui passent par R''_m.

M. Halphen avait donné, dans le Mémoire cité plus haut, un théorème qui permet d'obtenir toutes les courbes irréductibles R''_m situées sur une surface irréductible F_μ; M. Noether établit ce théorème en le modifiant toutefois sur quelques points.

Le reste de la seconde section est consacré à la démonstration de diverses égalités ou inégalités entre les constantes numériques qui caractérisent les courbes algébriques gauches.

Enfin, la troisième section comprend les applications des théories générales qui précèdent : l'auteur y énumère toutes les courbes algébriques qui peuvent être tracées sur les surfaces des degrés 2, 3, 4, 5, toutes les espèces de courbes algébriques dont l'ordre est au plus égal à 6, les diverses espèces de courbes irréductibles du 7e, du 8e et du 9e ordre; il donne une classification générale des courbes dont l'ordre est compris entre 10 et 17. Enfin, dans les deux derniers paragraphes, il montre sur des cas particuliers le parti que l'on peut tirer de la méthode des sections planes, et comment les méthodes qu'il a développées pour des surfaces algébriques générales peuvent être appliquées dans la géométrie des surfaces spéciales; il traite, par exemple, des surfaces du 6e ordre, admettant une courbe gauche du quatrième ordre, de genre 1, comme courbe double et une droite double ne coupant point cette courbe : ces surfaces peuvent être représentées d'une façon univoque sur un cône du quatrième degré avec deux génératrices doubles ou sur un cône du troisième degré. Cette représentation univoque est réversible. J. T.

BRUNEL. — ÉTUDE SUR LES RELATIONS ALGÉBRIQUES ENTRE LES FONCTIONS HYPERELLIPTIQUES DE GENRE 3. — Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris et soutenue le 4 juillet 1883. 62 p. in-4°. Paris, 1883.

Göpel et Rosenhain ont étudié les relations algébriques qui existent entre les fonctions hyperelliptiques de genre 2. M. Brunel s'est proposé, dans ce Mémoire, d'étendre au cas du genre 3 les propositions qui avaient ainsi été trouvées dans un cas plus simple.

Les 64 fonctions Θ sont proportionnelles à 64 fonctions P définies comme il suit :

$$P_0 = 1 \qquad\qquad 1 \text{ fonction } P_0$$

$$P_k = \sqrt{(a_k - x_i)(a_k - x_2)(a_k - x_3)} \qquad\qquad 7 \text{ fonctions } P_k$$

$$P_{k.l} = P_k P_l \sum_{i=1}^{3} \frac{\sqrt{R(x_i)}}{(a_k - x_i)(a_l - x_i)\varphi'(x_i)} \qquad k \neq l \qquad 21 \text{ fonctions } P_{kl}$$

$$P_{k.lm} = P_k P_l P_m \sum_{i=1}^{3} \frac{\sqrt{R(x_i)}}{(a_k - x_i)(a_l - x_i)(a_m - x_i)\varphi'(x_i)} \qquad k \neq l \neq m \qquad 35 \text{ fonctions } P_{k.lm},$$

en posant

$$R(x) = \prod_{klmnpqr} (a_k - x)$$

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Toute relation algébrique entre les fonctions P peut, par l'introduction de P_ν, être immédiatement rendue homogène et donner, par suite, une relation entre les fonctions Θ.

On peut, avec les fonctions P, former 64 groupes de fonctions tels, qu'entre les carrés de 5 fonctions appartenant à un même groupe existe une relation linéaire. Ces groupes appartiennent à quatre types qui, en n'écrivant que les indices des fonctions P, ont les caractéristiques suivantes :

(I)	o,	k,	l,	m,	n,	p,	q,	r,
(II)	o,	k,	kl,	km,	kn,	kp,	kq,	kr,
(III)	k,	l,	kl,	klm,	kln,	klp,	klq,	klr,
(IV)	klm,	npq,	pqr,	qrn,	rnp,	lm,	mk,	kl;

on peut désigner ces groupes sous les noms de *groupe o*, *groupe k*, *groupe kl*, *groupe klm*. Une permutation quelconque effectuée sur les lettre k, l, m, n, p, q, r transforme, en général, un groupe d'un type en un autre groupe du même type. Par ces permutations, on obtient, pour les différents types respectivement, 1, 7, 21 et 35 groupes.

Les limites de cette analyse ne nous permettent pas de donner la forme des différentes relations correspondant aux différents groupes.

En ce qui concerne encore les relations linéaires entre les carrés, M. Brunel montre comment on peut directement et sans l'emploi des formules signalées précédemment trouver des relations linéaires où apparaissent les carrés de fonctions données.

Passant maintenant aux relations linéaires entre les produits de deux fonctions P, on reconnaît l'existence de neuf types différents. Désignant simplement par ces indices une fonction P et séparant par un point les indices des facteurs des produits, on peut former le tableau suivant :

	$k.lm$,	$l.mk$,	$m.kl$,	$o.klm$,	
	$kl.mn$,	$km.nl$,	$kn.lm$,	$o.pqr$,	
	$k.lmn$,	$l.mnk$,	$m.nkl$,	$n.klm$,	
	$kl.kmn$,	$km.knl$,	$kn.klm$,	$k.pqr$,	
	$klm.knp$,	$kln.kpm$,	$klp.kmn$,	$k.qr$.	
$l.kl$,	$m.km$,	$n.kn$,	$p.kp$,	$q.kq$,	$r.kr$,
$kq.kr$,	$lq.lr$,	$mq.mr$,	$nq.nr$,	$pq.pr$,	$q.r$,
$k.kqr$,	$l.lqr$,	$m.mqr$,	$n.nqr$,	$p.pqr$,	$o.qr$,
$kln.kmn$,	$klp.kmp$,	$klq.kmq$,	$klr.kmr$,	$kl.km$,	$l.m$.

Trois des produits appartenant à une ligne horizontale, dans le cas des cinq premiers types, quatre de ces produits, s'il s'agit des quatre derniers types, sont linéairement reliés entre eux.

Choisissant, *a priori*, les *fonctions de bases*

$$P_{kln}, P_{klp}, P_{klq}; \quad P_{kmn}, {}_{kmp}, P_{kmq}; \quad P_r, P_{npq},$$

les carrés des cinquante-six autres s'expriment linéairement au moyen des carrés de ces 8 fonctions. De plus, P_r^2 et P_{npq}^2 s'expriment rationnellement en fonction des six autres. Enfin, entre ces six dernières existent deux relations homogènes du quatrième

degré en tout point analogues aux relations de Göpel. La dépendance algébrique des 64 fonctions hyperelleptiques et, par suite des 64 fonctions Θ, se trouve donc établie d'une façon précise et complète.

L. RAFFY. — Recherches algébriques sur les intégrales abéliennes. — Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris et soutenue le 20 avril 1883. 86 pages in-4°. Paris, 1883.

Quand on étudie certaines questions relatives aux intégrales abéliennes, on est parfois arrêté par l'impossibilité de résoudre les équations algébriques. Traiter quelques-unes de ces questions dans toute leur généralité et sans avoir à résoudre aucune équation irréductible, tel est l'objet du travail que nous analysons. Les méthodes qui y sont exposées ne comportent jamais d'autres opérations algébriques que des divisions et des éliminations, et chacune d'elles est appliquée à des exemples numériques.

Toute intégrale abélienne peut être mise sous la forme

$$z = \int \frac{du}{U},$$

en supposant les variables u et U liées par une équation algébrique $F(u, U) = 0$. L'auteur rattache à cette équation deux séries de paramètres : les paramètres c représentent les valeurs qu'on déduit de l'équation $F(u, U) = 0$ pour le rapport $\frac{u}{U}$ quand l'un des termes de ce rapport ou tous les deux deviennent infinis; les paramètres c'_0 représentent les valeurs qu'on déduit de cette équation pour la dérivée $\frac{du}{dU}$ quand U est nul. De la définition de ces quantités résultent trois théorèmes qui correspondent aux trois formes différentes que peut présenter l'équation $F(u, U) = 0$, et qui permettent de caractériser une intégrale abélienne quelconque comme intégrale de première, de seconde ou de troisième espèce.

Après ces préliminaires vient un chapitre intitulé : *Sur un cas de réduction des intégrales abéliennes*. Quand une fonction u est liée à sa dérivée $U = \frac{du}{dz}$ par une équation algébrique $F(u, U) = 0$, cette fonction admet en général une infinité de valeurs en chaque

point. Dans leurs importantes recherches sur la théorie des fonctions, MM. Briot et Bouquet se sont occupés du cas où la fonction u n'a en chaque point qu'un nombre limité de valeurs, et ils ont prouvé qu'alors elle est racine d'une équation algébrique ayant pour coefficients des fonctions entières, soit de la variable z, soit de l'exponentielle $e^{\rho z}$, soit de la fonction doublement périodique $\mathrm{sn}(\rho z)$. M. Raffy s'est posé ce problème : Supposons que l'intégrale u d'une équation différentielle algébrique $F(u, U) = 0$ n'a en chaque point qu'un nombre limité de valeurs, reconnaître si elle est algébrique, simplement périodique, ou doublement périodique. En voici la solution : Si l'intégrale est doublement périodique, les paramètres c et c_0' sont tous nuls. Si l'intégrale est algébrique, un au moins des paramètres c et c_0' est infini, et aucun d'eux n'est fini et différent de zéro. Si l'intégrale est simplement périodique, les paramètres c et c_0' sont tous finis, mais non pas tous nuls, et ceux qui ne sont pas nuls forment une suite de nombres commensurables entre eux.

On trouve ensuite, pour le cas où l'intégrale u serait algébrique, une détermination nouvelle du degré de l'équation intégrale par rapport à u. La fin du chapitre est consacrée au cas où l'équation à intégrer représente une courbe unicursale. L'auteur montre comment on obtient alors l'équation intégrale, et résout en passant ce problème : Étant donnée une fraction rationnelle dont tous les résidus sont commensurables entre eux, trouver son intégrale sans connaître ses infinis.

Au chapitre suivant, il aborde le problème de la détermination du genre des courbes algébriques. La question est traitée d'une manière purement analytique en partant du célèbre théorème de Riemann, qui s'exprime par l'égalité

$$2(p + m - 1) = \Sigma(r - 1),$$

lorsque l'on désigne par p le genre, par r le nombre des racines qui forment l'un des systèmes circulaires relatifs à un point critique de la fonction y définie par l'équation de la courbe, et par m le degré de cette équation par rapport à y. Ainsi, la détermination du genre revient à celle du nombre $\Sigma(r - 1)$. La méthode de M. Raffy permet d'obtenir ce nombre $\Sigma(r - 1)$, et par suite le genre, sans qu'il soit nécessaire de connaître les points critiques de la fonc-

tion y ni les valeurs qu'elle prend en ces points. Cette méthode, que nous ne pouvons exposer ici, est absolument générale : elle s'applique, quelles que soient les singularités de la courbe proposée ; et, si elle paraît exiger parfois des calculs très longs, elle permet toujours de profiter des simplifications qui peuvent se présenter dans les exemples qu'on a à traiter.

Il faut rapprocher de la recherche du genre la discussion des caractères auxquels on reconnaît qu'une fonction liée à sa dérivée par une équation algébrique est une fonction uniforme, caractères qui ont été découverts par MM. Briot et Bouquet. Les procédés que M. Raffy indique pour appliquer, quelle que soit l'équation différentielle proposée, les conditions assignées par MM. Briot et Bouquet, rappellent ceux dont il a fait usage pour déterminer le genre des équations algébriques. C'est qu'en effet il existe entre les deux questions un lien étroit, qui a été aperçu par M. Hermite. Si l'intégrale u d'une équation différentielle algébrique $F(u, U) = 0$ est uniforme, cette équation est du genre zéro ou du genre un. Cette remarque profonde a suggéré à l'auteur une nouvelle solution du problème, qu'il expose en terminant.

VAZQUEZ ILLÁ. — Propiedades elementares relativas a la divisibilidad de los numeros enteros. 1 vol. in-8°, 206 p. Valladolid, 1881.

Ce Volume contient, exposées avec détail et clarté, les propositions les plus élémentaires de la théorie des nombres. Après quelques notions sur les congruences, l'auteur expose les propriétés les plus simples des nombres premiers, le formation des diviseurs d'un nombre, la composition des nombres *parfaits* ou *amis;* il fait ensuite la théorie du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple, établit les propriétés relatives aux résidus des puissances successives d'un nombre, le théorème de Fermat, introduit les notions de racine primitive et d'indice, montre l'usage qu'on peut faire d'une Table d'indices, et termine en donnant les caractères de divisibilité, en supposant quelconque la base de la numération. De nombreux exercices, souvent accompagnés d'indications sommaires sur la solution, suivent chaque paragraphe.

J. T.

F. AMODEO. — Monografia delle curve tautocrone. 1 vol. in-8°, 74 p. Avellino, 1883.

L'auteur débute en rappelant les divers travaux dont le problème du tautochronisme a été l'objet; il a utilisé pour cela le travail historique dû à M. C. Ohrtmann, *Das Problem des Tautochronen* (Berlin, 1872), qu'il a pu compléter sur quelques points; nous résumons rapidement dans ce qui suit les principaux résultats de cette étude historique.

M. Amodeo divise les recherches relatives au tautochronisme en trois classes, suivant qu'on ne tient compte ni de la résistance de l'air, ni du frottement de la courbe; ou que l'on tient compte de la première de ces deux causes perturbatrices, ou des deux.

Courbes tautochrones dans le vide. — Huygens (1673) démontre géométriquement la propriété de la cycloïde (*De Horologio oscillatorio*); Newton (1714) part de ce principe, que les courbes, telles que la composante tangentielle de la force soit proportionnelle à l'arc, sont tautochrones; il démontre le tautochronisme de l'épicycloïde pour une force centrale proportionnelle au rayon vecteur; il pose aussi le problème inverse : « Étant donnée une courbe, pour quelle force est-elle tautochrone? » Il le résout pour le cercle (*Philosophiæ naturalis principia mathematica*). Fontaine (1734) démontre analytiquement les résultats de Newton [*Sur les courbes tautochrones* (*Histoire de l'Académie royale des Sciences*)]. Euler (1729) traite le problème de l'isochronisme : Quelle courbe faut-il raccorder à une courbe de descente donnée pour que les oscillations complètes d'un point pesant soient isochrones? (*Commentarii Acad. Petropolitanæ.*) M. Puiseux (1844) reprend avec détail le problème du tautochronisme et discute les diverses solutions pour les forces centrales, proportionnelles à une puissance donnée du rayon vecteur (*Journal de Liouville*). Signalons encore quelques recherches particulières dues à Poisson, au P. Jullien, à Duhamel, à M. Schell, à M. Townsend et cette remarque due à M. Padelletti, que, si une courbe est tautochrone relativement à une certaine force, le tautochronisme subsiste quand il y a une vitesse initiale dont le rapport à l'arc initial est le même que le rapport de la force tangentielle à l'arc

[*Nota sul problema delle tautocrone* (*Giornale di Scienze di Palermo*, 1879)].

Courbes tautochrones quand on a égard à la résistance de l'air. — Newton (*loc. cit.*) montre que la propriété de la cycloïde subsiste dans un milieu qui oppose une résistance proportionnelle à la vitesse. Euler (*Commentarii*), Jean Bernoulli (*Mémoires de l'Académie, Histoire de l'Académie royale*), Fontaine (*ibid.*) étudient le cas d'un milieu résistant comme le carré de la vitesse (1729-1730). Laplace (*Mécanique céleste*, t. I) traite le cas d'une résistance de la forme $v^2 + av$, v étant la vitesse du mobile (1792). M. Puiseux (1844, *loc. cit.*) reprend le problème traité par Bernoulli. M. Meissel (1854) traite le problème de l'isochronisme dans un milieu résistant [*Zur Theorie der Tautochronen* (*Journal de Crelle*)]. M. Lespiault (1860) montre que toute courbe tautochrone dans le vide est encore tautochrone quand la résistance du milieu est proportionnelle à la vitesse [*Théorie géométrique des tautochrones* (*Mém. de la Société des Sciences de Bordeaux*)].

Courbes tautochrones quand on a égard au frottement. — Necker (1763) traite du tautochronisme quand on a égard au frottement et à une résistance proportionnelle au carré de la vitesse (*Mém. de Math. et de Phys. présentés à l'Acad. par divers savants étrangers*, t. IV).

Le P. Jullien établit le tautochronisme de la cycloïde, en tenant compte du frottement et d'une résistance proportionnelle à la vitesse (*Problèmes de Mécanique*).

M. Haton de la Goupillière (1868) prouve que l'épicycloïde est tautochrone, dans des conditions analogues, pour une force centrale proportionnelle au rayon vecteur. Enfin M. Darboux, dans une Note insérée au *Bulletin* (1879), reprend le problème général traité par Necker en suivant l'élégante méthode due à M. Puiseux, et applique la solution à l'épicycloïde. M. Amodeo a démontré que toutes les courbes tautochrones, quand on a égard au frottement pour des forces de direction constante et pour des forces centrales, restent tautochrones dans un milieu dont la résistance est proportionnelle à la vitesse, et que toutes les courbes tauto-

chrones pour une force proportionnelle au rayon vecteur le sont, que l'on tienne compte ou non du frottement.

Un autre ordre de questions a été abordé par Lagrange; celui-ci a en effet cherché une expression générale de la force capable de produire un mouvement tautochrone, en la supposant fonction de l'arc de courbe et de la vitesse (1767); la formule à laquelle il parvint fut l'objet d'une vive polémique avec Fontaine, polémique à laquelle d'Alembert prit part; plus récemment, M. Bertrand (*Journal de Liouville*, 1847; *Annales de Tortolini*, 1852) et M. Brioschi (*Annales de Tortolini*, 1852, 1853) ont repris la question et discuté la généralité de la formule de Lagrange; M. Brioschi a proposé une formule plus générale que celle de Lagrange, et qui semblait devoir clore la discussion; toutefois M. Formenti (*Rendiconti del reale Istituto Lombardo*, 1880) l'a encore rouverte en affirmant que la formule de M. Brioschi n'avait réellement pas plus d'extension que celle de Lagrange, assertion que M. Amodeo conteste à son tour.

La question du mouvement qu'on pourrait appeler, avec M. Amodeo, *hypertautochrone*, où l'on demande que le temps de chute soit une fonction donnée de la position initiale, a été posée par Fontaine; on sait qu'Abel a résolu le problème pour un point pesant en supposant que le temps de chute soit une fonction donnée de la hauteur initiale. M. Meissel s'est occupé du problème analogue en substituant à la pesanteur une force centrale inversement proportionnelle au carré du rayon vecteur; enfin M. Somof a donné une solution nouvelle du problème d'Abel.

M. Amodeo expose la théorie des courbes tautochrones dans l'ordre qu'il a adopté pour l'histoire de ces courbes.

Son point de départ est dans le théorème suivant :

Pour que la dérivée, par rapport à l, de l'intégrale

$$T = \int_0^l \frac{\varphi'(u)\,du}{\sqrt{l-u}},$$

soit nulle, quel que soit l, il faut et il suffit que l'on ait

$$\varphi'(u) = \frac{c}{\sqrt{u}},$$

c étant une constante.

Il est bien digne d'intérêt que l'on puisse déduire de cette proposition, par une méthode uniforme, les propriétés caractéristiques des courbes tautochrones ou isochrones, que l'on ait ou non égard à la résistance du milieu supposée proportionnelle au carré de la vitesse, et au frottement sur la courbe. Pour le cas le plus simple, celui d'une courbe polie et d'un milieu non résistant, l'auteur examine le cas d'une force de direction constante, de la forme μx^n, puis le cas d'une force centrale attractive ou répulsive, constante ou proportionnelle au rayon vecteur : on rencontre ainsi en particulier la chaînette, la cycloïde, l'astroïde, la cardioïde, l'épicycloïde, la droite, la spirale logarithmique. L'auteur montre ensuite comment on peut raccorder une courbe de *montée* à une courbe de descente, de façon à constituer une courbe isochrone, comment on peut trouver une courbe isochrone à elle seule; l'exemple le plus remarquable, dans le cas de la pesanteur, a été donné par Euler.

Quand on a égard à la résistance du milieu, le cas le plus intéressant est celui où l'on suppose cette résistance de la forme Kv^2; M. Amodeo donne l'équation générale des courbes tautochrones sous la forme

$$s + 2Kc^2 \int_0^s F_t\, ds = 2c^2 F_t,$$

où F_t est la composante tangentielle de la force; il détermine la courbe de montée β qu'il faut raccorder à la courbe tautochrone de descente α, de manière que le temps pendant lequel le mobile monte en vertu de la vitesse acquise, temps compté à partir du moment où le mobile passe au point de tautochronisme, soit indépendant du point de départ; entre les arcs α et β il y a la relation

$$\beta = \frac{1}{K} \log(2e^{K\alpha} - 1),$$

trouvée par Bernoulli dans le cas d'un point pesant; le point de vitesse maximum est séparé du point de tautochronisme par un arc

$$s = 2\alpha - \frac{1}{K} \log(2e^{K\alpha} - 1);$$

des questions analogues se posent pour les courbes raccordées qui fournissent des oscillations isochrones.

Enfin, en tenant compte du frottement, M. Amodeo retrouve l'équation générale des courbes tautochrones sous la forme obtenue par M. Darboux

$$\frac{\rho}{2c^2} = \lambda(\lambda F_n - F_t) - \frac{d}{d\omega}(\lambda F_n - F_t).$$

F_t, F_n sont les composantes tangentielles et normales, ρ est le rayon de courbure, $\lambda\left(F_n + \frac{v^2}{\rho}\right)$ est le terme introduit par le frottement. Il en conclut avec M. Darboux que les courbes polies qui sont tautochrones dans le vide pour les forces centrales proportionnelles au rayon vecteur sont encore tautochrones quand on tient compte du frottement.

Dans les dernières pages de son travail, l'auteur reproduit la démonstration donnée par M. Somof de la solution obtenue par Abel pour le problème du mouvement hypertautochrone, ainsi que l'ingénieuse analyse par laquelle M. Brioschi est parvenu à l'expression générale de la force tangentielle capable de produire un mouvement tautochrone ou hypertautochrone, savoir

$$p = \frac{v^2}{\psi(s)}\left\{\frac{v}{\psi(s)}\Psi\left[\frac{v}{\psi(s)} - \lambda(s,\alpha)\right] + v\frac{d\lambda}{ds} - \psi'(s)\right\}.$$

ψ et Ψ sont des fonctions arbitraires, λ n'est pas entièrement arbitraire, le mouvement est tautochrone ou hypertautochrone suivant certaines conditions imposées à cette fonction; dans le cas où la fonction λ est nulle, on retombe sur la formule donnée par Lagrange. J. T.

MÉLANGES.

LA PERTE DE SEPT LIVRES DE DIOPHANTE;

PAR M. PAUL TANNERY.

On sait que des treize Livres des *Arithmétiques* annoncés par Diophante dans le préambule de son Ouvrage, il ne nous en reste que six, en dehors d'un petit Traité *Sur les nombres polygones*.

Dans son *Algebra der Griechen* (1), Nesselmann a le premier soutenu :

1° Qu'il nous manque de Diophante beaucoup moins qu'on ne le croit habituellement, si l'on s'en tient au rapport de 6 à 13;

2° Que la lacune n'est pas à la fin, mais au milieu de l'Ouvrage, et qu'il faut la chercher principalement entre le premier et le deuxième Livre;

3° Que le désordre de l'Ouvrage remonte à une époque passablement reculée, sûrement avant le XIIIe ou le XIVe siècle, et s'est produit en Grèce même.

Ces opinions, que Nesselmann a longuement motivées, mais qu'il ne proposait toutefois que comme conjecturales et en les accompagnant de prudentes réserves, ont été adoptées après lui d'autant plus facilement qu'elles étaient relativement plus consolantes. Mais ni Hankel ni M. Cantor ne les ont appuyées par de nouvelles raisons. Je me propose de réfuter les deux premières et de préciser l'origine du désordre incontestable où se trouve ce qui nous reste de Diophante.

I.

Je dois tout d'abord écarter l'assertion de Colebrooke (2), récemment reprise par M. Charles Henry (3), que la division en

(1) Berlin, p. 264-273; 1842.
(2) *Algebra of the Hindu's*, note M, p. LXI.
(3) *Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux*, t. II, p. 86-90.

Livres du texte actuel est incertaine, et il me faut pour cela entrer dans quelques détails sur les manuscrits de Diophante.

Par une singulière inadvertance, Nesselmann (p. 256) ne reconnaît que cinq ou six manuscrits de Diophante; à savoir trois au Vatican (n°s 191, 200 et 304), un à Paris (celui dont Bachet s'est servi, n° 2379 du fonds grec de la Bibliothèque nationale), un autrefois à Heidelberg, et enfin celui de Xylander, peut-être identique au précédent (1).

Nesselmann aurait pu relever dans Heilbronner, qu'il cite plus loin (p. 281), une liste de dix-huit ou vingt manuscrits (2), et, de fait, il y en a actuellement cinq à Paris (3). A la vérité, le nombre de ceux antérieurs au XVIe siècle semble très restreint, et l'on ne peut compter que celui de Venise (Saint-Marc, 308), les trois du Vatican, et peut-être celui de Wolfenbüttel. Tous les autres doivent être considérés comme dérivés de ces derniers.

Or on a relevé, pour la division en Livres, les discordances suivantes :

Le manuscrit 200 du Vatican (XIVe siècle) divise le Livre IV en deux; il commence son Livre V à la question IV,20 de Bachet; ses Livres VI et VII sont les Livres V et VI du texte ordinaire; enfin il compte le Livre *Des nombres polygones* comme Livre VIII.

Cette division est suivie dans le manuscrit T III (XVIe siècle) de l'Escurial, et, comme je l'ai constaté le premier, dans le n° 2485 de la Bibliothèque nationale.

Le manuscrit Ω 115 (XVIIe siècle) de l'Escurial divise en deux le Livre I, en faisant un Livre de l'Introduction, un deuxième

---

(1) Xylander, le premier traducteur de Diophante (1575), était professeur à Heidelberg et il est naturel de croire que son manuscrit aura plus tard passé à la bibliothèque Palatine, où Saumaise l'a examiné sur la demande de Bachet. Cette bibliothèque a été dispersée au commencement de la guerre de Trente ans et la majeure partie en a été transportée au Vatican. Mais il ne faut pas y chercher le manuscrit palatin de Diophante; car les trois du Vatican y étaient déjà à la fin du XVIe siècle, où Joseph Auria les collationnait. En tout cas, au témoignage de Xylander, son manuscrit contenait, après le texte de Diophante, un fragment arithmétique sous le nom de Maxime Planude. Or ce fragment se rencontre généralement dans les manuscrits qui renferment les scolies attribués à ce commentateur, mais il semble être anonyme partout, sauf dans le manuscrit de Wolfenbüttel (*Gudianus* 1) et dans un de ceux du Vatican.

(2) Voir *Fabricius* (*Bibl. græc.*, éd. Harles), V, p. 643.

(3) Bibliothèque nationale, 2378, 2379, 2380, 2485. Arsenal, 8406.

des problèmes; les numéros suivants des Livres de Bachet se trouvent naturellement augmentés d'une unité et le Livre des nombres polygones est encore compté comme VIII.

Enfin ce dernier Livre serait compté comme VII dans le manuscrit 275, III C 17 de la Bibliothèque Bourbon, à Naples.

Quelle importance faut-il attribuer à ces discordances? Peut-on aller jusqu'à supposer, avec M. Charles Henry, que, dans le principe, chacun des six Livres a pu être dédoublé en deux, et qu'avec celui des nombres polygones, nous aurions tous les treize?

Cette conjecture hardie manque de tout appui réel. Au point de vue du texte, la collation des manuscrits de Paris m'a prouvé que, quoique remontant tous à un même original déjà très corrompu, les manuscrits de Diophante appartiennent à deux familles bien distinctes.

La première, que j'appellerai A, a été séparée de la seconde, B, avant la rédaction des scolies attribués à Planude, rédaction qui est propre à B. La famille A a des scolies particuliers en très petit nombre, et dont quelques-uns témoignent d'une singulière ignorance, mais le texte de Diophante y est dans un état très sensiblement meilleur, et il me servira de base dans l'édition que je prépare.

A la famille A appartiennent notamment le plus ancien manuscrit du Vatican, 191 (XIIIe siècle?), probablement aussi le plus récent [1] (304, XVe siècle), mais, en tous cas, 2378 de la Bibliothèque nationale (Christophe Awer, XVIe siècle).

A la famille B appartiennent le manuscrit de Venise (indiqué comme du XIIe siècle, mais qui, contenant un fragment de Planude, ne peut être que du XIVe siècle); celui de l'Arsenal, de la main de Christophe Awer, qui l'a noté expressément être une copie du précédent; celui de Bachet (Bibliothèque nationale, 2379), copié par Jean d'Otrante (XVIe siècle), qui est presque identique à celui de l'Arsenal; enfin les manuscrits 200 du Vatican (XIVe siècle) et 2485 de la Biblothèque nationale.

Quant au manuscrit 2380 [2] de cette dernière Bibliothèque, il

---

[1] D'après une communication verbale de M. Charles Henry.

[2] Ce manuscrit est certainement celui qui a appartenu à Charles de Montchal (Nesselmann, p. 280); il existe un double du travail d'Auria à la bibliothèque de Milan.

renferme le texte établi par Auria avec la collation des trois manuscrits du Vatican; quoiqu'on ne puisse évidemment regarder cette collation complète, elle suffit pour établir que notre manuscrit 2485 est bien, comme on pouvait le penser *a priori*, une copie et une copie très fidèle du manuscrit 200 du Vatican.

Le fait que la discordance dans la division en Livres ne correspond nullement à la division en familles d'après l'état du texte prouve que cette discordance n'a pas une origine bien ancienne. L'examen de notre manuscrit 2485 permet d'ailleurs d'en reconnaître la source.

Pour les titres des trois premiers Livres, il les donne tout au long comme les manuscrits ordinaires des deux familles. Διοφάντου ἀλεξανδρέως Ἀριθμητικῶν α', β' ou γ'. Mais ensuite il ne donne plus que l'abrégé Διοφάντου δ', ε', ς', ζ' ou η'. Il faut savoir, en outre, que les titres et les initiales des problèmes sont en rouge, que bon nombre des initiales manquent, et que certaines confusions qui en résultent montrent qu'elles manquent aussi, au moins en partie, dans le manuscrit 200 du Vatican.

Il y a là un fait bien connu en paléographie; ces titres et initiales en rouge, ordinairement accompagnés d'ornements calligraphiques, étaient très souvent écrits après coup, parfois par une autre main, et sans avoir l'original sous les yeux. Un blanc laissé mal à propos a suffi dès lors pour bouleverser le numérotage des Livres de Diophante, ce qui a eu lieu de même dans d'autres manuscrits d'autres auteurs.

L'erreur était d'autant plus facile que le Livre IV contient relativement plus de problèmes que les autres [1]; mais il est incontestable aussi que la division du manuscrit 200 n'est nullement rationnelle au point de vue des matières.

Les autres discordances signalées doivent recevoir la même explication, et il faut évidemment s'en tenir à la division et aux titres reconnus par les manuscrits les plus anciens dans chaque famille.

---

[1] Voici les nombres des problèmes par Livres, suivant le numérotage de Bachet : I, 43, II, 36, III, 24, IV, 46, V, 33, VI, 26.

II.

J'ai dit que tous les manuscrits de Diophante remontaient à une source commune déjà très corrompue. Avant de rechercher comment la corruption et la confusion ont pu s'introduire dans cette source, on peut se demander tout d'abord comment elle s'est trouvée réduite à moins de la moitié des Livres des *Arithmétiques* et augmentée, par contre, du Livre des *Nombres polygones* qui, à première vue au moins, ne devait pas en faire partie.

Une simple réflexion sur un cas analogue nous donnera immédiatement la réponse. Pourquoi avons-nous perdu les quatre derniers Livres des *Coniques* d'Apollonius? Parce qu'à un certain moment on s'est avisé d'accompagner de commentaires l'œuvre du géomètre de Perge, et qu'on a fait une édition comprenant les quatre premiers Livres avec commentaires au lieu de comprendre l'Ouvrage entier. Le succès de l'édition avec commentaires a fait disparaître l'édition complète; nous avons cependant gagné, bien faible compensation, deux petits Traités de Sérénus accolés à l'édition restreinte comme pour la compléter.

La même chose a dû se passer pour Diophante; nous savons que, vers la fin du IVe siècle ou le commencement du Ve, il fut commenté par Hypatia. A la prolixité des commentaires de cette époque, on peut bien supposer que le travail ne fut pas plus complet que celui d'Eutocius pour Apollonius, et qu'il se borna à six Livres. Il en résulte une édition restreinte, à laquelle s'ajouta, pour compléter le Volume, le Livre des *Nombres polygones*, et c'est de cette édition que proviendrait l'original de nos manuscrits.

Seulement, et c'est la différence avec l'Apollonius d'Eutocius, dans l'original en question, le commentaire d'Hypatia a été supprimé. Il est, en effet, bien certain que Planude écrivait le sien sans profiter d'un autre antérieur qui lui aurait permis de reconnaître les confusions et corruptions du texte. Ces confusions, sinon ces corruptions, peuvent remonter d'ailleurs à la suppression du premier commentaire, car le copiste a parfaitement pu prendre pour des scholies quelques porismes que Diophante avait insérés au milieu de ses problèmes : de là les lacunes apparentes signalées

par Nesselmann; le copiste a pu, au contraire, conserver comme de Diophante des problèmes analogues traités par Hypatia.

Ces conjectures suffisent-elles pour expliquer l'état actuel du texte? C'est ce que nous allons voir en examinant les arguments de Nesselmann.

Il y aurait, d'après lui, une lacune considérable entre le premier et le deuxième Livre, lacune qui aurait été remplie originairement par la solution des équations du second degré et par l'analyse indéterminée du premier degré.

Mais toutes les raisons qu'il donne tombent devant un fait: c'est que le deuxième Livre est bien à sa place, puisque le texte de Diophante s'y réfère expressément (ὁμοίως τοῖς ἐν τῷ δευτέρῳ) dans le problème 17 du Livre III.

Pour ce qui concerne d'ailleurs la solution des équations du second degré, annoncée par Diophante dans son préambule, et considérée plus loin comme connue, j'ai montré, dans une autre occasion [1], qu'elle devait avoir été donnée en *porismes* sur les problèmes 1, 30, 33, et j'ai essayé de restituer le sens de ces *porismes*.

Quant à l'analyse indéterminée du premier degré, il n'y a guère de preuves précises que les Grecs en aient traité les questions, si ce n'est dans le célèbre problème des bœufs d'Archimède; mais, si l'on admet que Diophante avait recueilli les problèmes plus ou moins analogues, il n'y a certainement aucune nécessité de supposer qu'il les avait placés dans les premiers Livres; la recherche de solutions entières, propre à ces problèmes, devait, au contraire, le conduire à les placer après ceux où les solutions rationnelles sont admises, comme dans l'ensemble des six Livres qui nous restent.

Une remarque plus grave de Nesselmann concerne la confusion et le désordre de la division actuelle en Livres. Il est incontestable notamment, comme il le dit, que les sept premiers problèmes du deuxième Livre se rattachent naturellement au premier, et qu'au moins les quatre premiers du troisième se rattache-

---

[1] *De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide* dans les *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. IV (2e série), p. 395-416.

raient mieux au deuxième. Mais, au contraire, le Livre IV s'ouvre naturellement par les premières équations du troisième degré, le Livre VI se trouve exclusivement consacré aux problèmes sur les triangles rectangles numériques; enfin, pour le Livre V, si la distinction du commencement n'est pas aussi nette, elle ne provoque nullement le soupçon comme celles des Livres II et III.

Quant aux autres traces de confusion dans l'intérieur même des Livres, il n'y a pas à s'y arrêter; s'il y a, notamment, suivant toute vraisemblance, trois problèmes manquant entre V, 21 et 22, c'est un accident bien commun qui confirme seulement le mauvais état du texte dans le manuscrit archétype de ceux qui nous restent (1); si les problèmes II, 18, 19 devraient être reportés au premier Livre, après I, 25, c'est une transposition de texte dont les analogues ne manquent pas non plus dans des manuscrits d'un tout autre genre.

Attachons-nous donc seulement aux problèmes qui commencent les Livres II et III.

Les problèmes II, 1-5 sont des répétitions absolument inutiles des problèmes I, 34-37, et leur authenticité est dès lors plus que suspecte, Bachet l'avait déjà remarqué. Quant aux problèmes II, 6, 7, ce sont des variantes sans intérêt d'une question que Diophante avait probablement traitée entre les problèmes I, 33 et I, 34, à savoir : *Trouver deux nombres, connaissant leur différence et la différence de leurs carrés*, mais qui manque aujourd'hui. Il est donc permis de conjecturer que tous ces problèmes antérieurs à II, 8, c'est-à-dire au véritable commencement du Livre II, ont été empruntés au commentaire (d'Hypatia?), et que leur position vient précisément de ce que le copiste a respecté en fait l'indication de la fin du texte du premier Livre de Diophante (2).

Pour le commencement du Livre III, la question n'est pas tout à fait aussi claire. En fait, à partir de II, 3, Diophante commence

---

(1) Je puis signaler, comme preuve du peu de confiance que l'on doit avoir en particulier dans le manuscrit 200 du Vatican, qu'il a omis le problème V, 31 qui se trouve cependant dans les manuscrits des deux familles A et B.

(2) On peut admettre aussi que les problèmes II, 18, 19 proviennent de même du commentaire, et que le copiste, s'étant décidé après coup à les conserver, les aura intercalés à une place toute différente de celle où il aurait dû les mettre.

à étendre à trois inconnues des problèmes résolus plus haut pour deux, et l'on a les correspondances suivantes : (II, 21 et 33), (II, 22 et 34), (II, 23 et 34), (II, 24 et 35), (II, 25 et III, 2), (II, 26 et III, 3). Quant aux problèmes III, 1 et 4, à trois inconnues, ils appartiennent évidemment à la même série, mais ils n'ont pas leurs correspondants dans II, qui seraient :

Trouver deux nombres tels que leur somme moins le carré de chacun d'eux fasse un carré;

Trouver deux nombres tels que chacun d'eux moins le carré de leur somme fasse un carré.

La difficulté est qu'ici les premiers problèmes du Livre III ne sont nullement suspects comme les premiers du Livre II ; quoique faciles au fond, ils sont réellement dignes de Diophante, et s'ils ne sont pas de lui, ils appartiennent à un imitateur qui s'était parfaitement rendu maître des procédés du maître. On peut signaler quelques différences de rédaction avec les problèmes analogues du Livre II, mais ces différences sont plutôt en faveur de ceux du Livre III, si l'on considère la concision de l'exposition et l'assurance de la méthode.

Mais il est encore possible de conserver ces derniers problèmes à Diophante, tout en maintenant comme bonne la division actuelle.

En fait, l'ensemble des problèmes des Livres II et III est un ; la division originaire a donc été nécessairement arbitraire ; il ne nous est nullement prouvé que Diophante ait tenu à épuiser tous les problèmes offrant entre eux de l'analogie (par la variation des signes + et — 1 dans les équations auxquelles ils correspondent); enfin, d'après les usages de cette époque, les Livres s'éditaient successivement. Rien n'empêche donc d'admettre que Diophante, après avoir négligé quelques cas dans son Livre II, les ait repris pour son Livre III.

On peut, au contraire, regarder comme interpolés les deux derniers problèmes du Livre III, qui ne sont que des variantes sans intérêt de II, 15 et 16.

III.

Nesselmann développe un dernier argument qui peut se résumer comme suit :

Si l'on approfondit les procédés de Diophante, on arrive à la conviction qu'il ne pouvait dépasser ce qui se trouve dans les six Livres qui nous restent ; il n'a qu'un nombre limité de ressources avec lesquelles il ne pouvait faire beaucoup plus qu'il n'a fait dans ce que nous avons de lui.

Cet argument est spécieux, surtout parce qu'il vient d'un homme qui a étudié Diophante ; mais Nesselmann n'a pas assez considéré le mathématicien grec comme un compilateur, ce qu'il est réellement. La très grande différence de valeur entre les diverses solutions de ses problèmes l'indique cependant suffisamment, et Nesselmann a le premier fait remarquer lui-même combien peu Diophante se donne pour un inventeur.

Le recueil de problèmes d'Analyse indéterminée qui nous reste n'offre, en réalité, aucune unité de méthode qui permette de conclure, de ce que paraît ignorer Diophante à tel endroit, que son ignorance est réelle. Nesselmann fait remarquer, avec juste raison, que les problèmes du Livre VI sont généralement plus faciles que ceux du Livre V, et il en conclut que Diophante ne pouvait s'élever à un niveau supérieur. Il n'en est pas moins vrai que, si le Livre VI nous manquait comme les suivants, nous croirions, d'après le problème III, 12, que notre Grec ne savait pas traiter l'équation

$$52x^2 + 12 = y^2,$$

tandis que, d'après le lemme VI, 12, il sait qu'elle a une infinité de solutions. Plusieurs exemples semblables pourraient être donnés.

Les lacunes que semblent présenter les procédés de Diophante peuvent donc être illusoires et l'argument de Nesselmann n'est donc point valable. Reste à savoir si l'on peut réellement imaginer la matière des sept Livres perdus.

Pour avoir des données précises à cet égard, il faudrait avoir approfondi les travaux des Arabes en Analyse indéterminée. Leurs

algébristes peuvent, en effet (ce qui pourtant est douteux), avoir eu entre leurs mains le Diophante complet, et avoir conservé ses procédés. En tout cas, s'ils n'ont eu que les six premiers Livres, les progrès qu'ils ont réalisés n'ont pas dû dépasser ceux des Grecs. On sait au moins d'eux [1] qu'ils avaient particulièrement poursuivi l'étude du triangle rectangle en nombres et reconnu l'impossibilité de la solution de l'équation

$$x^3 + y^3 = z^3.$$

Si nous allons jusque chez les Hindous, nous y trouvons l'Analyse indéterminée du premier degré et la solution de l'équation de Pell. Sans doute, ils ont pu arriver d'eux-mêmes à ces questions; mais peut-on en refuser la connaissance aux Grecs quand elles sont supposées par le problème des bœufs d'Archimède? A la vérité, il est douteux que le géomètre de Syracuse ait communiqué ses méthodes; mais les questions étaient posées et des tentatives de solution plus ou moins complète ont dû exister dès avant Diophante. Comment, d'ailleurs, nous est parvenu ce problème des bœufs? N'est-ce point un débris des derniers Livres de l'Alexandrin et sa compilation ne devait-elle pas être couronnée par ce problème [2]?

Diophante enfin avait pu aborder d'autres sujets. Nous savons, par exemple, que Jamblique attribuait à Pythagore la connaissance des nombres *amiables* 220 et 284, dont chacun est égal à la somme des parties aliquotes de l'autre. L'Arabe Tâbit-ibn-Kurra a donné, pour trouver de tels nombres [3], un procédé analogue à celui d'Euclide pour les nombres parfaits.

Diophante a pu traiter, avec cette question, celle de trouver des nombres dans un rapport donné avec la somme de leurs parties aliquotes, comme l'ont fait plus tard Fermat et ses contemporains.

Enfin, il a pu recueillir quelques *récréations arithmétiques*,

---

(1) *Voir* M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Leipzig, 1880; p. 645 et suivantes.

(2) Sur le problème des bœufs d'Archimède, *voir* le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. V (2e série), 1881.

(3) $A = 2^n pq$ et $B = 2^n r$ sont des nombres *amiables*, si p, q, r sont des nombres premiers et que l'on ait

$$p = 3.2^n - 1, \quad q = 3.2^{n-1} - 1, \quad r = 9.2^{2n-1} - 1,$$

dont on doit supposer l'existence dès cette époque, quoiqu'on ne les retrouve guère avant la décadence complète de la Science ([1])?

En somme, s'il est évidemment impossible de songer à une restitution quelconque des Livres perdus de Diophante, il est permis d'affirmer qu'il avait pour les remplir une matière suffisante, et qu'ils offriraient pour nous au moins autant d'intérêt que les Livres conservés.

IV.

J'ai écarté implicitement l'hypothèse d'après laquelle, dans les treize Livres des *Arithmétiques,* il faudrait compter le Livre des *Nombres polygones* qui nous reste et un recueil de *Porismes* auxquels se réfère Diophante dans ses problèmes V, 3, 5, 19.

Pour le Livre des *Nombres polygones,* qui forme un Traité parfaitement distinct comme fond, comme forme et comme composition, il me paraît inutile de discuter la conjecture de Nesselmann, d'ailleurs rejetée par Hankel et M. Cantor. Quant aux *Porismes,* je ne puis me rallier à aucune des deux opinions émises, d'après lesquelles il s'agirait d'un recueil de propositions d'une forme spéciale qui aurait, suivant les uns, formé un Ouvrage à part, qui aurait, suivant les autres, occupé un ou plusieurs des Livres perdus des Arithmétiques.

Diophante dit trois fois : ἔχομεν ἐν τοῖς Πορίσμασιν ὅτι (nous avons dans les porismes que), et les trois propositions qu'il cite peuvent se représenter comme suit :

A. Si $x_1 = m^2 - a$, $x_2 = (m+1)^2 - a$, et $x_3 = 2(x_1 + x_2) - 1$,

---

([1]) J'en signalerai une publiée par Richard Hoche à la suite de son édition de Nicomaque (Leipzig, 1866), p. 152, et attribuée à Isaac Argyrus, moine grec du XIVe siècle, parce qu'elle suppose quelque connaissance de l'Analyse indéterminée du premier degré :

Trouver un nombre (supposé compris entre 7 et 105), connaissant ses résidus par rapport à 3, à 5 et à 7.

Je remarque à ce sujet que Hoche a donné sous le nom Τοῦ κύνος (Du chien) un problème qui précède ceux d'Isaac Argyrus. D'après le manuscrit 2377 de la Bibliothèque nationale, il faut lire Τοῦ κυδώνου. L'auteur doit donc être Démétrius Cydones, contemporain d'Isaac Argyrus.

les trois expressions x_1x_2+a, x_2x_3+a, x_3x_1+a sont des carrés.

B. Si $x_1=m^2$, $x_2=(m+1)^2$ et $x_2=2(x_1+x_2)+2$, les expressions $x_1x_2+x_1+x_2$, $x_2x_3+x_2+x_3$, $x_3x_1+x_3+x_1$ sont des carrés, ainsi que les suivantes : $x_1x_2+x_3$, $x_2x_3+x_1$, $x_3x_1+x_2$.

C. On peut résoudre toujours l'équation $x^3+y^3=a^3-b^3$ en nombres rationnels.

J'exclus tout d'abord l'opinion que Diophante se réfère à un Ouvrage étranger aux *Arithmétiques*. Entendus dans ce sens, *les Porismes* pris absolument ne pourraient être que l'Ouvrage d'Euclide qui portait ce nom et qui était consacré à de tout autres matières. Si Diophante avait composé un Ouvrage arithmétique sous le même titre, il aurait certainement dit : « Dans nos porismes ».

Les propositions qu'il cite se trouvaient donc dans les *Arithmétiques* mêmes; mais elles ne pouvaient figurer dans un Livre spécial, car alors il faudrait revenir à l'hypothèse de Nesselmann sur la confusion du rang des Livres des *Arithmétiques*.

Les porismes devaient donc être simplement des corollaires de certains problèmes, ainsi que nous l'avons déjà indiqué, en expliquant également comment ils se sont perdus.

Au temps de Diophante, d'ailleurs, le sens euclidien du mot *porisme* était à peu près perdu, et la signification de corollaire était la seule courante.

A l'appui de ma thèse, je puis d'ailleurs faire remarquer que l'Ouvrage des *Arithmétiques*, tel que nous l'avons, renferme encore quelques porismes.

Le scoliaste reconnaît comme tels la fin du problème I, 37 à partir de Ὁμοίως, et le problème I, 42; en réalité, il s'agit d'énoncés de problèmes nouveaux donnés en corollaires de problèmes analogues. D'autre part, comme forme d'énoncé et de rédaction, le problème V, 10 est un véritable porisme au sens euclidien. Les lemmes VI, 12 et 16 s'en rapprochent également assez comme forme.

Il s'agit donc seulement de savoir si les propositions citées par Diophante se rattachent naturellement aux problèmes antérieurs.

Or, pour A, la question de trouver trois nombres x_1, x_2, x_3, tels que leurs produits deux à deux, augmentés d'un nombre donné a, fassent des carrés, est le problème III, 12. Il est vrai que la solution donnée ne correspond nullement à la proposition citée V, 3, et qu'il faut supposer, par conséquent, que le porisme perdu renfermait une seconde solution.

Pour B, la question de trouver trois nombres, tels que leurs produits deux à deux augmentés de la somme des deux facteurs fassent des carrés, est le problème III, 17-18, dont la première solution correspond identiquement au porisme. La question de trouver trois nombres, tels que leurs produits deux à deux augmentés du troisième fassent des carrés, est, au contraire, le problème III, 14, dont la solution est différente. Mais on peut admettre ici que le porisme perdu était seulement en corollaire à III, 17 et renfermait la remarque que la solution donnée s'appliquait également au problème III, 14.

En somme, pour ces deux renvois de Diophante, on a une correspondance très satisfaisante avec les problèmes antérieurs; il n'en est pas de même pour le troisième.

C'est à l'occasion des problèmes IV, 1, 2 que Bachet et Fermat ont résolu la question supposée par le porisme de Diophante, et l'on ne voit guère d'autre place où la rapporter qu'à côté de ces deux questions. Cependant elles sont, en réalité, passablement différentes. On y propose de trouver deux nombres connaissant leur somme et celle de leurs cubes ou leur différence et celle de leurs cubes.

Il faudrait donc supposer là, non seulement la perte d'un porisme ou au plus d'une seconde solution, mais celle de toute une série de problèmes importants, et cette supposition est d'autant moins facile à admettre que le Livre IV est déjà très chargé.

Je proposerai donc une autre hypothèse. En réalité, au problème V, 19, Diophante ne donne nullement la solution; il indique seulement qu'il est possible. Je pense que sur les problèmes II, 8-11 (division d'un carré ou d'un nombre connu de deux carrés en deux autres carrés), il avait pu indiquer en corol-

laire que la division d'un cube en deux cubes est impossible, énoncé que nous avons vu chez les Arabes, qu'au contraire on peut partager en deux cubes un nombre somme ou différence de deux cubes; ce dernier problème n'était pas traité, mais réservé sans doute pour un des Livres perdus. Au cours du Livre V, Diophante, en ayant eu accidentellement besoin, ne s'est pas fait scrupule de recourir à ce problème non encore résolu.

Je puis appuyer à cet égard mon opinion sur ce fait que les procédés de Diophante pour égaler à un cube un polynôme du troisième degré, dans la partie de son œuvre qui nous reste, sont loin d'être développés comme ils devraient l'être. Ainsi, IV, 28, il déclare impossible l'équation

$$8x^3 - x^2 + 8x - 1 = y^3,$$

auquel il est pourtant facile de satisfaire en posant, soit $y = 2x - \frac{1}{12}$, soit $y = \frac{8}{3}x - 1$. Or, la solution de la décomposition en deux cubes d'une somme ou d'une différence de deux cubes réclame des positions tout à fait analogues, le problème n'a donc dû être effectivement traité que plus loin.

Si nous retrouvons ainsi un thème des problèmes perdus de Diophante, nous croyons pourtant devoir écarter, avec Nesselmann, l'opinion que les derniers Livres auraient pu contenir la solution des équations du troisième et du quatrième degré. Cette découverte semble bien avoir été réservée aux temps modernes, et cependant, il faut le remarquer, les Grecs n'avaient à faire qu'un pas pour y toucher.

Rien de plus facile, en effet, que d'appliquer la méthode de Diophante dans les problèmes IV, 1, 2, à la solution du problème :

Trouver deux nombres connaissant leur produit et la somme ou la différence de leurs cubes.

Soit

$$x_1^3 + x_2^3 = 2q, \quad x_1 x_2 = p, \quad x_1 = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}, \quad x_2 = \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}.$$

Si l'on prend pour inconnue $x_1 + x_2 = x$, on tombe sur l'équa-

tion

$$x^3 - 3px - 2q = 0,$$

dont la solution apparaît dès lors immédiatement.

On a cru trouver une preuve que Diophante avait traité des équations de degré supérieur dans le fait qu'il pousse la nomenclature des puissances successives jusqu'au sixième degré et jusqu'à celui-là seulement. Mais cette particularité ne lui appartient nullement; il suivait simplement à cet égard une tradition pythagoricienne, probablement ancienne, qui est attestée par plusieurs textes, et notamment par les témoignages décisifs de saint Hippolyte [1], auteur du IIe siècle après J.-C., lequel donne la série complète des six puissances, avec les mêmes noms que Diophante et en y ajoutant, comme lui, l'unité.

ACADÉMIE ROYALE DANOISE DES SCIENCES ET DES LETTRES.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Question mise au concours pour l'année 1884.

Dans un système de transformations linéaires du plan, déterminées par

$$\mu x_1 = ax + by + cz,$$
$$\mu y_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z,$$
$$\mu z_1 = a_2 x + b_2 y + c_2 z,$$

nous pouvons imaginer qu'on en a séparé quelques-unes pour lesquelles les coefficients satisfont à certaines conditions. Nous dirons alors qu'elles forment un groupe, si deux transformations effectuées l'une après l'autre peuvent être remplacées par une

[1] *Doxographi Græci*, ed. Diels, Berlin, 1879; p. 556-557.

troisième, et si toutes les transformations inverses satisfont aux mêmes conditions. En fait de groupes connus, nous pouvons mentionner le groupe complet, c'est-à-dire le groupe de toutes les transformations linéaires, le groupe des transformations qui n'altèrent pas la droite à l'infini, de celles qui ne font pas varier la distance entre deux points quelconque, de celles qui ne changent pas les angles ou les aires, etc. En général, toutes les transformations qui ne changent pas une fonction donnée doivent former un groupe. Réciproquement, on peut chercher des fonctions qui ne soient pas altérées par un groupe donné, et s'il en existe de telles d'une nature simple, le groupe doit pouvoir fournir la base d'intéressantes recherches géométriques. Des considérations analogues peuvent également s'appliquer à l'espace.

Un pareil principe de recherches a en réalité été exposé d'une manière claire et précise et même dans une plus grande étendue qu'ici, où nous n'avons parlé que de transformations linéaires (*voir* le programme de M. F. Klein à son entrée en fonction comme professeur de Mathématiques à Erlangen, en 1872), et a servi de base à des recherches étendues. Celles-ci, cependant, n'ont en grande partie eu en vue que des résultats se rapportant à l'Algèbre et à la théorie des fonctions, tandis que le principe n'a pas reçu autant d'applications purement géométriques. L'Académie propose en conséquence sa médaille d'or en prix pour un travail qui donnera la théorie générale des groupes de transformations linéaires dans le plan et dans l'espace et de la formation de leurs sous-groupes, et qui, sur la base de sous-groupes bien choisis, présentera sous un jour nouveau et fécond des propriétés connues de figures à deux et à trois dimensions, ou aboutira à des résultats entièrement nouveaux.

Les réponses à cette question peuvent être écrites en latin, en français, en anglais, en allemand, en suédois et en danois. Les Mémoires ne doivent pas porter le nom de l'auteur, mais une devise, et être accompagnés d'un billet cacheté muni de la même devise et renfermant le nom, la profession et l'adresse de l'auteur. Les membres de l'Académie qui demeurent en Danemark ne prennent point part au Concours. Le prix accordé pour une réponse satisfaisante est la médaille d'or de l'Académie d'une valeur de 320 couronnes.

Les Mémoires devront être adressés, avant la fin du mois d'octobre 1885, au secrétaire de l'Académie, M. H.-G. Zeuthen, professeur à l'Université de Copenhague. Les prix seront publiés en février 1886, et les auteurs pourront ensuite retirer leurs Mémoires.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

FIEDLER. — Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis und Kugel-Systeme. 1 vol. in-8°; 283 pages et 16 planches. Leipzig; 1882.

Le procédé employé par M. Fiedler pour résoudre systématiquement les problèmes dont il s'occupe dans son Livre consiste à représenter un cercle par deux points situés sur l'axe de ce cercle à une distance de son centre égale au rayon; si l'on n'a affaire qu'à des cercles situés dans un même plan, un seul de ces points suffit évidemment à la représentation; toutefois, il peut être utile de conserver les deux points en leur attribuant des significations distinctes; l'un représentant le cercle décrit dans un sens déterminé, ou, si l'on veut, avec un rayon positif, le second représentant le même cercle décrit dans le sens contraire (ou avec un rayon négatif).

L'auteur était depuis longtemps en possession de ce mode de représentation; s'il n'en a pas fait plutôt l'objet d'une publication spéciale, c'est qu'il était persuadé que cette méthode était connue de Steiner, comme l'étaient assurément un grand nombre des conséquences qui s'en déduisent le plus facilement. Nous devons toutefois faire observer que ce mode de représentation n'est pas absolument nouveau, ou tout au moins qu'il est lié intimement à une notion due à M. Chasles et qui a été utilisée par M. Cayley [*Sur le théorème de M. Casey* (*Annali di Matematica*)], par M. Laguerre (*Bulletin de la Société Philomathique*, 1870, et *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1872), et par M. Darboux [*Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace* (*Annales scientifiques de l'École normale*, 2e série, t. I, 1872)]. Elle consiste en ce que tout cercle peut être regardé comme l'intersection de deux sphères de rayon nul, dont les centres sont situés à une distance du plan du cercle égale à $R\sqrt{-1}$, R désignant le rayon du cercle; le mode de représentation considéré par M. Fiedler consiste à employer, au lieu de ces deux points, imaginaires si l'on considère un cercle réel,

les deux points réels dont la définition a été donnée plus haut. Le Mémoire de M. Darboux, en particulier, a évidemment échappé à l'éminent professeur de Zurich; l'auteur y a traité, en effet, en employant systématiquement ce mode de représentation, un grand nombre des problèmes dont s'est occupé M. Fiedler, en particulier le problème du cercle tangent à trois cercles donnés, et celui du cercle coupant quatre cercles donnés sous des angles égaux. Au surplus, les deux modes de représentation étaient trop voisins pour que la rencontre pût être évitée; M. Fiedler a même été conduit par son propre sujet à dire un mot de la représentation employée par M. Darboux et il en signale une des plus importantes propriétés : de telles rencontres n'ont rien qui doive étonner à une époque où l'activité scientifique est aussi considérable.

Le Livre de M. Fiedler est nettement élémentaire : l'auteur l'a voulu tel et a écarté un très grand nombre de propositions qu'il aurait pu déduire aisément de sa méthode.

Il débute par quelques notions relatives à la perspective, au rapport harmonique, aux figures homologiques; il passe ensuite à la considération des systèmes linéaires de cercles dans un plan, c'est-à-dire des systèmes de cercles dont les représentants sont en ligne droite, cercles qui ont un centre d'homothétie commun; il considère ensuite les systèmes planaires : trois cercles appartenant à un tel système ont un axe d'homothétie fixe; un cercle quelconque du système coupe cette droite sous un angle constant; il résout divers problèmes relatifs à la construction des cercles d'un système linéaire ou planaire qui satisfont à une ou deux conditions.

Le second Chapitre est consacré aux faisceaux et réseaux de cercles; il contient la théorie des axes radicaux et de la transformation par rayons vecteurs réciproques. Les réseaux de cercles sont représentés par des hyperboloïdes de révolution équilatères, admettant le plan du tableau comme plan de l'équateur.

Dans le Chapitre suivant, M. Fiedler s'occupe des cercles tangents à un cercle donné ou coupant un cercle donné sous un angle donné; ces systèmes de cercles sont représentés par des cônes ou des hyperboloïdes de révolution équilatères, tandis qu'ils sont représentés par des sphères dans le système de représentation employé par M. Darboux.

Dans ce même Chapitre, l'auteur traite des cercles coupant trois

ou quatre cercles sous des angles égaux ou des angles donnés, des cercles tangents à trois cercles du cercle des neuf points dans ses rapports avec les cercles tangents aux trois côtés du triangle; il s'occupe enfin des problèmes analogues pour les sphères.

Le quatrième Chapitre contient une théorie élémentaire des coniques. Enfin, dans le cinquième et dernier Chapitre, l'auteur traite, pour les cercles tracés sur une sphère, les problèmes analogues à ceux qu'il a résolus pour des cercles situés dans un plan.

J. T.

MÉLANGES.

FACULTÉS DES DÉPARTEMENTS.
SUJETS DE COMPOSITION DONNÉS AUX EXAMENS DE LICENCE.

SESSION DE JUILLET-AOUT 1883.

Bordeaux.

Analyse. — Discuter la courbe lieu des intersections de deux droites, dont l'une se meut dans un plan parallèlement à elle-même et avec une vitesse uniforme, tandis que l'autre tourne uniformément autour d'un point fixe. On prendra pour origine des coordonnées le point fixe et, pour axe des x, une parallèle aux droites de direction constante.

Montrer que la courbe ainsi construite donnerait le moyen de résoudre le problème de la quadrature du cercle, si l'on savait la construire par un mouvement continu.

Mécanique. — 1° Démontrer succinctement le théorème des couples de quantités de mouvement pour un système de points matériels.

2° Un cercle matériel homogène, de masse M, placé dans un plan horizontal, tourne avec une vitesse angulaire donnée ω au-

tour d'un axe vertical passant par son centre. Un point matériel, en partant du centre, marche avec une vitesse v le long d'un des rayons du cercle. On demande quelle sera la vitesse angulaire du système au temps t. Quel doit être le rapport des masses pour que cette vitesse soit devenue la moitié de la vitesse angulaire primitive au moment où le point matériel arrive à l'extrémité du rayon?

Épreuve pratique. — Établir les formules générales de la transformation de l'angle horaire et de la déclinaison en azimut et hauteur.

Calculer pour Bordeaux ($\varphi = 44^\circ 50' 19''$) l'angle horaire et l'azimut du coucher du Soleil, le 26 juillet 1883.

Déclinaison Θ, le 26, à midi vrai	$+19^\circ 41' 30'',8$
Déclinaison Θ, le 27, à midi vrai	$+19^\circ 28' 27'',2$

Besançon.

Analyse. — On donne un cylindre parabolique dont l'équation en coordonnées rectangulaires est $x^2 - z = 0$; trouver sur ce cylindre une courbe C, telle que, T étant la trace sur le plan des xy de la tangente en un point quelconque M, A et B étant les intersections du plan osculateur avec Ox, Oy, le point T soit situé au milieu de AB. On demande la projection de la courbe sur le plan des xy.

Mécanique. — Un point matériel non pesant assujetti à rester sans frottement sur une parabole de paramètre p, qui tourne uniformément autour de son axe avec la même vitesse angulaire ω, est attiré vers le foyer par une force de $4h^2\rho$ proportionnelle au rayon vecteur ρ. On demande le mouvement du point sur la parabole en supposant que la vitesse initiale au sommet est

$$v_0 = p\sqrt{\omega^2 - h^2}.$$

Épreuve pratique. — Quelle est l'heure sidérale à laquelle l'étoile α de la Lyre atteint la hauteur $34^\circ 24' 10''$ au-dessus de l'horizon de Besançon?

Les coordonnées équatoriales de α Lyre sont

$$\text{AR} = 18^h 33^m 1^s.$$
$$\delta = 38^\circ 40' 36''.$$

Latitude de la Faculté, $47^\circ 13' 46''$.

Caen.

Analyse. — 1° Intégrer l'équation différentielle

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - 3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 7x \frac{dy}{dx} - 8y = x^3 - 2x.$$

2° Calculer la valeur de l'intégrale imaginaire

$$\int \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)},$$

prise suivant la circonférence du cercle défini en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

Mécanique. — Montrer comment varie le moment d'inertie d'un cube homogène par rapport aux diverses droites qui passent en un sommet O du cube; déterminer les axes principaux et les moments principaux d'inertie relatifs au point O.

On suppose que le sommet O est fixe, tandis qu'aucun autre point du solide n'est soumis à l'action de forces extérieures; le cube, libre de tourner autour du point O, est d'abord en repos lorsqu'une des faces qui aboutissent au sommet fixe vient à être choquée en son centre par une très petite sphère, animée d'une vitesse de translation donnée perpendiculaire à la face choquée. On demande le mouvement que prendront après le choc les deux corps supposés parfaitement élastiques.

Épreuve pratique. — On donne, pour le 10 août à midi vrai, la déclinaison du Soleil égale à $15^\circ 31' 34''$ et l'équation du temps égale à $5^m 8^s,1$; pour le 11, à midi vrai, la déclinaison est de $15^\circ 14' 53''$, l'équation du temps $4^m 58^s,7$. Calculer en temps moyen

l'heure du coucher du Soleil pour le 10 août en un lieu dont la latitude est $50°38'44''$. On ne tient compte ni de la réfraction ni de la parallaxe.

Clermont.

Analyse. — On donne une surface du second degré et une tangente MT en un point M de cette surface. On mène un plan passant par MT. On construit dans ce plan le centre O du cercle osculateur de la section en M, puis le centre O′ du cercle osculateur de la développée de la section en O.

Lieu des points O′ lorsque le plan tourne autour de MT.

Mécanique. — Un fil sans masse de longueur constante tourne autour d'un point fixe O dans un plan vertical. Deux masses pesantes m et m' sont situées en deux points donnés du fil et éprouvent de la part de l'air des résistances proportionnelles à leurs vitesses respectives. Étudier le mouvement du système. Cas des petites oscillations.

Épreuve pratique. — Calculer la valeur de u par la formule

$$u - e \sin u = nt,$$

en prenant $t = \frac{T}{4}$, $e = 0{,}01676697$, $n = \frac{360}{T}$, $T = 365{,}2422$.

Dijon.

Analyse. — Intégration d'une équation aux dérivées partielles, linéaire par rapport aux dérivées de la fonction inconnue. Élimination de la fonction arbitraire qui figure dans l'intégrale générale. Recherche de la forme que doit avoir cette fonction pour que l'intégrale ait une détermination initiale donnée.

N. B. — Les candidats pourront se borner à l'examen du cas où la fonction inconnue ne dépend que de deux variables indépendantes.

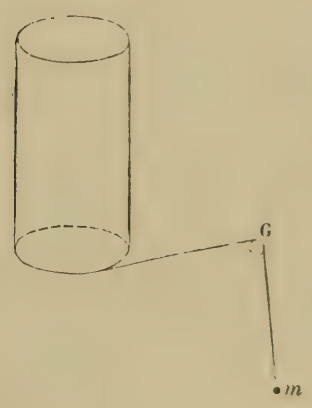
Mécanique. — Un fil inextensible et sans masse, assujetti à rester sur un plan horizontal, s'enroule par une de ses extrémités

sur un treuil vertical homogène, de masse M, puis sur une poulie G infiniment petite, et se termine par une masse m attirée vers G par une force inversement proportionnelle au carré de la distance.

Étudier le mouvement du système et, en particulier, la trajectoire du point de masse m dans le cas où la vitesse initiale du treuil est nulle.

Épreuve pratique. — Résoudre un triangle sphérique connaissant les éléments suivants :

$$a = 11^\circ 25' 56'',3,$$
$$B = 184^\circ\ 6'\ 55'',4,$$
$$C = 11^\circ 18' 40'',3.$$



Grenoble.

Analyse. — 1° Intégrer l'équation

$$y\left(1 + 2\frac{dy^2}{dx^2}\right) + x\frac{dy}{dx} = 0.$$

2° Arête de rebroussement de la surface enveloppe d'une sphère qui se meut en conservant un contact de second ordre avec une courbe donnée.

Mécanique. — Mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur la surface d'un cône de révolution et attiré vers le sommet du cône en raison inverse du carré de la distance. Développement de la trajectoire. Réaction de la surface.

Épreuve métallique. — Calculer les coordonnées équatoriales d'une étoile dont les coordonnées écliptiques sont

$$l = 146^\circ 16' \ 6'',21,$$
$$\lambda = \ \ 0^\circ 43' 42'',67,$$

l'obliquité de l'écliptique étant

$$23^\circ 27' 24'',34.$$

Lille.

Analyse. — 1° A quels caractères reconnaît-on qu'une fonction $f(x, y, z)$ est maximum ou minimum, ou n'est ni l'un ni l'autre pour un système de valeurs x, y, z qui annule les dérivées premières de cette fonction, mais qui donne des valeurs différentes de zéro à ses dérivées secondes?

2° Trouver la fonction y de x qui, faisant acquérir une valeur donnée C à l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 dx,$$

rend minimum l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (y'^2 - y^3) dx.$$

Mécanique. — 1° Stabilité de l'équilibre dans le cas où la fonction des forces est maximum.

2° Déterminer le mouvement du système de deux points pesants réunis par une tige rigide sans masse; chacun de ces points éprouve, en sens contraire de sa vitesse, une résistance proportionnelle à cette vitesse. On connaît la position initiale de la tige et l'on suppose les vitesses initiales des deux points situés avec la tige dans un même plan vertical.

Épreuve pratique. — Deux observations faites à deux époques différentes d'un même mois ont donné pour la déclinaison du Soleil :

1° ..... $\delta = 6^\circ 26' 40''$

2° ..... $\delta' = 13^\circ 12' 20''$

La différence des ascensions droites est $\alpha' - \alpha = 17^\circ 39' 9'',6$. En déduire l'obliquité de l'écliptique.

Lyon.

Analyse. — Une surface rapportée à des axes rectangulaires a pour équation

$$(x-y)^2 z^2 - 4z + 2x^2 - 3xy + 3y^2 = 0.$$

On demande de déterminer pour un point de la surface choisi à volonté : 1° les rayons de courbure des sections principales; 2° les directions de ces sections par rapport aux axes.

Intégrer l'équation

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - y = e^x - 1.$$

Épreuve pratique. — La comète Swift-Brooks a une orbite dont les éléments de position sont :

Longitude du périhélie.....	$\pi = 29^\circ 0' 1'',4$
Longitude du nœud ascendant.....	$\Omega = 278^\circ 7' 40'',7$
Inclinaison sur l'écliptique.....	$i = 78^\circ 4' 40'',2$

Le 15 avril 1883, à minuit moyen de Paris, cette comète avait pour anomalie moyenne

$$v = 79^\circ 21' 41'',6.$$

Calculer la longitude et la latitude héliocentriques correspondantes.

Marseille.

Analyse. — Trouver les lignes asymptotiques de la surface

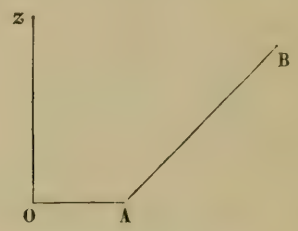
$$z = f(x) - f(y);$$

déterminer la fonction f par la condition que les lignes asymptotiques de la première série coupent orthogonalement celles de la

seconde. Trouver dans cette hypothèse les lignes asymptotiques de la surface sous forme finie. Discussion.

Mécanique. — On considère l'hyperboloïde de révolution engendré par la rotation d'une droite AB autour d'un axe fixe Oz qui ne la rencontre pas. La plus courte distance OA des deux droites est égale à a. La direction de AB fait avec Oz un angle de 45°.

Un point matériel m non pesant de masse égale à l'unité se meut sans frottement sur cet hyperboloïde sous l'action d'une force constamment dirigée vers le point O et proportionnelle à la distance. On supposera que l'attraction à l'unité de la distance est égale à k^2.



On demande d'étudier le mouvement du point M dans le cas particulier où les données initiales sont les suivantes : 1° dans sa position initiale, le point M est en A ; 2° la vitesse initiale est égale à $Ka\sqrt{2}$; 3° la direction de la vitesse initiale, qui est d'ailleurs nécessairement dans le plan tangent en A, fait un angle de 60° avec Oz. On demande aussi de calculer la pression et de déduire de ce calcul une observation sur la nature de la trajectoire.

Si l'on définissait le mouvement du point M en considérant ce point comme assujetti à se mouvoir sur la génératrice AB pendant que cette génératrice tourne autour de Oz, quel serait le mouvement relatif de ce point et quelle serait à chaque instant la vitesse angulaire de rotation de AB autour de Oz.

Épreuve pratique. — Étant données la longitude λ et la latitude β d'un astre, ainsi que l'inclinaison de l'écliptique ε, calculer l'ascension droite et la déclinaison de cet astre.

$$\lambda = 235^\circ 48' 25'',6,$$
$$\beta = -\ 6^\circ 29' 48'',5,$$
$$\varepsilon = 23^\circ 27' 15'',5.$$

Montpellier.

Analyse. — Étant donnée l'équation différentielle

$$P\,dx + Q\,dy = 0,$$

où P et Q sont des fonctions de x et de y, démontrer qu'il existe une fonction v de x et de y, telle que l'expression

$$vP\,dx + vQ\,dx$$

soit une différentielle exacte.

Donner l'expression générale des facteurs tels que v, lorsqu'on connaît l'un d'eux. Trouver un facteur v lorsqu'on sait qu'il est indépendant de x ou de y.

Mécanique. — Mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution donnée. L'axe de figure est pris pour axe des z et la force motrice, constamment parallèle à cet axe, est supposée une fonction donnée de z.

Montrer que le problème peut toujours se ramener aux quadratures. On effectuera complètement le calcul dans le cas où, la surface étant un cône dont le sommet est à l'origine, la force est proportionnelle à z.

Épreuve pratique. — 1° Le 2 mai 1883, la déclinaison du Soleil au midi vrai, à Paris, est trouvée égale à $15^\circ 21' 17'',3$. Le 31 du même mois, la déclinaison est $21^\circ 54' 30,6$.

L'accroissement de l'ascension droite dans l'intervalle est

$$1^h 54^m 49^s,85.$$

En déduire l'obliquité de l'écliptique.

2° Mouvement du Soleil en ascension droite. Inégalité des jours solaires. Équation du temps. On indiquera seulement, sans démonstration, les calculs ou les développements qui se rapportent à ces questions.

Nancy.

Analyse. — 1° Définition d'une intégrale prise entre des limites imaginaires données. L'intégration étant faite successivement suivant deux lignes différentes terminées aux deux points qui représentent ces limites, la valeur de l'intégrale peut rester la même.

Comme application, expliquer comment il faut mener les différentes lignes que doit suivre la variable z pour que l'intégrale obtienne

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{\sin z}$$

ses différentes valeurs.

2° Trouver une équation différentielle entre x, y qui renferme toutes les hyperboles équilatères tracées dans un plan et ayant leur centre en un point donné (x, y sont deux cordonnées rectangulaires).

3° Intégrer, d'après les règles connues, l'équation différentielle

$$(x^2+y^2)\frac{d^2y}{dx^2} - y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + x\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Mécanique. — Deux points pesants M, M′ sont réunis par une tige de longueur invariable a dont on négligera la masse. Ils sont assujettis à glisser sans frottement, le premier sur une sphère fixe de rayon a égal à la longueur de la tige, le second sur le diamètre vertical de cette sphère :

1° Étudier le mouvement du système.

2° Déterminer l'état initial de manière que le point M décrive un cercle horizontal. Quelle est, dans ce cas, la durée de la révolution?

Épreuve pratique. — En un lieu dont la latitude est

$$\lambda = 48^\circ 41' 31''.$$

on a observé à un certain instant l'azimut A et la distance zénithale Z d'une étoile

$$A = 29^\circ 15' 40'',$$
$$Z = 61^\circ 48' 36''.$$

Calculer l'heure sidérale de cet instant. On connaît l'ascension droite

$$\text{Æ} = 5^h 23^m 14^s,$$

et la réfraction calculée est $1',8$.

Poitiers.

Analyse. — Trouver l'équation générale des surfaces telles que si, par un point M de l'une d'elles, on mène la normale MP terminée au plan des xy, la longueur MP soit égale à la distance OP du point P à l'origine des cordonnées.

Déterminer celle de ces surfaces qui passe par la spirale contenue dans le plan des xy et dont l'équation est

$$\sqrt{x^2 - y^2} = a e^{m \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}}.$$

Mécanique. — 1° L'extrémité A d'une droite AB se meut sur une circonférence dont le rayon est précisément égal à AB, tandis que l'extrémité B se meut sur un diamètre de cette circonférence. En quoi consiste le mouvement épicycloïdal d'une figure plane entraînée par AB.

2° Un point matériel pesant de masse m a été abandonné sans vitesse initiale relative dans un tube étroit, mobile autour d'une verticale de son plan et qui a reçu une vitesse angulaire initiale. Quelle est la valeur de la pression exercée par le point normalement au plan du tube et quelle est l'accélération qui en résulte pour le système formé par le tube et le point. Signification de l'intégrale de l'équation ainsi obtenue. On désignera par μ le moment d'inertie du tube par rapport à l'axe.

Épreuve pratique. — Le 1er janvier 1875, les coordonnées hé-

liocentriques de Vénus avaient pour valeur

Longitude.....	114°42′12″,2
Latitude boréale.....	2° 8′37″,5
Rayon vecteur.....	0,7185679

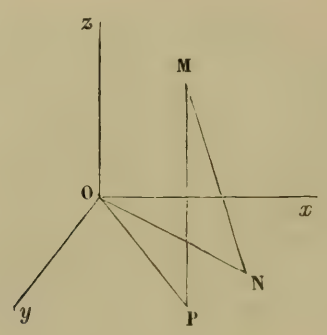
On demande de calculer les coordonnées géocentriques de cette planète, sachant que ce même jour la Terre avait pour coordonnées héliocentriques

Longitude.....	100°43′10″,4
Rayon vecteur.....	0,9832602

Rennes.

Analyse. — Le point P étant la projection d'un point quelconque M d'une surface sur le plan des xy et le point N étant la trace de la normale en M sur le même plan, quelle doit être cette surface pour que l'angle NOP soit constant?

Étudier les intersections des surfaces qui jouissent de cette propriété par des sphères ayant leur centre à l'origine des coordonnées.



Mécanique. — Un point matériel libre est soumis à l'action de deux forces : l'une est une attraction vers l'origine O des coordonnées inversement proportionnelle au cube de la distance et dont la valeur à l'unité de distance est μ, l'autre parallèle à Oz est de sens contraire à la composante de la première suivant cet axe et double de cette composante.

On imagine deux hyperboloïdes équilatères de centre O, de révolution autour de Oz, passant l'un par le mobile, l'autre par l'ex-

trémité d'une droite égale et parallèle à la vitesse menée par l'origine O et l'on demande :

1° Comment varient les axes de ces deux surfaces;

2° De réduire la détermination du mouvement à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre;

3° D'intégrer cette équation et d'étudier le mouvement dans le cas particulier où le mobile placé à l'origine du temps sur le plan zx reçoit parallèlement aux y une vitesse égale au quotient de $\sqrt{\mu}$ par sa distance à l'origine. On examinera en particulier comment varient la direction de la force, la grandeur de la vitesse et quelle est la nature de la trajectoire?

Épreuve pratique. — Quelle est l'heure solaire vraie dans un lieu dont la latitude est de

$$45°52'34'',26$$

quand la hauteur du Soleil, corrigée de la réfraction, est de $29°48'37'',18$, sa déclinaison boréale étant de $15°28'32'',58$?

Toulouse.

Analyse. — 1° On demande les trajectoires orthogonales des courbes représentées en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$y^2 + 3x^2 - ax = 0,$$

où a désigne le paramètre variable.

2° Évaluer l'aire de la boucle formée par une de ces trajectoires.

Mécanique. — Un mobile assujetti à décrire une courbe représentée en coordonnées polaires par l'équation

$$r = \frac{a}{2}(1 + \cos\theta)$$

est soumis à l'action d'une force répulsive constante $2k^2a$ émanant du pôle. Il est placé en un point B de cette courbe sans vitesse initiale. On demande :

1° D'étudier le mouvement du point sur la courbe;

2° De montrer que le mobile mettra toujours le même temps pour atteindre le sommet A de cette courbe, quel que soit le point de départ B ?

3° De calculer la pression du point sur la courbe.

Épreuve pratique. — L'anomalie vraie d'une planète est $112^\circ 28' 42'', 5$.

L'excentricité de l'orbite est égale au sinus de $2^\circ 3' 42'', 81$.

Trouver l'anomalie moyenne.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

JORDAN (C.). — Cours d'Analyse de l'École Polytechnique. Tome II : Calcul intégral. 1 vol. in-8°; 432 pages. Paris. 1883.

Le second Volume du *Cours d'Analyse* de M. Jordan est consacré à la théorie des intégrales. Par le court résumé qui suit, où l'on s'est efforcé de mettre surtout en évidence ce qui distingue ce Livre des Traités classiques, le lecteur pourra juger de la quantité considérable de matière que l'auteur est parvenu à condenser dans un petit nombre de pages, grâce à un rare talent d'exposition, à une recherche toujours heureuse de la concision et de l'élégance.

Le premier Chapitre se rapporte aux intégrales indéfinies, le second aux intégrales définies; on y notera en particulier l'ingénieuse démonstration, due à M. Hermite, de l'incommensurabilité de π fondée sur la considération de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n \cos zx\, dx;$$

la démonstration de la belle formule de M. Bonnet

$$\int_{x_1}^{X} f(x)\varphi(x)\,dx = f(x_0)\int_{x_0}^{\xi} \varphi(x)\,dx + f(X)\int_{\xi}^{X} \varphi(x)\,dx,$$

où l'on suppose que la fonction $f(x)$ varie dans le même sens de x_0 à X, et où ξ est compris entre les mêmes limites; l'exposé des méthodes les plus célèbres pour le calcul approché des intégrales définies. Dans le troisième Chapitre, M. Jordan traite des intégrales multiples, des aires, des volumes, des centres de gravité, des moments d'inertie; il y donne l'expression de l'aire de l'ellipsoïde, la démonstration de Gauss du théorème fondamental de l'Algèbre, les formules pour le changement de variables. Le Chapitre IV est intitulé : *Des fonctions représentées par les intégrales définies;* l'auteur y enseigne les règles pour la différentiation et l'intégration sous le signe $\int$ et les applications classiques de ces règles; il y donne une théorie succincte des intégrales eulériennes, compre-

nant la démonstration de la formule de Stirling et du théorème de Bernoulli, une théorie de la fonction potentielle comprenant, outre les propriétés élémentaires de cette fonction pour le cas d'un volume ou d'une surface, les théorèmes de Green et la méthode de Gauss pour l'attraction des ellipsoïdes.

Le Chapitre suivant contient la démonstration et la généralisation des propositions de Lejeune-Dirichlet sur les développements des fonctions en séries trigonométriques, ou procédant suivant les fonctions de Laplace, démonstration fondée sur les théorèmes généraux que l'on doit à M. du Bois-Reymond. Enfin les deux derniers Chapitres sont consacrés à la théorie des variables imaginaires et des fonctions elliptiques, d'après les principes de Cauchy, et, plus particulièrement, d'après la *Théorie des fonctions doublement périodiques* de MM. Briot et Bouquet. « Les Chapitres VI et VII du présent Volume, dit M. Jordan dans sa Préface, ne sont guère qu'un résumé de ce bel Ouvrage. » Ajoutons que le Chapitre V contient les théorèmes de M. Weierstrass et de M. Mittag-Leffler sur les fonctions entières et les fonctions uniformes. Dans le Chapitre VI, on trouvera le théorème d'Abel, son application à l'intégrale elliptique, les propriétés élémentaires des fonctions elliptiques, leur expression au moyen des fonctions θ, les théorèmes sur l'addition, une étude rapide du problème de la transformation et de la multiplication, l'introduction de l'équation modulaire, enfin l'expression, au moyen des fonctions θ, des intégrales elliptiques de seconde et de troisième espèce, effectuée en partant de la formule de décomposition en éléments simples, due à M. Hermite. J. T.

MÉLANGES.

ÉLOGE DE M. VICTOR PUISEUX,

LU DANS LA SÉANCE PUBLIQUE ANNUELLE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DU 5 MAI 1884;

PAR M. J. BERTRAND.

Le Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, dans la séance publique de l'année 1722, après avoir loué chez un académicien la simplicité du caractère, aussi grande que la supériorité de son esprit pouvait le permettre, ajoutait aussitôt : « J'ai déjà donné cette louange à tant de personnes de cette Académie, qu'on peut croire que le mérite en appartient plus à nos sciences qu'à nos savants. » Les temps ont changé. L'indifférence pour la fortune, l'attente tranquille de la renommée, l'antique mépris de Socrate *pour tout ce pour quoi les hommes tant veillent, courent, travaillent, naviguent et bataillent,* ne sont aujourd'hui ni l'apanage de nos sciences, ni le trait commun à nos savants ; ils appartiennent à des exceptions. Victor Puiseux en était une.

Notre excellent et vénéré confrère nous rappelait ces académiciens du vieux temps, si simples et si modestes, dont la bonté et les rigides vertus mêlaient au sourire de Fontenelle une émotion sincère et continue. On imagine sans efforts la figure paisible et toujours égale de Puiseux, dans la compagnie de Desbilettes qui aimait le bien avec superstition et qui, pour se dérober à l'éloge dont il savait l'usage établi, mit tant de soin à cacher sa vie que la brièveté des détails répondit à son intention ; d'Amontons, dont la droiture si naïve et si peu méditée faisait paraître l'impossibilité de se démentir; de Méry qui, dans sa réputation, ne mettait rien du sien que son mérite; de Bourdelin, dont Fontenelle, pour ne pas se rendre suspect d'exagération, n'osait dire dans son éloge toute la douceur et toute la bonté; de Duverney qui, dans les intervalles que lui laissaient ses souffrances, ne consentit jamais à ralentir ses travaux (sa santé en souffrait, mais il aurait encore plus souffert de les négliger); de Duhamel surtout, qu'après avoir loué comme savant et comme académicien, Fontenelle n'osait représenter comme homme, ne se jugeant pas digne, disait-il, de faire le panégyrique d'un saint.

Victor Puiseux naquit à Argenteuil le 16 avril 1820. Son père, receveur des contributions, fut appelé trois ans après à Longwy, puis à Pont-à-Mousson, où notre confrère fit ses premières études.

M. Puiseux père était un homme d'esprit; il aimait le théâtre, jouait à l'occasion la tragédie, et ses amis l'applaudissaient.

La fermeté de Victor, inébranlable pour le bien dans toutes les rencontres de sa vie, se tourna d'abord en entêtement. Agé déjà de cinq ans, il refusait d'apprendre à lire et, par une impassible inertie, décourageait la douce sévérité de sa mère. On eut recours à la ruse. Mme Puiseux commençait d'amusants récits; mais, lorsque l'intérêt était au comble, quand les yeux de l'enfant brillaient de joie, au moment où l'imagination de Victor le perdait avec le petit Poucet dans les profondeurs de la forêt, évoquait Cendrillon magnifiquement parée, le faisait rougir pour le marquis de Carabas, contraint par les ruses du chat botté de se montrer sans habits, on lui disait : Devine la fin. Ce furent ses premiers problèmes. L'enfant inventait des solutions : le livre de Perrault cachait la véritable; pour l'y trouver, il fallait savoir lire; Victor ne fut pas long à apprendre. Ce premier pas fut le seul difficile. Toujours supérieur à ses condisciples, Puiseux, chaque année, franchissait une classe et conservait le premier rang; à l'âge de quatorze ans, il étudiait en rhétorique, avec éclat, nous en avons la preuve. D'après les vieilles usances du collège, le jour de la distribution des prix, un élève, choisi parmi les meilleurs des premières classes, prononçait un discours longuement médité. L'orateur désigné pour l'année 1834 fut Victor Puiseux. Son esprit précoce et solide, déjà tourné vers l'exacte vérité, ne l'était pas vers l'éloquence; il allait droit au but sans égayer et sans orner la route. Docile cependant au désir de ses maîtres, il joua gravement son personnage et sortit de l'épreuve à leur honneur. Un discours très sensé sur l'utilité des sciences physiques, débité sans chaleur, mais sans embarras, fut approuvé par de bons juges. Les mots techniques inconnus à son maître de rhétorique y étaient amenés à propos et employés avec justesse. Victor, à les apprendre, avait trouvé plaisir et profit; les lettres, qu'il aimait, n'avaient détourné de la Science ni ses regards curieux des vérités visibles, ni son esprit prompt à tout comprendre; lisant à l'aventure des livres d'Algèbre, résolvant sans maître des problèmes de Géométrie, butinant des plantes dans ses promenades, dès que sa cu-

riosité était frappée, il le disait. Sans s'entêter de rien, il méditait sur tout. Son esprit actif et patient ressemblait à ces puissantes machines qui, sans s'efforcer ni se ralentir, triomphent silencieusement de tout obstacle.

M. Léon Puiseux, brillant élève de l'École Normale, décida ses parents, un peu effrayés de la dépense, à envoyer son jeune frère dans une pension de Paris. Accoutumé à la liberté, Victor respectait toutes les règles ; c'est pour cela qu'elles le gênaient. Approuvé par son frère qui le connaissait et ne craignait rien, il désira, tout en suivant les classes du collège, étudier seul et libre dans une chambre à lui. Sage et sérieux, esclave de sa parole, attentif à tous les devoirs, Victor, se formant lui-même, se ménageait du temps pour le plaisir, je veux dire pour la méditation, la lecture, les capricieuses recherches et l'ambitieux projet de tout apprendre. Cette méthode irrégulière, toujours utile et précieuse, pouvait suffire alors à un esprit d'élite pour préparer de bons examens ; à la fin de l'année, l'étudiant de quinze ans était admis quatrième à l'école navale. Le premier de la liste est devenu, comme Puiseux, membre de l'Académie des Sciences. Puiseux, s'il l'eût voulu, serait, comme lui, devenu amiral. Très ferme et très doux, attentif à tout observer, patient à l'étude, infatigable au travail, Puiseux avait les qualités et les curiosités d'un marin ; il n'en eut pas les ambitions et préféra à l'école de Brest les leçons de Sturm, au collège Rollin. Le maître était digne de l'élève ; il devina, sans se tromper en rien, sur les bancs de la classe un maître futur de la Science.

Puiseux n'obtint au concours général des lycées de Paris que le second prix de Mathématiques ; ce fut une surprise pour ses camarades, pour Sturm une déception. Ce second prix, pourtant, auquel se joignait le premier prix de Physique, attira l'attention du chef de l'Ecole Normale. Léon Puiseux, depuis quelques mois déjà, avait sollicité pour son frère, de deux ans trop jeune, la faveur d'une dispense d'âge. Victor Cousin l'avait éloquemment rebuté. « Nous n'en usons pas de la sorte, s'était écrié l'illustre philosophe ; la règle est notre palladium : elle s'impose à tous et je suis son esclave. » La servitude était volontaire. Le succès du jeune candidat lui dicta des maximes contraires. « Nous sommes raisonnables et justes, dit-il à Léon Puiseux ; liés par nous-mêmes,

nous savons nous délier : il est bon qu'on le sache. Votre frère entrera cette année ». — « Permettez-moi de vous rappeler, monsieur le conseiller » (tel était à l'École le titre de Cousin), « que le concours est commencé », répondit Léon Puiseux, les compositions sont faites et classées ». — « Peu importe, nous ferons un examen *extra tempora;* votre frère entrera avec les autres. » Il en aurait coûté à l'un des concurrents une place déjà méritée. Puiseux refusa de la prendre. Il voulut attendre une année, et le premier rang ne lui fut pas disputé. Quatre ans plus tard, à l'âge de vingt et un ans, Puiseux était nommé professeur à Rennes.

Le zèle pour la Science était petit chez ses écoliers. Le seul programme du baccalauréat servait de stimulant à leur travail et de limite à leurs études. Le jeune maître avait de grands loisirs. Aux spéculations géométriques, il mêlait des promenades de naturaliste, embrassant, suivant sa coutume, avec la même ardeur, j'oserai dire avec la même force, les études les plus différentes. Pendant ses premières vacances, en compagnie d'Auguste Saint-Hilaire, un de ses maîtres à la Faculté de Paris, la passion de savoir le conduisit en Norvège. Fidèle au dessein du voyage, c'est à l'étude des plantes qu'il s'appliqua surtout, et son savant compagnon, le croyant engagé pour toujours, attendait tout pour la Physiologie végétale de cet esprit lent à émouvoir, prompt à exceller.

Adrien de Jussieu, rencontrant, quelques mois après, un jeune homme auquel la ville de Rennes était bien connue, lui parlait d'un jeune homme habitant de Rennes de grande espérance, dont son confrère Auguste Saint-Hilaire vantait la science et la vigueur d'esprit : c'était Puiseux. S'il n'eût été géomètre, il serait devenu botaniste.

Pendant son séjour à Rennes, un de ses collègues au lycée obtint, par une thèse excellente, plusieurs fois citée depuis, le grade de docteur ès sciences mathématiques. La part de Puiseux n'y est pas indiquée; c'est une raison de plus, peut-être, pour placer cette ingénieuse étude tout entière au nombre des délassements utiles à d'autres auxquels sa bonté fut toujours prête.

Pendant qu'à Rennes, sans dédaigner son modeste rôle, Puiseux s'appliquait à bien faire, d'ingénieux travaux mathématiques et le périlleux avantage d'une réputation précoce le désignèrent pour de plus hautes fonctions. Il fut appelé à la Faculté des Sciences de

Besançon, où deux collègues éminents, Henri Sainte-Claire Deville et Achille Delesse, savaient comme lui que nulle science n'est étrangère à nulle autre science. Chacun des jeunes savants, par un mérite singulier, aurait pu suppléer les deux autres. La Franche-Comté, pour l'avenir des fortes études, n'avait rien à souhaiter que de garder longtemps de tels maîtres. On les lui laissa quatre ans. En 1847, les trois amis se retrouvaient à Paris, maîtres de conférences tous trois à l'École Normale.

MM. Deville, Verdet et Pasteur ont fait de la grande École un des foyers de la lumière qu'elle doit répandre. Le bien est contagieux. Les Mathématiques ne pouvaient rester en arrière. Au premier rang des grands maîtres dont la renommée a attiré à l'École des élèves qui pourraient se passer de maîtres, la reconnaissance de tous inscrit le nom de Puiseux.

Les élèves jugent leurs maîtres. Leur plus sévère critique aux leçons de Puiseux adressait un seul reproche : elles étaient trop parfaites. C'est un tort quelquefois. La perfection est toujours un peu froide : c'est par là qu'on peut en médire. Dieu nous garde pourtant de ceux qui la dédaignent et croient pouvoir la surpasser sans l'atteindre. « La bonne façon d'apprendre », a dit saint François de Sales, « c'est d'étudier ; la meilleure, c'est d'écouter, et la très bonne, d'enseigner. » Puiseux menait de front ces trois méthodes. La science de ses disciples redoublait son zèle ; lui-même eut le bonheur de rencontrer un maître ; je le dis à la gloire de l'un et de l'autre : il devint le meilleur élève de Cauchy.

« La science du sage », dit l'Écriture, « est une inondation » : telles étaient pour l'Algèbre les leçons de Cauchy. Fortifié par cette source abondante et féconde, l'esprit de Puiseux, dont les travaux jusque-là n'étaient qu'excellents, éleva son vol et fit son chef-d'œuvre. Trente années, aujourd'hui, ne l'ont pas vieilli d'un jour. Ch. Sturm, notre maître bienveillant à tous, mais fier surtout de son élève du collège Rollin, m'aborda un jour par cette question que personne avant Puiseux ne s'était proposée : « Si vous suivez le long d'un contour fermé la racine d'une équation dont un paramètre représente un point du contour, qu'obtiendrez-vous en revenant au point de départ? » — « Je retrouverai ma racine, répondis-je sans hésiter. » — « Eh bien, non! vous ne la retrouverez pas : ce Puiseux le démontre. Il a fait un bien beau

Mémoire! » Puis-je oublier le maître excellent et bon, toujours fier d'un élève bien-aimé devenu disciple d'un autre?

Le Mémoire sur les fonctions algébriques, par l'élévation du sujet, la subtilité des méthodes et la précision des résultats, place sans contredit ce Puiseux au premier rang des innombrables disciples d'un grand génie, chaque jour mieux admiré; c'est un rang d'honneur dans la Science et, dans la vie, un beau partage.

La Mécanique céleste attirait Puiseux, il en aimait les difficiles calculs et excellait à les simplifier. Une chaire à la Faculté des Sciences accorda ses inclinations et ses talents; les plaisirs devinrent un devoir, il s'y plut davantage encore.

Au Bureau des Longitudes, dont il devint bientôt le membre le plus actif, et à l'Observatoire, où Le Verrier, qui se connaissait en astronomes, sollicita son concours, aucun calcul ne rebuta sa patience. Toujours dévoué et toujours prêt, la sûreté de ses résultats était pour tous un grand repos. Puiseux, dans la distribution du travail nécessaire, laissait chacun choisir avant lui; la tâche la plus lourde était son lot; on pouvait la doubler et la doubler encore, ni ses amis n'entendaient une plainte ni ses collègues une réclamation jusqu'au jour où, au grand étonnement de tous, Puiseux quitta successivement l'Observatoire et le Bureau des Longitudes. « Le travail surpasse mes forces », dit-il simplement. En vain, pour retenir un collègue indispensable, on allégua les intérêts de la Science: Puiseux ne céda pas; on lui représenta qu'il sacrifiait gravement les siens; il n'y avait pas, avec lui, apparence de mieux réussir. Son renoncement ne fit tort qu'à la fortune de sa famille: il abandonnait les appointements, non les travaux d'Astronomie. Dévoué à ses élèves, il mérita la reconnaissance de ses successeurs qui, chaque jour, profitent de son œuvre! Le détail, que nous supprimons, nous enfoncerait dans la plus profonde Géométrie.

L'auteur du beau Mémoire sur les fonctions algébriques avait, depuis sa jeunesse, une place marquée parmi nous. Chaque année accroissait ses titres; la solidité et l'élégance de ses études sur la Mécanique céleste, son fructueux dévouement à la science du ciel, le faisaient désirer par la Section d'Astronomie; pendant plus de vingt ans aucun vide ne s'y produisit. Puiseux laissait inscrire son nom sur la liste des candidats à la Section de Géométrie, où l'on eût été surpris de ne pas le voir, s'abstenant d'ailleurs de toute dé-

marche. En prenant soin de faire valoir ses titres, il aurait cru sortir de son rôle et juger par-dessus le juge. Ces candidatures modestes et paisibles réussissent lentement et seulement aux hommes de grand mérite; double inconvénient, même pour beaucoup de ceux qui croiraient n'avoir à en redouter qu'un seul.

Lorsque nous perdîmes en Lamé le plus célèbre représentant parmi nous de la Physique mathématique, l'élection de Puiseux ne pouvait plus être retardée : l'Académie avait besoin de lui. Ses éminents concurrents, dont trois déjà sont nos confrères, en s'effaçant devant l'ancienneté de ses titres, s'inclinèrent devant son grand mérite. Sur cinquante-cinq votants, Victor Puiseux obtint cinquante-cinq suffrages. Un amour-propre judicieux pourrait se plaire à retarder une élection pour la rendre aussi triomphante, mais l'amour-propre n'est jamais judicieux et la modestie de Puiseux était sincère.

Toujours égal dans son dévouement et son zèle, quand une étude s'imposait à l'Académie, entre ses confrères également préparés, Puiseux se trouvait toujours prêt; quand chacun, retenu par ses propres travaux, sacrifiait une partie de son temps, *s'il le fallait,* Puiseux donnait le sien purement et simplement. Les calculs étaient faits rapidement et de main de maître. Jamais Puiseux ne s'en fit honneur. Son travail, si ses confrères avaient gardé le silence, serait resté l'œuvre commune.

Puiseux, dans les épreuves de la vie, acceptait les chagrins avec résignation, les souffrances avec fermeté. Veuf d'une épouse tendrement aimée, trois fils excellents, deux filles charmantes et bonnes faisaient sa consolation et sa joie. Le fils aîné, studieux et précoce comme son père, n'acheva pas ses classes brillamment commencées; les deux filles, atteintes d'une même maladie, s'éteignirent avant leur vingtième année. La robuste santé de notre confrère fut ébranlée à son tour; de continuelles douleurs ne ralentirent ni ses travaux ni ses longues excursions. Le travail était un devoir envers la Science, les courses à pied un utile divertissement et les ascensions périlleuses un exercice salutaire pour les deux fils qu'il ne quittait pas.

Puiseux songeait à tout, jamais à lui-même; quand il consentit à se soigner, le mal était sans remède. Plusieurs années de continuelles souffrances ne purent lui arracher une plainte; il cal-

culait, en attendant la mort, les observations du passage de Vénus.

On raconte qu'un pieux missionnaire avait, en de lointains pays, converti à sa foi le plus puissant personnage de la contrée. Heureux de son œuvre, trop modeste pour l'attribuer à son éloquence, dans cette conversion il voyait un miracle. « Je m'en réjouis comme vous », lui répondit une des victimes les plus exposées au mauvais caractère du néophyte. « Mais va-t-il devenir moins orgueilleux, moins défiant, plus doux, plus affable et plus franc? Aurons-nous, désormais, un maître juste et bon? »

« Vous demandez », répondit le saint homme, « un second miracle. » Les deux miracles se sont accomplis pour Puiseux, et ceux qui l'ont connu depuis son enfance ne sauraient dire à quelle époque.

NOTICE SUR VICTOR-ALEXANDRE PUISEUX,

MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS, NÉ A ARGENTEUIL (SEINE), LE 16 AVRIL 1820, MORT A FONTENAY (JURA) LE 9 SEPTEMBRE 1883 (1).

Savant de premier ordre, professeur incomparable, M. Puiseux était une des gloires de l'École Normale et de l'Université; sa modestie égalait son mérite; s'il a voulu qu'aucun discours ne fût prononcé sur sa tombe, il me sera permis cependant de rappeler ici les travaux qui rendront sa mémoire impérissable, et les éminentes qualités qui le faisaient aimer et admirer de tous ses élèves et de tous ses collègues.

Puiseux (Victor-Alexandre) naquit à Argenteuil le 16 avril 1820; son père, receveur des contributions indirectes, fut appelé trois ans après, par ses fonctions, à Longwy en Lorraine, et en 1826 à Pont-à-Mousson.

C'est au collège de cette ville que M. Puiseux fit ses premières études; la précocité de son intelligence et les dispositions exceptionnelles qu'il manifestait pour les sciences déterminèrent ses parents à l'envoyer achever ses études à Paris; à l'âge de quatorze ans, il vint occuper une petite chambre de la rue Saint-Jacques;

(1) Cette Notice, due à M. Félix Tisserand, a été lue, le 13 janvier 1884, à la réunion annuelle de la Société des anciens élèves de l'École Normale et publiée dans le *Bulletin* de l'Association.

il s'y livrait au travail avec une ardeur incroyable, n'ayant pour distraction que de longues promenades à pied, pour lesquelles il manifesta toute sa vie un goût très prononcé, et de fréquentes visites à son frère aîné, déjà élève de l'École Normale, dans la Section des lettres.

L'année suivante, en raison de la situation de fortune de sa famille, il dut accepter une bourse au collège Rollin. En 1836, âgé seulement de seize ans, il avait terminé le cours de Mathématiques spéciales, et demandait l'autorisation de se présenter à l'École Normale; le Ministre de l'Instruction publique, M. Cousin, refusa cette autorisation; quelques jours après, M. Puiseux remportait le premier prix de Physique au concours général. M. Cousin, amené ainsi à regretter sa décision, fit offrir au jeune lauréat de le nommer élève de l'École, par un décret spécial; celui-ci refusa, entendant, disait-il, entrer au concours, et par la grande porte.

L'année suivante, il remportait le premier prix de Mathématiques spéciales, et entrait cette fois sans difficulté à l'École Normale. La supériorité de son intelligence le mit de suite au premier rang. A cette époque remonte sa liaison avec M. Bersot, que l'École pleure encore, et avec MM. Briot et Bouquet, qui lui ont voué depuis une amitié, une affection inaltérables.

Tous les camarades de M. Puiseux étaient attirés irrésistiblement vers lui, et par l'évidence de son mérite, et par l'élévation de son caractère; les cours, moins nombreux, moins bien organisés qu'aujourd'hui, laissaient subsister plus d'une difficulté dans l'esprit des élèves; M. Puiseux éclaircissait tout, et, déjà érudit, il initiait ses camarades aux principaux Mémoires publiés à l'étranger.

On ne s'occupait pas que de science à l'École; les discussions philosophiques et religieuses y étaient fort vives; M. Puiseux y prenait une part active, et mettait au service de ses convictions religieuses l'ascendant naturel que son intelligence d'élite, la tolérance de son esprit et la modération de son langage lui avaient assuré tout d'abord; dans ces questions délicates, on le consultait toujours, on tenait à ses conseils, aussi bien que quand il s'agissait d'un problème d'Analyse mathématique.

Toutefois, dans son domaine spécial, M. Puiseux aimait à s'effacer devant Pierre Olivaint, alors élève de la section des lettres, entré depuis dans la Compagnie de Jésus, et tombé, en 1871, vic-

time de la Commune; il s'était lié étroitement avec lui; c'est ensemble qu'ils avaient fondé, pour le secours des pauvres à domicile, une association des élèves des Écoles, qui subsiste encore et garde pieusement le souvenir de ses fondateurs. Reçu au premier rang au concours d'agrégation, après trois années d'études, M. Puiseux obtint de passer encore une année à Paris; il en profita pour compléter son instruction mathématique, sous la direction de maîtres illustres; il était chargé en même temps d'une conférence aux élèves de l'École Normale, ses camarades de la veille, et pour la plupart plus âgés que lui; dans ce premier enseignement, il révéla les admirables qualités de professeur qu'il devait développer plus tard dans ses cours à la Sorbonne.

A la fin de cette même année, il soutenait pour le doctorat une thèse remarquable sur un des points les plus délicats de la Mécanique céleste, sur la stabilité du système du monde; question difficile, qui avait provoqué les admirables travaux de Laplace, Lagrange et Poisson, et que le jeune professeur parvint à présenter avec une netteté parfaite.

Après un stage de trois années au Collège royal de Rennes, M. Puiseux fut nommé professeur à la Faculté des Sciences qui venait d'être créée à Besançon. Il y rencontra pour collègue M. Henri Sainte-Claire Deville, appelé, lui aussi, à devenir une des illustrations de la Science française, en rendant célèbre à jamais le laboratoire de Chimie de l'École Normale, théâtre de ses plus belles découvertes. Ils se lièrent d'une étroite amitié, et M. Deville, pénétrant dans l'intimité de M. Puiseux, à même d'apprécier son intelligence et son cœur, résumait son éloge en disant que c'était l'homme parfait.

M. Puiseux, pendant les cinq années qu'il passa à Besançon, déploya la plus grande activité scientifique; il donna au *Journal de Liouville* plus de dix Mémoires importants, sur des sujets de Géométrie et de Mécanique.

Appelé en 1849 à Paris, comme maître de conférences à l'École Normale, il put mettre en relief les brillantes qualités de son talent, et rendre des services inappréciables à vingt générations de professeurs. On admirait surtout l'élégance, la clarté, la rigueur et la sobriété de sa parole. Une démonstration difficile, faite par lui au tableau, était présentée avec tant de naturel et tant de simpli-

cité, que les bons élèves se demandaient s'ils n'auraient pas pu la trouver eux-mêmes.

Toutes ses préférences étaient pour cet enseignement de l'École Normale, où un auditoire d'élite l'appréciait à sa juste valeur. Il ne le quitta définitivement qu'en 1868, pour devenir membre du Bureau des Longitudes et prendre en main la publication de la *Connaissance des Temps*, qu'il rédigea pendant quatre ans. Il était préparé à cette tâche ardue, par les fonctions qu'il avait remplies à l'Observatoire de 1855 à 1859, où, placé par Le Verrier à la tête du Bureau des calculs, il avait pris une part active à la publication des *Annales*.

En 1859, M. Puiseux quitta l'Observatoire, pour se consacrer tout entier à l'enseignement et à ses travaux personnels; il avait suppléé quelque temps Sturm et Le Verrier à la Sorbonne, et Binet au Collège de France; en 1857, il avait été nommé professeur titulaire de Mécanique céleste à la Faculté des Sciences, en remplacement de Cauchy, dont il avait été l'élève, l'admirateur et l'ami. Il remplit cette chaire jusqu'en 1882, parcourant en cinq ou six ans le champ presque entier de la Science. Ceux qui, comme moi, ont eu le bonheur de suivre ses leçons, en garderont un souvenir ineffaçable. Les théories les plus abstraites, les plus élevées de la Mécanique céleste, prenaient dans sa bouche une clarté saisissante; on était tout étonné de comprendre si aisément une science édifiée successivement et à grand'peine par les génies les plus puissants. Ses amis, ses élèves, le pressaient vivement de publier ces leçons qui, en centuplant le nombre de ses auditeurs, en France et à l'étranger, auraient largement contribué aux progrès de la Science. Mais M. Puiseux, si indulgent pour les autres, était difficile pour lui-même; il trouvait que son œuvre n'était jamais assez complète, il voulait la perfectionner encore, avant de la mettre sous les yeux du monde scientifique. Il me sera permis d'exprimer un vœu: c'est que les Notes très soignées qu'il rédigeait pour tous ses cours soient publiées maintenant; ce serait un hommage légitime rendu à sa Mémoire, et un véritable bienfait pour ceux qui cherchent à s'initier à tous les secrets de l'Astronomie mathématique.

Je vais essayer de donner une idée des travaux de M. Puiseux; on peut les diviser en trois groupes principaux : les premiers se rapportent à l'Analyse et à la Mécanique, les seconds à la Méca-

nique céleste, et les derniers à l'Astronomie pure; je ne parlerai du reste que des plus importants.

Analyse et Mécanique. — Nous trouvons d'abord un travail intéressant sur un problème de Géométrie; M. Puiseux s'était proposé de trouver la courbe dont les deux courbures sont constantes; par un calcul simple et élégant, il a montré que l'hélice est la seule courbe non plane qui réponde à la question.

Citons en second lieu un Mémoire sur le pendule conique, qui est aujourd'hui enseigné dans tous les cours de Mécanique; dans le mouvement du pendule conique, la projection horizontale de son extrémité décrit une courbe ovale, dont le grand axe se déplace continuellement; M. Puiseux a montré le premier que ce déplacement doit toujours se faire dans le sens même du mouvement du pendule; ce résultat est entièrement conforme à l'expérience. Un troisième Mémoire est devenu classique comme le précédent; c'est celui qui se rapporte aux courbes tautochrones; la démonstration de M. Puiseux a remplacé dans tous les cours celle, bien moins satisfaisante, qu'on devait à Poisson.

Je citerai en passant un travail remarquable sur les développées et les développantes des courbes planes, dans lequel M. Puiseux fait connaître une foule de résultats nouveaux et intéressants, et donne une démonstration simple et rigoureuse d'un beau théorème de Jean Bernoulli. Mais j'ai hâte d'arriver à l'œuvre capitale de M. Puiseux, à ses recherches sur les fonctions algébriques; voici, sur ce sujet, l'appréciation du juge le plus autorisé, de M. Hermite, qui a bien voulu me la communiquer pour cette Notice.

« Le Mémoire que M. Puiseux a publié dans le *Journal de Liouville*, sur les fonctions algébriques, a une importance considérable et marque une époque dans l'Analyse, comme nous allons succinctement le faire voir. Depuis longtemps, Cauchy avait obtenu la conception la plus générale de l'intégrale définie, lorsque la variable décrit un chemin quelconque, entre les deux limites; le grand géomètre avait tiré de sa découverte la notion capitale des résidus, et en avait fait les plus belles applications, entre autres à l'intégration des équations différentielles linéaires et à l'intégration de systèmes d'équations linéaires aux différences partielles. Mais de nombreuses conséquences restaient encore à recueillir,

et d'autant plus intéressantes, qu'elles concernaient les éléments mêmes du Calcul intégral.

» Un paradoxe insoluble se posait à l'esprit, lorsqu'on rapprochait la périodicité simple des sinus trigonométriques et la périodicité double des sinus d'amplitude des intégrales dont ces quantités sont les fonctions inverses; leur définition même ne paraissait conduire qu'à une détermination absolument unique, lorsque leurs limites sont fixées.

» Le résultat obtenu à l'égard des intégrales des fractions rationnelles, dont on avait les déterminations multiples, faisait absolument défaut à l'égard des intégrales de radicaux carrés, et à plus forte raison, de différentielles algébriques.

» C'est qu'il fallait effectivement, pour saisir sur de telles fonctions l'influence de l'intégration suivant des contours quelconques, faire une étude préliminaire indispensable sur les racines des équations algébriques, et découvrir la véritable nature analytique de ces quantités. M. Puiseux a fait avec le plus complet succès cette étude, et les résultats auxquels il est parvenu sont maintenant classiques, et d'un usage continuel dans les recherches de notre temps. L'éminent géomètre a montré qu'en faisant décrire à la variable un contour fermé, l'ensemble des racines d'une équation algébrique représente, tantôt un système d'anneaux, tantôt un anneau fermé. C'est du nombre des points qu'on a nommés *critique,* pour lesquels deux ou plusieurs racines deviennent égales entre elles, qui sont à l'intérieur du contour, que dépendent ces circonstances diverses.

» M. Puiseux a donné la méthode qui permet de reconnaître de quelle manière les racines s'échangent entre elles, lorsque la variable indépendante décrit un tel contour, et c'est à l'aide de ces propositions, entièrement nouvelles, qu'il a pu obtenir le résultat capital auquel son nom est attaché désormais; c'est-à-dire les valeurs multiples des intégrales de différentielles algébriques quelconques. Le paradoxe dont nous avons parlé plus haut, que Cauchy signalait lui-même, ainsi qu'Eisenstein, s'évanouissait, grâce à la belle découverte de M. Puiseux. Aux plus embarrassantes difficultés sur un point absolument fondamental de Calcul intégral, succédait une théorie simple qui ouvrait la voie aux plus belles conséquences. Ce serait trop nous étendre que de vouloir les indi-

quer : je me bornerai à mentionner les relations concernant les indices de périodicité des intégrales hyperelliptiques.

» Jacobi, par une analyse ingénieuse et délicate, avait, dans un de ses plus beaux Mémoires, donné ces relations, pour le cas particulier où les modules sont supposés réels, et moindres que l'unité.

» En partant de ces principes, M. Puiseux obtient, dans le cas général où les modules sont des quantités imaginaires quelconques, et par la voie la plus simple, les équations de Jacobi; c'est là, parmi tant d'autres, un exemple de la portée et de la puissance des méthodes nouvelles qu'il venait d'introduire dans le Calcul intégral. »

Mécanique céleste. — L'illustre Cauchy a consacré un grand nombre de Notes remarquables à la Mécanique céleste, en y laissant, comme toujours, l'empreinte de son génie; mais, absorbé par d'autres travaux, il se bornait le plus souvent à des indications succinctes, qui laissaient subsister plus d'une difficulté dans l'esprit du lecteur. M. Puiseux a repris plusieurs de ces Notes, les a développées, complétées et transformées en de beaux Mémoires, d'une précision et d'une clarté admirables. Nous pouvons citer en particulier, dans cet ordre d'idées, un Mémoire *Sur la convergence des séries qui se présentent dans la Théorie du mouvement elliptique,* et un grand travail *Sur les inégalités à longues périodes du mouvement des planètes.*

Dans deux Mémoires *Sur le développement en séries de la fonction perturbatrice,* M. Puiseux a résolu le premier une question importante et des plus difficiles; dans un dédale de formules où tout autre se serait égaré, il suit avec une sûreté incroyable une voie lumineuse qui le conduit directement au but; la solution finale ne repose en dernier lieu que sur des opérations de l'Arithmétique la plus élémentaire.

Son travail *Sur les principales inégalités du mouvement de la Lune* est un véritable chef-d'œuvre d'exposition; M. Puiseux s'était proposé de montrer comment on peut se rendre compte des circonstances les plus importantes du mouvement de la Lune autour de la Terre, sans entreprendre les calculs compliqués qu'exigerait une théorie complète; il y a réussi d'une manière surprenante; des formules simples et élégantes laissent le lecteur émerveillé de

comprendre à si peu de frais un sujet classé jusqu'alors parmi les plus difficiles. Le Mémoire de M. Puiseux *Sur l'accélération séculaire du mouvement de la Lune* est peut-être son œuvre la plus considérable dans le domaine de la Mécanique céleste; quelques développements sont nécessaires pour en faire comprendre la portée.

La théorie du mouvement de la Lune a présenté pendant longtemps une difficulté insurmontable; Halley a démontré le premier que le même moyen mouvement lunaire ne peut pas satisfaire à la fois aux observations modernes et aux éclipses observées par les Chaldéens et par les Arabes; on en a conclu que le moyen mouvement de la Lune n'est pas constant, mais qu'il va en s'accélérant de siècle en siècle; c'est une des plus belles découvertes de Laplace, d'avoir trouvé la cause de cette accélération dans la diminution séculaire de l'excentricité de l'orbite terrestre; l'accord parut établi définitivement entre la théorie et l'observation; mais, en 1853, M. Adams, en poussant les approximations plus loin que ne l'avait fait Laplace, montra que l'on ne peut expliquer ainsi que la moitié de l'accélération séculaire indiquée par les anciennes éclipses; d'où pouvait donc provenir l'autre moitié? M. Puiseux s'est proposé de voir si elle ne serait pas produite par le déplacement séculaire de l'écliptique. Il m'est impossible de donner une idée des longs et pénibles calculs qui l'occupèrent à ce sujet durant plusieurs années; je me bornerai à dire que, dans le développement de ces calculs, on retrouve la netteté et la précision qui sont le caractère distinctif de tous ses travaux. La conclusion fut que le changement de position de l'écliptique n'a aucune influence sensible sur la valeur de l'accélération séculaire de la Lune; pour être négative, cette conclusion n'en est pas moins importante, car elle a délimité plus étroitement un problème fondamental en Astronomie et, par cela même, rendu sa solution plus facile.

M. Puiseux a rendu encore un service signalé aux astronomes et aux géomètres, à propos de la nouvelle édition des *Œuvres de Laplace*, publiée sous les auspices de l'Académie des Sciences; il a revu toutes les formules, tous les calculs de la *Mécanique céleste*, avec un soin scrupuleux, et c'est à lui qu'est due principalement l'exactitude de l'édition actuelle, de beaucoup supérieure aux précédentes.

Astronomie. — M. Puiseux, que nous venons de voir parcourir avec tant d'éclat le domaine de la Mécanique céleste, était aussi très versé dans celui de l'Astronomie pure, et les calculs numériques auxquels elle conduit. Il en a donné la preuve à l'Observatoire, où il a dirigé avec sa conscience habituelle un travail long et quelque peu aride : la réduction des observations de la Lune faites à Paris de 1801 à 1829.

M. Puiseux est l'auteur d'un important Mémoire concernant les passages de Vénus sur le Soleil; les méthodes qui permettent de déduire de l'observation de ces phénomènes la parallaxe du Soleil y sont exposées dans tous leurs détails, avec simplicité et élégance. Quand une Commission de l'Académie des Sciences se réunit pour préparer l'observation des passages de Vénus de 1874 et 1882, elle eut tout d'abord à choisir dans les deux hémisphères les stations les plus favorables pour les observateurs; M. Puiseux fut désigné spontanément pour cet important travail. C'est encore lui qui a recueilli toutes les observations faites par les astronomes français en 1874, les a discutées, calculées avec un soin extrême, et en a tiré la conclusion pour la parallaxe du Soleil. Dans les premiers mois de l'an passé, alors qu'une cruelle maladie ne lui laissait aucun instant de repos, encore plein d'ardeur pour la Science, il attendait impatiemment le retour des missionnaires de l'Académie, pour le passage de 1882, leur demandait leurs observations, les faisait entrer dans les formules qu'il avait préparées d'avance, et achevait presque entièrement les longs et pénibles calculs relatifs à ce nouveau passage. Plusieurs membres de l'Académie ont eu sous les yeux ce dernier travail de leur confrère: à voir tous ces calculs si bien ordonnés, conduits avec tant de méthode et de sûreté, on a de la peine à croire que chacun des nombres était écrit au milieu de souffrances intolérables.

Puisse cette esquisse rapide et imparfaite avoir donné une idée de l'importance des travaux de M. Puiseux, et montré que, dans toutes les branches de la Science qu'il a abordées, il a laissé une trace ineffaçable!

M. Puiseux avait été nommé membre de l'Académie des Sciences en 1871, dans des conditions exceptionnelles; il avait réuni l'unanimité des suffrages. M. Bertrand a pu dire à ce sujet à l'Académie :

« ... Seul parmi nous, seul peut-être entre tous les Académi-

ciens de ce siècle, Puiseux a été élu à l'unanimité, sans une seule voix dissidente, ni une seule abstention : on me permettra de rappeler ce que je disais le jour de son élection à quelques amis : l'élection de Puiseux était due à son mérite, l'unanimité à son caractère. »

Avant de terminer cette Notice, je voudrais parler encore de quelques détails intéressants et peu connus de la vie de M. Puiseux.

La Géométrie, la Mécanique et l'Astronomie n'occupaient pas tous ses instants; il avait eu un goût très marqué pour la Botanique, et avait cultivé cette science avec succès; étant encore à l'École Normale, il suivait assidûment les cours du célèbre botaniste Auguste Saint-Hilaire, qui l'avait remarqué, et lui avait proposé de l'accompagner dans un voyage scientifique en Norvège; M. Puiseux accepta avec empressement. Après une traversée grosse de périls, le maître et l'élève débarquaient à Christiania, à la fin d'août 1841; ils entreprirent l'exploration botanique du pays; mais la saison, déjà avancée, ne leur permit pas de pousser plus loin que Drontheim; M. Puiseux avait conservé le plus agréable souvenir de ce voyage, qui fut peut-être la cause des nombreuses excursions qu'il entreprit plus tard en Italie, en Suisse, dans les Vosges et dans les Pyrénées.

Les Alpes surtout exerçaient sur lui un attrait irrésistible; il les revit à vingt reprises différentes, s'attachant de préférence aux régions les moins hospitalières, aux pics les plus escarpés. En 1848, il franchissait, l'un des premiers, la barrière de glaciers qui sépare les vallées de Zermat et d'Hevens; la même année, il tentait, avec quatre guides suisses et le Dr Ordinaire, de Besançon, l'ascension du mont Rose, et, arrivé à 100m du sommet, il persistait seul, contre l'avis unanime des guides, à déclarer possible une escalade qui ne fut réalisée que vingt-cinq ans plus tard.

Dans une excursion en Dauphiné, il entreprit, avec un montagnard du pays, l'ascension du mont Pelvoux, qui alors était presque entièrement inconnu; laissant à mi-chemin son guide épuisé de fatigue, il atteignit seul le sommet.

Son courage lui faisait parfois dépasser les bornes de la prudence, et l'exposait à des dangers très réels, comme dans les circonstances suivantes : il franchissait le glacier du Clot des Cavales, dans l'Oisans, avec un botaniste distingué, M. Grenier, et quelques jeunes

gens de Grenoble; l'un d'eux, fort inexpérimenté, ne s'était pas muni de l'indispensable bâton ferré; M. Puiseux, sûr de son pied, lui prêta le sien et s'avança sans appui, sur une pente de neige escarpée; son obligeance faillit lui être fatale; entraîné brusquement, il disparut aux yeux de ses compagnons qui le crurent un moment perdu.

M. Puiseux fut l'un des fondateurs du Club Alpin français, auquel il aurait apporté un précieux concours, si dans ses dernières années, la maladie ne lui avait interdit les courses pénibles dans les montagnes.

Les goûts littéraires de M. Puiseux étaient très développés; il avait une vive passion pour les chefs-d'œuvre classiques; et il passait avec plaisir de la lecture d'un Mémoire de Laplace à celle d'une page de Virgile ou de Pascal; il cultivait aussi, non sans bonheur, la prose grecque et le vers latin.

Je n'ai pu donner qu'une idée incomplète de ce qu'était M. Puiseux; j'ai cherché à montrer en lui le savant éminent; comme professeur, il était encore plus remarquable; tous ses élèves l'admiraient sans réserve; mais l'homme était peut-être supérieur, et au savant, et au professeur. Sa bonté et sa bienveillance étaient connues de tous, sa loyauté universellement appréciée; il apportait dans l'accomplissement de ses devoirs professionnels une conscience poussée jusqu'aux dernières limites; on en peut citer une preuve bien significative : six mois avant sa mort, obligé de se faire suppléer dans sa chaire de la Sorbonne, il sollicita du Ministre sa mise à la retraite, ne croyant pouvoir conserver le titre, dès qu'il ne pouvait plus remplir ses fonctions: il fallut le vœu unanime et officiellement exprimé de ses collègues pour l'amener à revenir sur sa décision.

Sa charité était inépuisable; mais il mettait tous ses soins à la cacher aux regards indiscrets; ce n'est qu'après sa mort que sa famille elle-même a pu connaître une partie des bonnes œuvres qu'il réalisait en secret.

M. Puiseux recouvrait tous ces talents, toutes ces qualités, toutes ces vertus d'une modestie admirable; c'était bien l'homme parfait dont parlait Henri Deville.

Les distinctions, les honneurs étaient venus le trouver naturellement, et presque malgré lui; de ce côté, il n'aurait rien eu à dé-

sirer, s'il avait été capable d'exprimer un désir de ce genre; mais il avait été frappé cruellement et à plusieurs reprises dans ses plus chères affections; une compagne aimée et quatre enfants lui furent enlevés successivement; ses profondes convictions religieuses l'avaient aidé à supporter sans fléchir des coups aussi terribles.

Deux fils qui ont fait la joie de ses dernières années porteront son nom avec honneur; tous deux sont connus du monde savant : l'un par une thèse importante sur le mouvement de la Lune, et son expédition de la Martinique pour le dernier passage de Vénus, l'autre par la part qu'il a prise en Egypte à l'observation de l'éclipse totale de Soleil de 1882; tous les amis du père, et ils sont nombreux, suivront avec plaisir leurs progrès dans la carrière scientifique.

F. Tisserand.

UN EXEMPLE DE CALCUL ALGÉBRIQUE EN PERSAN;

Par M. L. Rodet.

Les deux pages dont je donne ici le *fac-simile* quelque peu réduit photographiquement constituent le seul exemple connu d'un calcul algébrique effectué tout au long suivant les principes de l'école arabe. J'insiste sur ce point, parce que, dans tous les traités d'Arithmétique ou d'Algèbre publiés dans l'Inde depuis le commencement de ce siècle pour servir à l'enseignement de la jeunesse indigène, les calculs sont présentés uniquement en imitation de ceux des livres anglais traitant du même sujet, et j'ai lieu de croire qu'il en est de même dans les ouvrages lithographiés en Perse pour l'usage des élèves de la *Medressè-i Shâh*, de Téhéran. Au contraire, le calcul que je présente ici aux lecteurs est absolument original : voilà pourquoi il m'a paru intéressant de le publier et d'en donner une explication détaillée.

Il occupe les folios 101 *verso* et 102 *recto* du manuscrit persan n° 169 de notre Bibliothèque nationale, et il est assez singulier que Wœpcke, qui a eu longtemps ce manuscrit entre les mains, car il lui a fait des emprunts importants, n'ait pas signalé l'existence de ce document curieux. Il est pourtant remarquable à plus

d'un point de vue : il met en œuvre un système de notation tout nouveau pour nous; il nous apprend que, mettant à profit la faculté qu'ont certaines lettres de l'écriture arabe de se dilater indéfiniment dans le sens horizontal, les calculateurs orientaux partageaient, à l'aide des désignations les plus indispensables, leur tableau ou leur papier en compartiments dans lesquels venaient se loger les divers détails du calcul. Ces mots, qui servent à la fois d'étiquettes et de barres de division pour les différentes parties du calcul, sont écrits au moyen d'un caractère raide et anguleux tout particulier, que l'on appelle *syâq* ou « écriture de marchand forain ». Les explications complémentaires qui accompagnent souvent les mots étiquettes sont rédigées en arabe et écrites avec le *neskhy déri*, écriture contournée, approchant un peu du *shikesté* des Persans ou du *divâny* des Turcs, bien différente en tous cas du *neskhy* ordinaire, dont le copiste a fait usage dans son texte. L'emploi de ces diverses écritures, peu usitées en Perse et dans l'Inde, paraît avoir quelque chose de conventionnel, je dirais même presque de traditionnel.

Un autre détail intéressant, et tout à fait inattendu pour moi au moment où j'ai découvert ce fragment, c'est qu'au lieu des chiffres ordinaires il est fait usage dans les calculs des *chiffres commerciaux* décrits par Silvestre de Sacy dans sa *Grammaire arabe*, Pl. VIII, et reproduits par Pihan, p. 211 de son recueil des *Signes numériques*. J'ai appris depuis que les musulmans de l'Inde se servent couramment de ces *chiffres commerciaux* pour écrire, dans une somme d'argent, les roupies entières, désignant au moyen d'un chiffre ordinaire seulement les annas qui forment l'appoint. Les signes employés ici ne diffèrent que par des nuances insignifiantes de ceux du tableau de Pihan, lequel m'a été, par suite, d'une très grande utilité pour déchiffrer le calcul que j'analyse et en comprendre le sens. Dans la première partie du calcul, les chiffres commerciaux et les vulgaires sont employés concurremment, mais non indifféremment, car les vulgaires servent à écrire les valeurs attribuées à la variable, les commerciaux pour représenter les valeurs correspondantes de la fonction.

Après ces observations préliminaires, j'aborde la description détaillée des deux pages en question.

En tête, et dans les trois premières lignes, se trouve l'énoncé du

problème, lequel ne présente aucune difficulté de lecture; je me contente donc de le transcrire (¹) et de le traduire mot à mot.

Mes$_2$ala : *Shakhs$_0$-î angushtarî-é zar dârad, ba-wazn-é panj més$_2$qâl, bâ nakîn-é la8l. Qîmat-é zar, yak dînâr céhâr dînâr; va qîmat-é la8l, yak més$_2$qâl dah dînâr. Va majmû8, béhâr-é angushtarî, bîst-o céhar dînâr.* Ba-méqdâr, *zar va la8l, har yak cand bâshad?* « Problème : Une personne a un anneau d'or du poids de 5 *mitsqâls,* avec un chaton en rubis. La valeur de l'or est de 1 *dînâr* pour 4 deniers, celle du rubis, 1 *mitsqâl* pour 10 deniers. L'ensemble, le prix de l'anneau, est de 24 deniers. Quelle est la quantité de chaque matière, or et rubis? »

Il est bon de rappeler, pour l'intelligence de cet énoncé, que la valeur pondérale du *mitsqâl* et du *dînâr* est identiquement la même; ce sont deux noms d'une même grandeur.

Après cet énoncé, on lit (fin de la troisième ligne et commencement de la quatrième) : *ba-t$_0$arîq el-khat$_0$âyîn* « par le moyen des deux fausses positions ». C'est donc ce procédé que l'auteur va employer d'abord : suivons-le attentivement.

La quatrième ligne est remplie par les deux titres *mâl bi'l-farz$_0$ avval,* « valeur dans la première (sup)position »; *mâl bi'l-farz$_0$ 2,* « valeur dans la deuxième (sup)position » (²).

Les longues queues des *lams* de *avval* et de *mâl* dessinent nettement deux colonnes dans lesquelles vont se distribuer les détails du calcul. La première colonne va être consacrée à faire voir les effets de la première hypothèse, faite sur les poids de l'or et du rubis; dans la deuxième colonne viendront s'inscrire les nombres résultant de la seconde hypothèse. A cet effet, chaque colonne est encore partagée en deux sous les étiquettes respectives

---

(¹) Au lieu des points sur et sous les lettres dont font usage les orientalistes, j'ai préféré adopter dans ma transcription des indices, plus faciles à réaliser en typographie : ce sont en général de simples numéros d'ordre : toutefois *o* désigne les emphatiques arabes, *r* les cérébrales indiennes, etc. En outre, j'ai conservé *kh* pour le son du *ch* allemand plus ou moins dur, *sh* pour notre *ch*, *zh* pour notre *j* (en persan) : *q* a un son tout particulier; enfin *c* = *tch*, *j* = *dj*, *g* est toujours dur; 8 représente le *ain*.

(²) *Mâl* doit évidemment se prendre ici non pas dans le sens de x^2 qu'il a d'ordinaire en Algèbre, mais dans celui de *somme d'argent*, le *mammon* d'Aben Ezra, le *avere* de Léonard de Pise.

Folio 101, *verso*.

مسئله شخصی انگشتری زر دارد بوزن پنج مثقال با نگین لعل
قیمت زر یک دینار چهار دینار و قیمت لعل یک مثقال ده دینار و مجموع بهار
انگشتری بیست و چهار دینار بمقدار زر و لعل هر یک چند باشد بطریق
الخطاین مال بالفرض اول ——— مال ——— بالفرض ۲

طلا لعل طلا لعل
۴ ۱ ۳ ۲
زر ع لا ع
طلا طلا
زاید زاید
۲ ۸

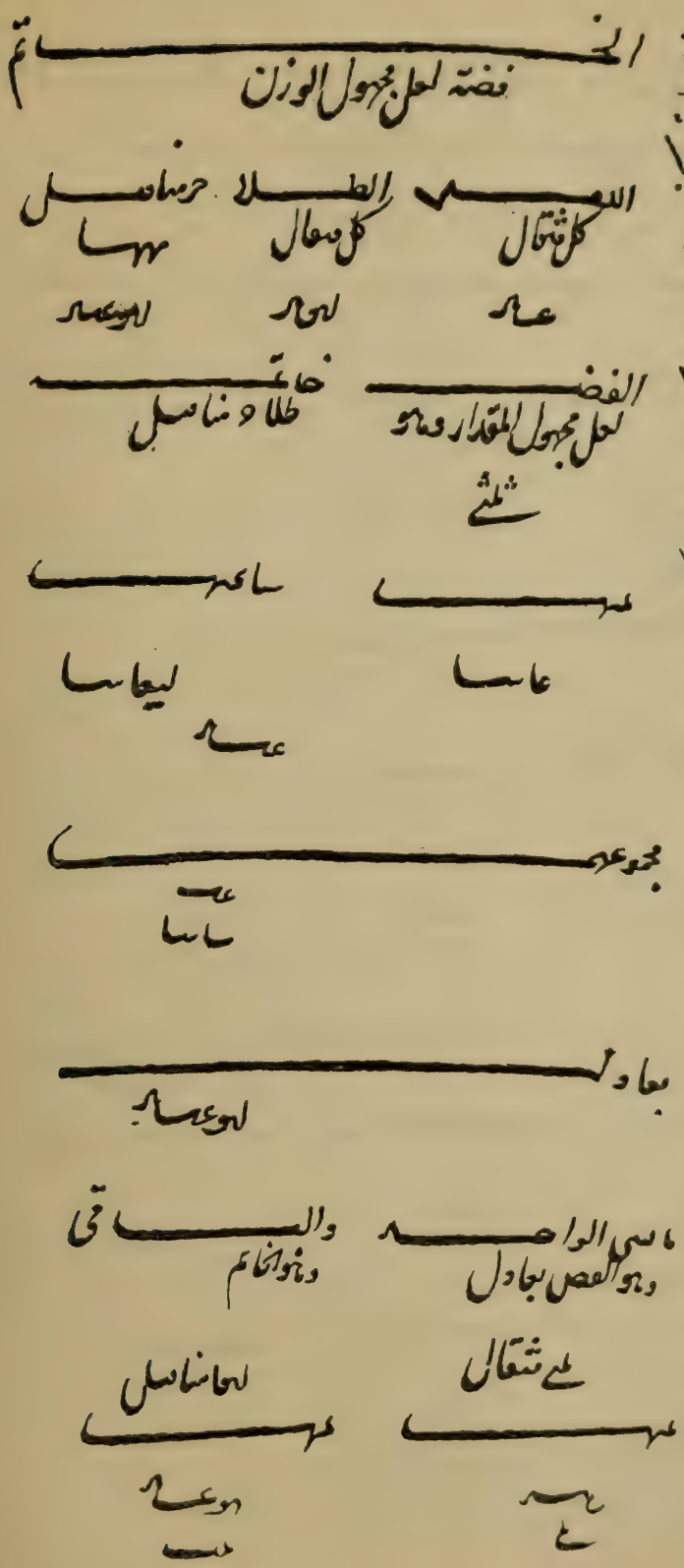
مال ———
صواب

طلا لعل المقسوم علیه
۴ ۱ ۳ ۳ وهو ما بین الخطایین
هو ع ۶

استخراج بطریق الجبر والمقابله مثال ———

لعل طلا مجموعهما
سے حد الاشیا عـ معادل
ما سا لعـ
قالبی الواحد
معادل
عا سا عـ
الا
لعا سا
وهو وزد الفص
سا

Folio 102, *recto*.



الخاتم
فضة لعل مجهول الوزن

اللعل — الطلا — حرمناصل
كل مثقال — كل مثقال — مهها
عسار — لعوار — لعوعسار

الفضة — خاتمة
لعل مجهول المقدار وهو — طلا و مناصل
ثلثي

مهها — ساعهها
عاسا — ليعاسا
عسار

مجموعهما
عسا
ساسا

بعادل
لعوعسار

باقي الواحد — والباقي
وهو الفص بعادل — وهو الخاتم

ملي مثقال — لعامناصل
مهها — مهها
[illegible] — هوعسار
[illegible] — [illegible]

ضابط قيمت نگين وخاتم معلوم كند واقل از اكثر نقصان كند ما بقي مقسوم عليه بود آنكه وزن انگشتري مجموعا در قيمت لعل ضرب كند وبين حاصل وقيمت انگشتري بگيرد وبر مقسوم عليه قسمت كند خارج قسمت وزن صلا باشد واگر وزن انگشتري هم چنين در قيمت طلا ضرب كند وما بين او وقيمت انگشتري بر مقسوم عليه قسمت كند خارج قسمت وزن لعل بود والله اعلم

$t_0$ilâ, « or » ; *la8l,* « rubis ». C'est ici surtout que commence l'emploi régulier de l'écriture *syâq*.

La première hypothèse consiste à poser 4 mitsquâls d'or et 1 de rubis. Ces nombres sont inscrits en chiffres vulgaires au-dessous des noms de ces matières servant d'étiquettes, ainsi que je viens de le dire. Au-dessous, en chiffres commerciaux, cette fois, sont inscrites les sommes partielles qui résultent de l'application à ces nombres des valeurs vénales de chaque matière telles qu'elles sont données dans l'énoncé. On a ainsi : Or, $4 \times 4 = 16$; rubis, $1 \times 10 = 10$; or, $3 \times 4 = 12$; rubis, $2 \times 10 = 20$. Enfin, au dessous encore, et dans chaque colonne, sous la désignation de *khat$_0$â,* « erreur » (écrit d'une manière un peu fantaisiste, mais très lisible en somme), et dans le cas présent avec l'annotation *zaïd,* « additive, en plus », l'erreur commise sur la valeur de la fonction dans chacune des deux hypothèses, savoir : dans le premier cas, $16 + 10 = 26 = 24 + 2$; dans le second,

$$12 + 20 = 32 = 24 + 8.$$

Les erreurs 2 et 8 sont écrites en chiffres vulgaires.

Ici les deux colonnes sont interrompues par un grand *mâl* dont le *lam* final occupe toute la largeur du papier : au-dessous, en manière d'annotation, on trouve écrit *javâb*, « réponse, solution ». Puis le champ du calcul se trouve partagé en trois colonnes par les titres respectifs *$t_0$ilâ,* « or »; *la8l,* « rubis », et *el-maqsûm8alay-hi,* « diviseur » ; cette dernière porte encore le supplément d'explication qui suit, en arabe : *wa hûa mâ bîn el-khat$_0$âyîn,* « or c'est ce qui est entre les deux erreurs », c'est-à-dire « leur différence », et on y lit le chiffre 6. Or, si nous divisons par cette différence 6 la première erreur 2, nous obtenons $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ comme correction à faire subir au poids posé de l'or, ce qui porte à $4\frac{1}{3}$ le poids réel du métal, ainsi qu'on le lit à la première colonne. Seulement il en résulte pour le poids du rubis $\frac{2}{3}$ et non $\frac{4}{3}$, comme le copiste l'a écrit par erreur. Les prix correspondants, $4\frac{1}{3} \times 4 = 17\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}10 = 6\frac{2}{3}$ (dont la somme fait bien 24), sont écrits au-dessous des poids en chiffres commerciaux. Le « tiers » est écrit en toutes lettres, *s$_2$uls$_2$*; les $\frac{2}{3}$ ont ici une figure dont je ne me rends pas compte : nous les verrons, dans le reste du calcul, écrits très régulièrement *s$_2$uls$_2$ey* pour *s$_2$uls$_2$eyn*.

Jusqu'ici donc notre tableau renferme et expose la solution du problème par la méthode de double fausse position ; ce tableau, dans sa première partie, peut se transcrire :

Valeur dans la 1re hypothèse.		*Valeur dans la 2e hypothèse.*	
Or.	Rubis.	Or.	Rubis.
4	1	3	2
XVI	X	XII	XX
Erreur en plus.		Erreur en plus.	
2		8	

Vraie valeur.
(*Réponse.*)

Or.	Rubis.	Diviseur. (Différence entre les erreurs.)
4	0	6
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	
XVII	VI	
un tiers	deux tiers	

Remarque. — Depuis les travaux de Woepcke on est habitué à croire que, chez les Arabes, la pratique de la double fausse position est inséparable de l'emploi des « plateaux de balance », *el-kiffât*, c'est-à-dire que, dans le cas présent, le calcul du poids de l'or se ferait à l'aide de la figure suivante.

D'où la vraie valeur $4 - \frac{2}{6} = 3 + \frac{8}{6}$.

Comme tout le monde, j'avais adopté cet article de foi, d'autant mieux que j'avais rencontré cette balance, employée couramment, dans un immense traité en Persan (*Khazânat-ul 8ilm* « trésor de la science »), composé par un Hindou de Patna (*Dewân kânh-jî*), et fini d'imprimer à Calcutta en 1837. Aussi ai-je été grandement étonné lorsque j'ai découvert dans mon manuscrit (lequel, soit dit entre parenthèses, doit avoir été écrit dans l'Inde ou non loin de l'Inde) le calcul disposé en forme de tableau, ainsi que je viens de le reproduire et de le transcrire. Je ne doute pas que telle ait été véritablement la manière de procéder des Persans et des Arabes orientaux, et c'est un argument de plus, si minime qu'il soit, qui vient s'ajouter à tous ceux que M. Cantor, dans ses *Vorlesungen*

zur Geschichte der Mathematik, a réunis pour établir une ligne de démarcation profonde entre l'École maghrebine et l'École orientale. La balance, pour la solution des problèmes par la fausse position, était d'un emploi régulier chez les Maghrebins; les Orientaux devaient se servir du tableau qui nous occupe.

Je reprends maintenant la description et l'étude de la suite du tableau.

La deuxième Partie est annoncée par ces mots écrits en rouge dans le manuscrit : *Istikhrâj ba-$t_0$arîq al-jebr wel-muqâbala,* « Détermination par la voie de l'Algèbre » (¹).

Toute la fin de la première page et le commencement de la seconde fournissent ensuite le tableau suivant :

Transcription.		*Traduction.*	
LA8L.	T_0ILA.	Rubis.	Or.
shey'	V *illâ shey'an*	x	$5 - x$
qîmat	qîmat	valeur	valeur
X *ashya'*	XX *illâ* IV *ashya'*	$10x$	$20 - 4x$

(en troisième colonne)

MES$_2$AL.	ÉQUATION.
majmu8-humâ	leur somme
XX *mu8adᵉl* VI *ashya'* XXIV	$20 + 6x = 24$
fa 'l-shey'u 'l-wâh$_1$ed ya8dal	et un seul x égale
s$_2$ul$_2$sey dînâr	$\frac{2}{3}$ *de denier*
wa-hûa wazn el-la8l	qui est le poids du rubis
QIMAT.	VALEUR.
VI *s$_2$uls$_2$sey*	$6\frac{2}{3}$

(¹) On sait que ce que nous appelons *Algèbre* porte toujours chez les Arabes le double nom *Jebr wal muqâbala,* double désignation qui s'est longtemps perpétuée en Occident. J'ai fait voir que, primitivement, *jebr* traduisait le sanscrit *chêda gamana* (*disparition des dénominateurs*) et *muqâbala* le *samaçodhana* (*enlèvement des semblables*); mais que, dès le début de l'Algèbre arabe, Al-khârizmi, élève des Grecs, ne chassant pas les dénominateurs, avait à tort attribué *jebr* au changement de signe des termes négatifs en les changeant de membre, et *muqâbala* à la réduction des termes rendus tous positifs, ce qui avait causé l'embarras des historiens qui, jusque-là, avaient cherché dans l'arabe seul l'explication de la formule.

Au commencement de la seconde page, le calculateur s'apprête probablement à appliquer la règle suivante qu'il énonce en marge :

« Les valeurs (estimatives) du chaton et de l'anneau étant données, retranchez la plus petite de la plus grande, le reste sera le *diviseur*. Ensuite, prenez le poids total de la bague, multipliez-le par la valeur du rubis, la différence entre le résultat et le prix (donné) de la bague est le *dividende :* divisez, et le quotient sera le poids de l'or. Et si l'on multiplie le poids de la bague de la même façon par la valeur de l'or, et divise la différence entre ce nombre et le prix de la bague par le diviseur, le résultat est le poids du rubis. Et Dieu sait! ».

En notation algébrique moderne, si l'on désigne :

le poids du rubis par x, celui de l'or par y,
la valeur » a, celle de » b,
le poids de l'ensemble par p et son prix par c,

on calculera d'après la règle énoncée

$$x = \frac{c - bp}{a - b}, \quad y = \frac{ap - c}{a - b}.$$

Or ces deux valeurs sont les solutions du système de deux équations

$$ax + by = c,$$
$$x + y = p.$$

Comment les Arabes étaient-ils parvenus à cette solution ? Je n'ai aucune donnée pour le trouver ; en tous cas, notre calculateur semble avoir été peu familier avec son application, car, après avoir commencé en ces termes :

Al-Khatam fas$_0$s$_0$-ho la8l majhûl el-wazn.			Le cachet dont le chaton en rubis est de poids inconnu.		
AL-LA8L.	AL-T$_0$ILA.	HAR MES$_2$AQIL.	RUBIS.	OR.	TOUS LES MITSQALS.
Coll-mesqâl : x *d*	Coll-mesqâl : IV *d*	Behhâ : XXIV *d*	Chaque mitsqal : 10 deniers	Chaque mitsqal : 4 deniers	Valeur : 24 deniers.
AL-FAS$_0$S$_0$.			LE CHATON.		
La8l majûl el-miqdâr wa-hûa : *s$_2$uls$_2$ey*		KHATAM-HO. t$_0$ilâ har mes$_2$âqîl.	Le rubis de quantité inconnue est $\frac{2}{3}$		SON ANNEAU. d'or tous les mitsquâls.

Il ne continue pas le calcul, mais répond par une méthode tout

autre :

S_2aman-hâ	Sâ-$s_2$aman-hâ'	Sa valeur	Sa contre-valeur
x *ashyâ'*	xx *d* iv *ashyâ*	$10x$	20 deniers-$4x$
mâjmu8-humâ		leur somme	
xx		$20 + 6x$	
vi *ashyâ'*			
mu-8â-del		é-ga-le	
xxiv *d.*		24 deniers.	
Fe 'l-shey' el-wâhid,	wa 'l-bâqî	Or un seul x	et le reste
wa hûa el-fas$_0$s$_0$, mu8âdel	wa hûa 'l-khâtam	c'est le chaton égal à	c'est l'anneau
$s_2$uls$_2$ey mes$_2$qâl	iv mes$_2$âqîl	$\frac{2}{3}$ mitsqâl :	$4\frac{1}{3}$ mitsqâls :
$s_2$aman-hâ :	$s_2$aman-hâ :	Valeur :	valeur :
vi *d*	xvii *d*	6 deniers $\frac{2}{3}$;	17 deniers $\frac{1}{3}$.
$s_2$uls$_2$ey ;	$s_2$uls$_2$		

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. BOUGAIEF.

Permettez-moi de présenter quelques remarques à propos de l'analyse de l'Ouvrage de M. E. Cesáro : *Sur diverses questions d'arithmétique* (*Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, mars 1884). Dans cette analyse sont indiquées les principales formules de la composition.

Je vais considérer ces formules en les comparant avec celles que j'ai indiquées dans l'analyse de ma composition : *Théorie des dérivées numériques* (*Bull.*, janvier 1876), et avec les formules de l'autre composition mentionnée dans cette analyse : *Identités numériques en relation avec les propriétés du symbole* E (*Mat. Sbornik*, t. I, 1866).

L'équation (2) de M. Cesáro n'est autre chose que la formule (14) de mon analyse

$$\Sigma_n \theta(\delta) \Sigma_d \psi(d') = \Sigma_n \psi \delta \Sigma_d \theta(d').$$

A propos de cette formule je dis : « Et sous cette forme elle devient la source d'un grand nombre de lois particulières (p. 19). »

Dans ma composition j'ai indiqué quelques-unes de ces formules.

Pour être plus court, j'ai négligé de les transcrire dans mon analyse, parce que j'ai pensé que chacun peut lui-même faire des applications en nombre infini de ces formules.

Cette formule a été publiée par moi en 1867, avant l'apparition de ma composition analysée dans le *Bulletin*.

Ma formule (14) avec deux fonctions arbitraires est une simple conséquence de ma formule (13) avec trois fonctions arbitraires.

On peut déduire sans difficulté les formules analogues avec n fonctions arbitraires.

La relation (3) de M. Cesáro est un cas particulier de ma relation (12).

La méthode de calcul de la valeur moyenne donnée par M. Cesáro (p. 87 du *Bull.*) n'est autre chose que ma méthode pour déduire les valeurs asymptotiques de la considération des séries numériques (p. 25 de mon analyse). Cette méthode est seulement indiquée dans mon analyse. Elle est considérée avec tous les détails dans mon ouvrage où est imprimée aussi ma correspondance avec M. Kummer au sujet de cette méthode.

La formule élégante signalée à M. Cesáro par M. Hermite (p. 86) se trouve au commencement de mon ouvrage [*Identités numériques* (*Math. Sbornik*), t. I, p. 4, 1866] sous la forme

$$\mathop{\mathrm{S}}_{1}^{n=\mathcal{E}\frac{u}{b}} \mathcal{E}\frac{n-bu}{a} = \mathop{\mathrm{S}}_{1}^{u=\mathcal{E}\frac{n}{b}} \mathcal{E}\frac{n-au}{b}.$$

Elle est démontrée non seulement pour les nombres entiers, mais pour tous les nombres positifs.

La formule (1) de M. Cesáro n'est autre chose que ma formule

$$\mathrm{Q}(1)\mathcal{E}\frac{n}{1} + \mathrm{Q}(2)\mathcal{E}\frac{n}{2} + \mathrm{Q}(3)\mathcal{E}\frac{n}{3} + \ldots = \mathop{\mathrm{S}}_{1}^{\mathcal{E}\frac{1}{n}} \mathrm{Q}(u) + \mathop{\mathrm{S}}_{1}^{\mathcal{E}\frac{n}{2}} \mathrm{Q}(u) + \ldots,$$

à la page 13 du premier Mémoire de ma position (*Théorie des dérivées numériques*).

Elle est démontrée à la page 114 des *Identités*.

L'idée de formules analogues à (6) est réalisée dans les formules analogues à (6).

A la page 98 de ma composition (*Identités*), les formules sont

données sous la forme

$$\mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{\mathcal{E}\phi(n-\psi'_1)} \varphi(u) \mathop{\mathrm{S}}_{1}^{\mathcal{E}\phi_1(n-\psi u)} \theta(u) = \mathop{\mathrm{S}}_{1}^{\mathcal{E}\phi_1(n-\psi')} \theta(u) \mathop{\mathrm{S}}_{1}^{\mathcal{E}\phi(n-\psi_1 u)} \varphi(u),$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{\mathcal{E}\phi\left(\frac{n}{\psi'_4}\right)} \varphi(u) \mathop{\mathrm{S}}_{1}^{\mathcal{E}\phi_1\left[\frac{n}{\psi}(u)\right]} \theta(u) = \mathop{\mathrm{S}}_{1}^{\mathcal{E}\psi_1\left(\frac{n}{\psi^1}\right)} \theta(u) \mathop{\mathrm{S}}_{1}^{\mathcal{E}\psi\left[\frac{n}{\psi_1}(u)\right]} \varphi(u),$$

où $\varphi(u)$ et $\theta(u)$ sont deux fonctions arbitraires analytiques ou numériques, $\psi(u)$, $\psi_1(u)$ deux fonctions ascendantes analytiques et quelquefois semi-analytiques, $\phi(u)$, $\phi_1(u)$ deux fonctions inverses des fonctions $\psi(u)$ et $\psi_1(u)$.

On peut trouver dans cette composition beaucoup d'autres formules analogues. Une de ces formules (26) est transcrite dans mon analyse. Par des méthodes indiquées dans cette composition, on peut trouver des formules beaucoup plus générales.

Ces formules, et beaucoup d'autres de la même composition, donnent une quantité infinie des conséquences pour l'analyse indéterminée et pour la théorie des fonctions discontinues.

Les différents exemples de ces applications ont été indiqués dans mon ouvrage.

La formule démontrée par M. Perott n'est autre chose que la formule (25) de mon analyse; je déduis cette formule comme je puis déduire une suite illimitée de formules analogues à celle qui a été démontrée par M. Perott.

Mes deux compositions, publiées la première en 1866 et la seconde en 1870-1872, donnent une théorie assez étendue de cette partie générale de la théorie des fonctions discontinues.

Ce n'est pas pour faire une réclamation de priorité que je donne ces indications, mais pour constater que les recherches dans cette partie des Mathématiques sont tout à fait conformes aux idées générales de mes travaux. N. Bougaïef.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

RESAL (H.). — Traité élémentaire de Mécanique céleste. Paris, Gauthier-Villars, xx-459 p. in-4°; 1884.

Nous avons aujourd'hui à appeler l'attention de nos lecteurs sur une nouvelle et importante publication de M. H. Resal. La première édition du *Traité élémentaire de Mécanique céleste*, dans laquelle le savant auteur s'était proposé d'exposer les principes fondamentaux de cette science, en ayant recours aux démonstrations les plus simples, avait été accueillie avec la plus grande faveur et se trouvait depuis longtemps épuisée. Au lieu de la réimprimer purement et simplement, M. Resal lui a fait subir de profondes modifications qui en font un Ouvrage nouveau à bien des égards. Au reste, pour donner une idée de l'ordre adopté et des matières traitées, nous n'aurons qu'à reproduire l'extrait suivant de la Préface de l'Ouvrage :

« Pour déblayer le terrain, et en même temps pour faciliter la lecture du texte proprement dit, nous avons cru devoir placer en tête de l'Ouvrage une Introduction où se trouvent traitées, d'une manière spéciale, la plupart des questions de Mécanique analytique et d'Analyse qui doivent ultérieurement se présenter, et parmi lesquelles nous signalerons les suivantes : dans le Titre I, nous avons donné les équations de la Mécanique analytique dues à Lagrange, Hamilton et Jacobi, suivies de celles auxquelles conduit la méthode de la variation des constantes arbitraires. Le Titre II se rapporte à l'emploi des coordonnées elliptiques dans la solution de certains problèmes relatifs au mouvement d'un point matériel dans un plan.

» Dans le Titre III, nous avons reproduit les intégrales connues des équations du mouvement relatif, par rapport à l'un de ses points, d'un système matériel uniquement soumis à ses actions mutuelles.

» Nous avons eu pour objet, dans le Titre IV, d'établir les équations du mouvement dans l'espace d'un point matériel, exprimées en coordonnées polaires, équations auxquelles on doit avoir re-

cours dans la théorie de la Lune. Le Titre V et dernier de l'Introduction renferme les solutions de quelques questions d'Analyse dont les énoncés ne peuvent pas être traduits en langage ordinaire et pour lesquelles nous renverrons à la Table des matières.

» Nous arrivons maintenant à la partie essentielle de l'Ouvrage.

» Dans le Chapitre I, nous nous sommes occupé du mouvement elliptique des planètes, de la gravitation, de la détermination des masses, de la formule de Lambert et de ses conséquences dans le mouvement parabolique des comètes; de la détermination des constantes introduites dans les formules du mouvement elliptique et notamment par la méthode de Gauss, qui n'est mentionnée ni dans la *Mécanique céleste* de Laplace, ni dans l'*Exposition analytique du système du monde* de Pontécoulant; des développements en séries des coordonnées d'une planète suivant les puissances ascendantes du temps et de leurs applications, ainsi que de la détermination des éléments d'une orbite cométaire. Comme première innovation apportée au programme de la première édition, nous avons terminé le Chapitre dont il s'agit en nous occupant du problème du mouvement plan d'un point matériel attiré par deux centres fixes en raison inverse du carré de la distance; ce problème, posé par Euler, a été complètement résolu par Legendre, puis par Liouville, dont nous avons reproduit la démonstration, en raison de sa simplicité.

» Le Chapitre II est consacré entièrement à la théorie des perturbations. Nous avons pensé que, pour bien faire comprendre le sens du problème que l'on a en vue, il convenait de faire précéder les recherches analytiques de la théorie géométrique des perturbations, dont l'idée première est due à Newton et qui a été reprise plus tard par Lagrange, dans l'hypothèse où les planètes circuleraient dans le plan de l'écliptique. Dans cette seconde innovation, nous avons eu uniquement recours aux propriétés de l'accélération, qui, comme on le sait, n'ont été établies que vers le commencement de la seconde moitié de notre siècle. Nous avons déduit très facilement, des résultats obtenus, les formules de Poisson qui s'appliquent au mouvement d'une planète dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse. Nous avons exposé ensuite la théorie analytique des perturbations des planètes, en prenant pour point de départ les théorèmes d'Hamilton et de

Jacobi, méthode qui est beaucoup plus simple que celle de Lagrange, lorsqu'on s'est bien assimilé les matières contenues dans l'Introduction. Nous avons terminé le Chapitre en donnant les formules qui se rapportent aux perturbations du mouvement elliptique des comètes.

» Dans le calcul de l'attraction des corps, qui fait l'objet du Chapitre III, nous avons reproduit, à quelques modifications près, les démonstrations géométriques que nous avions données dans la première édition, en vue d'apporter quelque clarté sur cette partie de la Mécanique céleste. Nous avons continué à démontrer *a priori*, au moyen d'une double intégration par parties, la convergence du développement du potentiel en fonctions sphériques dans les cas douteux auxquels Laplace ne s'est pas arrêté. Nous avons employé, pour déterminer la forme de ces fonctions, la méthode de Jacobi, à laquelle nous avons donné plus de développements, et qui est l'une des plus élégantes et des plus simples.

» Parmi les questions traitées dans le Chapitre IV, relatif à la figure des planètes, nous citerons celle de l'ellipsoïde à trois axes inégaux de Jacobi, la discussion des équations qui en résultent, établie d'abord par Meyer, puis modifiée et complétée par Liouville; les hypothèses de Legendre et de É. Roche sur la variation de la densité dans l'intérieur de la Terre; le théorème de Liouville sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, théorème dont nous avons donné une démonstration géométrique et que nous avons ensuite appliqué à la stabilité de l'équilibre des mers.

» Nous avons déduit (Chap. V), de considérations géométriques sur le mouvement d'un point, les propriétés, dues à Laplace, des lignes géodésiques tracées sur la surface d'un sphéroïde.

» Dans le Chapitre VI, où nous nous occupons des atmosphères des corps célestes, nous avons notamment emprunté à É. Roche les considérations qui, en tenant compte de l'hypothèse de la force répulsive due aux radiations calorifiques, imaginée par M. Faye, permettent d'expliquer la forme des comètes.

» En tête du Chapitre VII, intitulé *Des oscillations de la mer et de l'atmosphère*, nous avons établi immédiatement les équations des petits mouvements d'un fluide recouvrant un noyau sphéroïdal, en nous appuyant uniquement sur le théorème de Coriolis

dans le mouvement relatif, et sur le principe de l'indépendance des forces centrifuges composées avec les mouvements composants. Nous sommes parvenu à établir la formule pratique relative aux marées, donnée par l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, formule qui paraît être due à Poisson, mais dont nous n'avons trouvé nulle part la démonstration.

» Une interprétation géométrique des propriétés du mouvement d'un solide autour d'un point fixe nous a permis de poser presque immédiatement les équations du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité (Chap. VIII). En ce qui concerne les déplacements séculaires de la Terre, nous avions, dans la première édition, pris pour origine du temps l'année 1750; mais ici nous partons de l'année 1850, et nous mettons à profit les chiffres obtenus par Le Verrier en discutant les résultats des observations de Peters. Une simple considération géométrique basée sur la théorie des mouvements relatifs nous a permis d'établir facilement ce théorème de Laplace : *Les phénomènes de la précession des équinoxes et de la nutation sont absolument les mêmes que si la mer et l'atmosphère formaient une masse solide avec le sphéroïde qu'elles recouvrent.*

» Les équations du mouvement de la Lune et de l'anneau de Saturne, comme celles qui se rapportent à la Terre, ont aussi été déduites de considérations géométriques.

» La publication de notre Ouvrage sur la *Physique mathématique* nous a dispensé de reproduire, dans le Chapitre IX, relatif à la chaleur terrestre, les développements sur le mouvement de la chaleur dans une sphère et sur la chaleur centrale du globe, que nous avions donnés dans la première édition; nous n'avons eu dès lors, à quelques préliminaires près, à nous occuper que de la diminution de la durée du jour due au refroidissement de la Terre.

» Nous avons ajouté au programme que nous avions adopté dans la première édition, et d'après Laplace dont nous nous sommes efforcé de simplifier les démonstrations :

» 1° La théorie des réfractions astronomiques;

» 2° La théorie des inégalités du mouvement des planètes dues à l'ellipticité du Soleil, avec son application à Mercure;

» 3° Enfin, pour terminer, les principes fondamentaux de la théorie de la Lune, en suivant la voie tracée par Laplace. »

A cet exposé si complet et si intéressant, nous n'ajouterons qu'un seul mot. L'exposition est claire et satisfaisante. Quant à l'impression elle est digne en tout des presses de M. Gauthier-Villars. La seconde édition du *Traité élémentaire de Mécanique céleste* se présente à nous sous la forme d'un beau Volume in-4° où rien ne laisse à désirer, ni les figures, ni les formules, ni le texte.

GLAISHER. — VARIOUS PAPERS AND NOTES (chiefly relating to elliptic functions) that have appeared in the QUARTERLY JOURNAL OF MATHEMATICS and the MESSENGER OF MATHEMATICS during the years 1881 and 1882. 1 vol. in-8°. Cambridge, 1882.

M. Glaisher, par de nombreuses et intéressantes publications, insérées soit dans le *Messenger of Mathematics*, soit dans le *Quarterly Journal,* cherche à populariser en Angleterre la théorie des fonctions elliptiques. Comme M. Cayley, dans son excellent *Elementary Treatise of elliptic functions,* c'est surtout au point de vue de Jacobi qu'il se place. Et, à la vérité, ce point de vue est quelquefois par trop abandonné. Quel que soit l'intérêt propre de la théorie des fonctions d'une variable complexe, quelle que soit la lumière qu'on puisse en tirer pour la théorie des fonctions elliptiques, il ne faudrait point qu'elle absorbât cette dernière jusqu'à en faire oublier les détails et négliger les applications.

Les notes de M. Glaisher, destinées à illustrer quelques passages des *Fundamenta,* à développer quelques formules utiles, à faciliter le maniement des transcendantes elliptiques, à faire ressortir les analogies ou les liaisons de ces dernières avec les fonctions trigonométriques, doivent rendre les plus grands services aux étudiants et aux maîtres qui les lisent. La notation adoptée est celle de Gudermann, un peu compliquée par l'emploi de symboles nouveaux, assez ingénieux d'ailleurs; ainsi les symboles ns, nc, nd sont mis à la place de $\frac{1}{\mathrm{sn}}$, $\frac{1}{\mathrm{cn}}$, $\frac{1}{\mathrm{dn}}$; puis la combinaison de deux des lettres s, c, d représente le quotient de deux des transcendantes sn, cn, dn, dont les premières lettres figurent dans la com-

binaison : ainsi

$$\operatorname{sc} u = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}.$$

On a ainsi neuf transcendantes. M. Glaisher donne le tableau des dérivées et des intégrales de ces fonctions et de leurs puissances entières, la formule d'addition que Jacobi a déduite par analogie de l'identité

$$(u-x)(y-z)+(u-y)(z-x)+(u-z)(x-y)=0,$$

et diverses conséquences de cette formule, le développement des expressions

$$\operatorname{sn}(u+v+w), \quad \operatorname{cn}(u+v+w), \quad \operatorname{dn}(u+v+w),$$

les dérivées secondes des logarithmes des neuf transcendantes, la démonstration de la formule

$$Z(u)+Z(v)-Z(u+v)=k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+v),$$

tirée des développements des fonctions Z, sn en séries de Fourier; dans un article qui a été analysé dans le *Bulletin* à propos du *Quarterly Journal,* il insiste sur les liens étroits qui unissent les formules d'addition et la théorie du triangle sphérique. Signalons encore les formules

$$\arg \operatorname{sn} a = \frac{1}{\pi}\int_0^{K'} \log\left[\frac{1+a\operatorname{dn}(u,k')}{1-a\operatorname{dn}(u,k')}\right] du,$$

$$(\arg \operatorname{sn} a)^2 = \frac{2}{\pi}\left\{ K'\int_0^{K} \log(1-a^2k^2\operatorname{sn}^2 u)\,du \right.$$
$$\left. - K\int_0^{K'} \log[1-a^2\operatorname{dn}^2(u,k')]\,du \right\},$$

et un article déjà analysé relatif à la fonction

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^u}{u}\,du.$$

Enfin, le petit volume de M. Glaisher se termine par quelques formules relatives aux fonctions sphériques et au logarithme inté-

gral, et par d'intéressants exemples destinés à illustrer la théorie des solutions singulières des équations différentielles, donnée par M. Cayley dans le second Volume du *Messenger of Mathematics*.

MÉLANGES.

MANUEL MOSCHOPOULOS ET NICOLAS RHABDAS;

PAR M. PAUL TANNERY.

I.

Dans ses *Vermischte Untersuchungen zür Geschichte der mathematischen Wissenschaften* (1), M. Siegmund Günther a publié, d'après un manuscrit de la bibliothèque de Munich (p. 195-203), le texte grec d'un petit Traité de Manuel Moschopoulos sur les carrés magiques, et il s'est efforcé d'en déterminer l'époque. Comme ce Traité est adressé à un Nicolas Artavasde Rhabdas, et qu'un manuscrit du XVe siècle de la Bibliothèque nationale (fonds grec n° 2428) contient une réédition, faite par ce dernier personnage, du *Grand calcul suivant les Hindous* de Maxime Planude, tandis qu'il existe de ce même ouvrage d'autres manuscrits du XIVe et du XVe siècle, exempts des changements introduits par Rhabdas, notre savant collaborateur a cru pouvoir considérer comme probable que Moschopoulos a appartenu, pour la plus grande partie de sa vie, au XVe siècle (p. 267).

L'étude que j'ai faite du manuscrit précité n° 2428 m'a permis de préciser une date de la vie de Rhabdas et de la reporter un siècle plus tôt.

Ce manuscrit renferme en effet (fol. 225-245) un Traité arithmétique intitulé :

---

(1) Leipzig, Teubner, 1876.

Τῷ ὑπερλίαν ἐκθύμως φιλουμένῳ, τῷ κλαζομενεῖ Τζαβούχῃ Θεοδώρῳ, ὁ Νικόλαος Ἀρτάβασδος (²) Σμυρνόθεν, ἐκ Βυζαντίδος ὁ Ῥαβδᾶς γράφει τόδε.

« A son très cher ami de cœur, à Théodore Tzavoukhe de Clazomène, Nicolas Artavasde de Smyrne le Rhabdas écrit ceci de Byzantide. »

Or ce Traité contient (fol. 231) un calcul de la pâque *pour la présente année,* l'an 6800, 17 du cycle solaire, 9 du cycle lunaire, et la pâque est donnée pour le 8 avril.

La date de l'ère byzantine est certainement fautive, et l'omission des lettres numérales indiquant les dizaines et les unités se soupçonne à la seule inspection du manuscrit; mais toutes les autres données concordent pour désigner, *sans aucune ambiguïté possible,* l'an 1341 après J.-C., ou 6849 de l'ère byzantine.

Le manuscrit n° 2428 contient d'ailleurs le Traité de Moschopoulos avec un texte en meilleur état que celui de Munich. Ce Traité (fol. 181-185) commence un recueil d'Ouvrages mathématiques, essentiellement distinct des parties précédentes du manuscrit :

Le titre peut se traduire ainsi :

« Du très savant et bien heureux Maître Manuel Moschopoulos, instruction pour l'invention des nombres carrés, qu'il fit, forcé par Nicolas de Smyrne Artavasde, arithméticien et géomètre, le Rhabdas ».

L'épithète de bienheureux (μακαριωτάτου) ou de très saint (ἁγιωτάτου) du manuscrit de Munich indique que Moschopoulos était mort lorsque cet intitulé fut composé. L'autre épithète (λογιωτάτου) semble suffire pour l'identifier avec un littérateur assez connu de la même époque, Manuel Moschopoulos dit le Crétois, pour le distinguer d'un homonyme de la même famille (le Byzantin) qui vécut au xve siècle et vit prendre Constantinople par les Turcs.

Ces deux Moschopoulos ont surtout écrit des Ouvrages de grammaire et des commentaires sur les anciens auteurs grecs; les connaissances mathématiques n'étaient guère qu'un accessoire chez les Byzantins de cette époque; Maxime Planude, lui aussi, fut prin-

(¹) Et non Ἀρταβάσδης, comme M. Günther l'a écrit d'après Gerhardt et Scholl.

cipalement un littérateur, et le Rhabdas lui-même, malgré les titres spéciaux « d'arithméticien et de géomètre » qu'il se donne, a composé une grammaire.

Il est clair d'ailleurs que l'auteur du Traité sur les carrés magiques n'est pas l'inventeur des procédés qu'il indique ; il les a reçus par une tradition venue peut-être de l'Inde, ou au moins des pays mahométans, et qu'il ne possède qu'incomplètement, comme il est facile de le reconnaître.

Il distingue en effet les nombres, pour la formation des carrés magiques, en impairs, en pairement pairs, et en pairement impairs. Mais les pairement pairs sont pour lui les puissances de 2, tandis que les procédés qu'il indique pour ces nombres s'appliquent aux pairement pairs d'Euclide, c'est-à-dire aux nombres de la forme $4n$. Quant aux pairement impairs, qu'il aurait dû réduire aux nombres de la forme $4n + 2$, il ne donne aucune règle, et il ne semble pas que les Byzantins aient connu de procédé général pour ces nombres.

Au moins dans notre manuscrit n° 2428, au verso du folio 212, on trouve sans autre explication les carrés magiques suivants pour les nombres 6^2 et 10^2 :

1	35	27	10	32	6
30	8	17	20	11	25
28	34	15	16	4	14
9	3	21	22	33	23
12	26	13	24	29	7
31	5	18	19	2	36

1	99	43	58	87	14	83	18	92	10
90	12	60	41	13	88	29	72	19	81
6	95	23	77	98	3	74	28	47	54
94	7	68	34	5	96	37	63	53	48
22	75	40	69	45	46	30	76	36	66
79	26	61	32	55	56	71	25	65	35
16	85	38	64	17	84	67	33	52	49
86	15	73	27	97	4	24	78	50	51
20	82	39	62	8	93	59	42	89	11
91	9	57	44	80	21	31	70	2	100

Or, si le premier est exact et formé d'ailleurs par un procédé qui se rapproche de ceux d'Adam Riese et d'Agrippa de Nettesheim, le second, qu'on a essayé de combiner en partant des mêmes principes, est faux. La troisième et la quatrième colonne verticale ont respectivement pour sommes 502 et 508 au lieu de 505.

Pour en finir avec Manuel Moschopoulos, je relèverai dans la citation de Pauli faite par M. Günther (p. 194) une erreur singulière, en ce qu'elle montre avec quelle précaution il faut consulter les meilleurs auteurs.

D'après Pauli, Manuel Moschopoulos le Crétois vivait sous Andronic Paléologue, dans la dernière période du XIVe siècle, ou suivant Titze, sous Michel VIII Paléologue, dans la deuxième période du XIIIe siècle. Voilà une divergence d'un siècle qui semble embarrassante.

La première donnée ressemble à Fabricius qui précise (éd. Harles, t. VI, p. 323) qu'il s'agit d'Andronic le Vieux et de l'année 1392. Or Andronic le Vieux a régné de 1282 à 1327 et le seul Andronic qui soit venu après lui, Andronic III le Jeune, a régné de

1327 à 1360. La date de 1392 est d'ailleurs simplement celle attribuée par un érudit du XVIe siècle à un manuscrit de Moschopoulos, que Montfaucon a reportée à l'année 1296 (manuscrit fonds grec n° 2572 de la Bibliothèque nationale).

Quant à Michel VIII (1261-1282), ce fut le prédécesseur immédiat d'Andronic le Vieux. En tenant compte des recherches de Titze et de la donnée de Montfaucon, on peut donc penser que l'auteur du Traité des carrés magiques était sensiblement plus âgé que Nicolas Rhabdas et qu'il a composé son Opuscule arithmétique dans sa vieillesse, vers le premier quart du XIVe siècle.

II.

Dans le manuscrit n° 2428, l'opuscule de Moschopoulos est suivi (fol. 186-193) de la Ψηφοφορία κατ' Ἰνδούς de Planude, avec les additions de Rhabdas.

« Le calcul suivant les Hindous, dit le grand : son exposition par le très philosophe parmi les philosophes et très vénérable parmi les moines maître (1) Maxime le Planude et le Rhabdas Nicolas. »

La Notice donnée sur ce manuscrit par Gerhardt, dans son édition du Traité de Planude (*Das Rechenbuch des Maximus Planudes,* Halle, Schmidt, 1865, p. XII), est passablement inexacte. « C'est, dit-il, une revision de l'ouvrage de Planude ; mainte chose a été laissée de côté, d'autres ont été empruntées à un autre écrit de Nicolas Rhabdas. »

En fait, le texte de Planude est suivi fidèlement, et Gerhardt aurait pu utiliser avec avantage ce manuscrit pour son édition. A la vérité, il s'arrête après la multiplication (2), mais il en est de même du plus ancien manuscrit de Planude, et dans la partie conservée il n'y a pas d'omissions, seulement beaucoup d'additions de détail, qui ne sont d'ailleurs nullement empruntées à un autre écrit de Rhabdas. Les deux additions les plus importantes sont

---

(1) Κυρίου en abréviation. Gerhardt a lu καὶ τὰ; dans le cas semblable, pour le titre du Traité de Moschopoulos, M. Günther a lu κατά.

(2) Plus exactement après εἴρηται, p. 11, l. 8 de l'édition de Gerhardt.

notées en marge : Ἐκ τῆς προσθήκης τοῦτο τοῦ Ῥαβδᾶ Νικολάου..... ἕως ὧδε (Ceci a été ajouté par le Rhabdas Nicolas... jusqu'ici.)

Ainsi, après l'exemple d'addition (p. 4) dans lequel la somme est inférieure à 10000, Rhabdas remarque que ce calcul aurait pu être effectué sur les doigts avec le mode de figuration dont il nous a lui-même conservé les détails ailleurs ; mais que, pour des nombres supérieurs, l'emploi des chiffres hindous ne peut être ainsi suppléé.

De même, après la soustraction, Rhabdas en donne la preuve par 9, négligée par Planude.

Mais ce qui est assez singulier, c'est que ces deux additions sont suivies immédiatement d'autres, nettement distinguées de celles de Rhabdas par une annotation marginale (τοῦτο ἡμέτερον... ἕως ὧδε. Ceci est de nous... jusqu'ici). La première fois ce second reviseur du Traité détaille longuement ce qu'il faut faire dans le cas de l'addition, s'il se présente des zéros dans les deux nombres à ajouter; la seconde fois, il développe la preuve par 9 pour la soustraction, seulement indiquée par Rhabdas.

De qui sont ces secondes additions? Seize feuillets plus loin, en comptant à la manière grecque les deux extrêmes, on trouve (fol. 203) la mention marginale : Ζήτει καὶ ἕτερα Κυδώνη πρὸ φυλλῶν ῑς. (Cherchez d'autres choses de Cydone seize feuillets plus haut.) Cette mention se trouve en regard d'une règle, autrement anonyme, pour calculer la somme des n premiers nombres. Cette règle est suivie d'une autre pour le même objet, qui est donnée comme d'Isaac (Argyre).

Mais, dans cette mention, ἕτερα est en abréviation et l'on peut lire ἑτέραν, *une autre* (méthode). De fait, tout ce fragment représente les problèmes 2 et 3 publiés d'après le *Codex Cizensis* de Nicomaque par Richard Hoche, p. 149-151 de son édition de l'*Introduction arithmétique* (Leipzig, Teubner, 1866), et attribués à Isaac (Argyre); dans ce manuscrit, le problème précédent est encore une règle un peu différente pour le calcul de la somme des n premiers nombres et, sous l'indication de l'auteur τοῦ Κύνος donnée par Hoche, nous savons, par un autre manuscrit de la Bibliothèque nationale, qu'il faut lire τοῦ Κυδώνου.

Il est donc très possible que l'annotation marginale, qui paraissait nous donner une lumière inattendue, ait été prise sur un manuscrit

originaire ([1]) où elle renvoyait à la méthode de Cydone pour ce problème de sommation, et que le rapport où elle semble être maintenant avec l'annotation du fol. 188 soit purement accidentel.

Quoi qu'il en soit, si nous nous demandons quel est l'auteur des deux additions anonymes dans le Traité de Planude, nous ne pouvons guère penser qu'à Démétrius Cydone ou à Isaac Argyre, qui sont les deux seuls autres érudits dont le nom se rencontre dans la compilation qui a formé notre manuscrit. Le premier, ami de Jean VI Cantacuzène (1344-1355), après l'abdication de ce dernier, se retira d'abord à Milan, puis en Crète; il vivait encore en 1391. Quant à Isaac Argyre, on a de lui des écrits datés de 1368 à 1386, mais qu'il composait dans sa vieillesse.

Il n'est guère douteux que Maxime Planude, dont l'âge est intermédiaire entre ceux de Manuel Moschopoulos et de Nicolas Rhabdas, ne vécût encore quand ce dernier revisait son Traité. Cydone, un peu plus jeune que Rhabdas, a d'ailleurs soutenu une polémique religieuse entre Maxime Planude et, d'un autre côté, contre un autre moine qui s'occupa également de Mathématiques, Barlaam, contemporain de Planude. Pour Argyre, qui fut aussi moine, il devait être encore un peu plus jeune que Cydone.

III.

Le troisième fragment de notre manuscrit n° 2428 (fol. 194-200) est un écrit de Rhabdas :

« Enseignement abrégé et très clair de la science du calcul, improvisé en Byzantide de Constantinople par Nicolas de Smyrne Artavasde, arithméticien et géomètre, le Rhabdas, à la demande du tout vénérable chargé des pétitions (ἐπὶ τῶν δεήσεων) maître George le Khatzyce, ouvrage très facile pour ceux qui veulent l'étudier, et que voici : »

Cet Opuscule, très élémentaire, et où les lettres numérales grecques sont seules employées, n'offre guère d'intérêt que parce qu'il renferme, sous le titre « Ἔκφρασις τοῦ δακτυλικοῦ μέτρου », l'expo-

---

([1]) Je remarque à cette occasion que si une partie du manuscrit 2428 est incontestablement du xve siècle, celle qui nous occupe peut très bien n'être que du xvie siècle.

sition du système des anciens pour figurer sur leurs doigts tous les nombres jusqu'à 9999. Cette partie du Traité a été déjà plusieurs fois imprimée.

En dehors des trois pages sur la numération par les doigts, le plus curieux du Traité est au début. Rhabdas y a littéralement copié, en changeant le nom du destinataire, le préambule des *Arithmétiques* de Diophante jusqu'à τυγχανόντων δὴ ἐν τούτοις (p. 2, l. 5 de l'édition de S. Fermat), et, fait aussi singulier, il a répété le même plagiat, un peu moins étendu toutefois, au début de sa lettre à Théodore Tzavoukhe, dont j'ai déjà parlé, et qui semble être un peu postérieure à celle qui nous occupe actuellement.

Cette double circonstance ne peut guère faire juger honorablement l'esprit d'invention littéraire de Rhabdas, mais elle permet de soulever une question plus grave. Il connaissait Diophante et s'en était nécessairement occupé ; si l'on réfléchit à l'insuffisance des motifs qui font attribuer à Planude les scolies sur Diophante, on peut se demander si l'auteur n'en est point Rhabdas. En fait, les plus anciens manuscrits sont anonymes quant aux scolies, et si le fragment de la Ψηφοφορία κατ' Ἰνδούς, qui suit le texte sur quelques-uns, est parfois indiqué comme de Planude, il débute par un morceau mutilé qui ne paraît nullement de ce dernier, et qui peut provenir de la revision par Rhabdas de la seconde partie du *Calcul suivant les Hindous*.

On peut encore remarquer (fol. 196 verso) que, après avoir défini l'addition et la soustraction, Rhabdas renvoie pour la pratique du calcul à une Table (ταύλα) précédente, « la Table du très sage Palamède ». Dans notre manuscrit, cette Table, au lieu de précéder, suit l'opuscule (fol. 201-202). Elle donne les sommes et produits pour toutes les combinaisons deux à deux des lettres numérales grecques, lorsqu'elles ne donnent pas lieu à simple juxtaposition pour l'addition.

Il est à peine utile de remarquer que Palamède ne peut représenter ici que « l'antique tradition », car il est impossible de faire remonter la numération alphabétique des Grecs au delà de la moitié du VIe siècle avant J.-C., et cette date (époque de Pythagore) est peut-être déjà trop reculée.

La Table attribuée à Palamède est accompagnée d'une Note anonyme qui peut, au reste, être de Rhabdas, et où il est dit que

pour les calculs plus complexes il faut recourir au procédé du grand calcul hindou.

Viennent ensuite, après une lacune d'une page environ, les règles d'Isaac dont nous avons parlé plus haut, pour la sommation des n premiers nombres et pour celle des termes d'une progression arithmétique.

Puis (fol. 203, verso 212), nous rencontrons une version de la *Geodæsia* de Héron éditée par Hultsch (*Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiæ*, Berlin, Weidmann, p. 141-152, 1864). Cette version, dont l'intitulé est d'ailleurs Γεωμετρία τοῦ Ἥρωνος, se rapproche plus des manuscrits de la partie correspondante de la *Geometria* (p. 41-60), (au moins du n° 2013 de la Bibliothèque nationale) que de celui suivi par le savant éditeur; elle ne contient notamment pas la Table métrologique (Chap. IV) spéciale à la *Geodæsia*, mais elle renferme les deux autres morceaux propres à ce Traité, pour les calculs de la hauteur et de l'aire dans un triangle quelconque (17, 18, 19), morceaux qui, au reste, semblent d'une date relativement récente.

Dans la partie métrologique de ce Traité de Héron, devant le fragment sur l'orgye (4, 12, p. 48 de Hultsch), on remarque le titre singulier Ἀπὸ τῆς ὑπεροπτικῆς γεωμετρίας, avec la remarque marginale ἴσως (peut-être) αἰγυπτικῆς au lieu d'ὑπεροπτικῆς.

C'est à la fin du Traité que se trouvent les deux carrés magiques que j'ai donnés plus haut.

On rencontre ensuite (fol. 213-214) un travail d'Isaac Argyre.

« D'Isaac moine l'Argyre à Colybos qui, étant à Mitylène, lui demandait comme un Tableau résumé; c'est une méthode de géodésie ou de mesure des surfaces, exacte et abrégée. »

Ces quatre pages commencent par insister sur les erreurs qu'entraînent les procédés grossiers d'arpentage analogues à ceux de l'antique Égypte, pour revenir finalement comme pratique à ces mêmes procédés. Après la salutation finale de la lettre, vient, sans titre aucun [1] et comme faisant suite, une compilation d'extraits de la *Geometria* et des *Introductiones stereometricorum* de Héron, où les règles sont partout substituées aux exemples.

Cette compilation, qui occupe les folios 215-224, est suivie de

---

[1] Un espace blanc a toutefois été réservé pour ce titre.

la lettre de Rhabdas à Théodore Tzavoukhe ; vient ensuite (fol. 246-248 recto) « d'Isaac moine l'Argyre, scolie sur la première figure de la description sur un plan de la terre habitée » (géographie de Ptolémée) ; c'est le dernier morceau véritablement mathématique du manuscrit, qui comprend encore quatre pages sur les noms des différents vents, et quelques autres renseignements de Géographie générale.

IV.

Je reviens à la lettre de Rhabdas à Tzavoukhe pour l'analyser ; elle représente de fait la suite de la lettre à Khatzyce et offre sensiblement plus d'intérêt.

Après quelques considérations générales, Rhabdas enseigne :

A. A multiplier des nombres fractionnaires exprimés avec des suites de quantièmes ;

1° Former le carré de $3\frac{1}{3}\frac{1}{14}\frac{1}{42}$,

2° Produit de $5\frac{2}{3}\frac{1}{5}\frac{1}{33}\frac{1}{110}\frac{1}{330}$, par $8\frac{2}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{156}$.

3° Produit de $5\frac{1}{5}$, par $7\frac{1}{7}$ et $9\frac{1}{6}\frac{1}{18}$,

B. A diviser par un nombre fractionnaire :

4° Quotient de 10 par $3\frac{1}{3}\frac{1}{14}\frac{1}{42}$.

C. A extraire la racine carrée d'un nombre non carré parfait.

Il donne la règle suivante. Prendre le carré le plus voisin *en plus ou en moins* du nombre donné.

Soit $A = a^2 + r$; l'approximation du premier degré sera

$$X_1 = a + \frac{r}{2a} :$$

c'est une approximation par excès.

De cette approximation, on peut en déduire une autre au même degré par défaut

$$x_1 = \frac{A}{X_1} = a + \frac{\frac{1}{2}r}{a + \frac{r}{2a}},$$

puis une approximation du second degré (par excès),

$$X_2 = \tfrac{1}{2}(X_1 + x_1) = a + \frac{r}{2a} - \frac{r^2}{4a(2a^2 + r)}.$$

Dans les exemples choisis par Rhabdas, A = 10, 3, 24, la valeur absolue de r est toujours l'unité.

Rhabdas expose ensuite un procédé dont il se donne comme l'inventeur pour le calcul pascal, et qu'Isaac Argyre s'est approprié dans son Traité publié par le P. Petau.

Ce procédé est le suivant : retrancher de 50 l'épacte (supposée différente de 28 et de 29), et compter à partir du 1er janvier un nombre de jours égal à la différence ; le dimanche suivant le jour ainsi obtenu est le carnaval byzantin, c'est-à-dire notre sexagésime, le huitième dimanche avant Pâques.

Nous arrivons à une partie intitulée Μέθοδος πολιτικῶν λογαριασμῶν, *Méthode des calculs de la vie usuelle*. Cette méthode consiste en trois procédés qui reviennent à notre règle de trois simple, directe et inverse, et à la règle de trois composée. Il est remarquable que dans l'exposé Rhabdas appelle les nombres donnés λόγοι, c'est-à-dire du mot qui signifie *rapport* chez tous les mathématiciens grecs.

Notre auteur entre ensuite dans quelques détails sur le système des poids et mesures et donne des applications pratiques de la règle de trois, puis il expose la règle d'alliage. Il termine par un recueil de problèmes, au nombre de vingt, qui ne font plus partie des « calculs de la vie usuelle », mais sont « bien plus élevés et plus surprenants ».

Ces problèmes, dont les énoncés sont mis sous forme d'historiettes, sont en fait du premier degré et des plus simples. Voici les équations auxquelles conduisent immédiatement les 18 premiers :

(1) $$x\left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}\right)=21,$$

(2) $$x\left(1-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}\right)=12,$$

(3) $$x\left(1+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{4}\right)=30,$$

(4) $$\frac{x}{3\frac{1}{3}}=\frac{10}{3\frac{1}{3}-3\frac{1}{5}},$$

(5) $$x+6=2(y-6),\quad x-6=y+6,$$

(6) $$x+y=100,\qquad 7x=9y,$$

(7) Rapport de deux cubes dont les côtés sont 10 et 5.

(8) $$x+\tfrac{1}{5}y=y+\tfrac{1}{7}x=10000,$$

(9) $$x\left(1-\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{9}\right)\left(1-\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{7}\right)\left(1-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}\right)\left(1-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}\right)=1\tfrac{1}{2},$$

(10) $$x\left(1\tfrac{1}{2}+2\tfrac{1}{2}\right)=7,$$

(11) $$[(2x-15)2-15]2-15=0,$$

(12) Simples divisions.

(13) $380 \times 85 = x(85 + 24)$,

(14) $x + b - a = y - b + a$,

problème absurdement considéré comme déterminé et résolu par une règle qui supposerait encore $x + y = a^2$;

(15) $x(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}) = 36$,

(16) $x(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}) = 138$,

(17) $x(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}) = 4$,

(18) Partage en parties proportionnelles.

Les deux derniers problèmes 19 et 20 (non numérotés d'ailleurs sur le manuscrit) sont les deux derniers publiés par Hoche à la suite de son édition de Nicomaque. Il est possible qu'ils ne fissent pas originairement partie du recueil de Rhabdas.

Il est clair que ce recueil touche à peine même aux premiers problèmes de Diophante et qu'il rappelle beaucoup plutôt le papyrus mathématique d'Eisenlohr. L'analogie est encore plus frappante en ce que, dans plusieurs problèmes, le résultat fractionnaire est exprimé par une suite de quantièmes suivant l'antique procédé égyptien, que les Byzantins conservaient traditionnellement à côté du procédé de numération ordinaire pour les fractions [1].

Quant aux solutions de Rhabdas, elles témoignent également d'une singulière décadence. Aucun raisonnement analytique; les calculs sont développés avec soin, en cherchant à montrer ce qu'il faudrait faire dans le cas du changement des données numériques, et l'existence de la solution est prouvée synthétiquement, mais rien de plus. Rhabdas s'adresse à la mémoire, non à l'intelligence.

Si l'on ajoute que ses calculs sont parfois fautifs, on ne peut certainement le considérer que comme un écrivain mathématique tout à fait ordinaire, même pour son temps et son pays.

L'intérêt de ses écrits est surtout de montrer jusqu'où étaient tombés les héritiers dégénérés du nom hellène, ceux-là même qui avaient alors Diophante entre leurs mains.

---

[1] On a une autre preuve frappante de ce maintien de la vieille tradition dans la *Géométrie* de Jean Pediasimos (éd. Friedlein, 1866) contemporain de Rhabdas. Il est beaucoup plus fidèle en fait aux suites de quantièmes que les rédacteurs de la collection héronienne.

V.

Je reviens sur le procédé indiqué par Rhabdas pour l'extraction de la racine carrée ; c'est de fait le seul que nous trouvions chez un auteur grec pour la détermination de nombres fractionnaires approchés d'une racine incommensurable. Il est d'ailleurs clair que, si Rhabdas se limite à une approximation du second degré, le procédé peut être indéfiniment poursuivi.

La question de la véritable date de l'invention de ce procédé reste douteuse, car, s'il y a un fait certain, c'est qu'il n'a nullement été appliqué dans les calculs analogues de la collection héronienne, et si M. Ch. Henry (¹) a essayé ici même de l'employer pour la construction des valeurs approchées d'Archimède pour $\sqrt{3}$, cet essai n'a pas été heureux, comme l'a fait remarquer M. Günther dans son important travail *Die quadratische Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden* (²).

Notre savant collaborateur ignorait, dans cette dernière étude, la mention de cette méthode dans Rhabdas ; il l'étudiait comme retrouvée par des contemporains, Oppermann et Alexeïef, et il a établi que la $n^{\text{ième}}$ valeur approximative trouvée par ce procédé est la réduite de rang 2^n du développement de la racine en fractions continues.

M. Günther a, d'ailleurs, constaté l'identité de principe de la méthode d'Alexeïef avec celle donnée par M. Bertrand dans son *Traité d'Arithmétique*, p. 287, et avec celle déjà développée antérieurement par Buzenzeiger; il a enfin rappelé qu'elle était

---

(¹) Tome III, p. 515 et suiv. Des deux valeurs en question, celle par défaut $\frac{265}{153}$ est absolument irréductible à ce procédé; pour celle par excès, on a

$$\frac{1351}{780} = \frac{1}{2}\left(\frac{26}{15} + \frac{45}{26}\right) \quad \text{et} \quad \frac{26}{15} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} + \frac{9}{5}\right).$$

Mais $\frac{5}{3}$ est irréductible, et n'est pas d'ailleurs une approximation dont on puisse montrer l'existence chez les Grecs, comme je me suis laissé allé à le dire ailleurs (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, IV$_2$, p. 322).

(²) *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, IV.

connue dès le xve siècle en Italie, et qu'elle se trouve de fait dans Lucas Pacioli.

M. Heiberg a remarqué depuis que cette même méthode est indiquée dans la *Logistique* du moine Barlaam (livre II, prop. 39). Il n'est guère douteux que cette *Logistique* ne soit antérieure à la lettre de Rhabdas à Tzavoukhe ; c'est par conséquent le plus ancien Ouvrage actuellement connu où cette méthode apparaisse.

Cependant il faut remarquer que Rhabdas ne paraît nullement l'avoir empruntée à Barlaam ; la *Logistique* de ce dernier, pastiche des livres arithmétiques d'Euclide, est essentiellement différente comme forme et comme ordre d'idées des écrits de Rhabdas, et d'ailleurs Barlaam indique expressément, au contraire de Rhabdas, que le procédé peut être indéfiniment poursuivi. Le témoignage de Rhabdas reste donc précieux en ce qu'il indique que la méthode était de son temps connue des calculateurs byzantins, tandis que les rapports que Barlaam a eus avec l'Italie pourraient faire demander si ce n'est pas dans ce dernier pays qu'il en aurait eu connaissance. Il semble, au contraire, probable, jusqu'à nouvel argument, que c'est de Barlaam que vient la connaissance de la méthode chez les Italiens du xve siècle.

Que d'ailleurs Barlaam n'en soit pas l'inventeur, il ne peut guère y avoir de doutes à cet égard ; il se pose uniquement dans sa Préface comme ayant pour but de démontrer les principes des règles de calcul suivies de son temps, en particulier par les astronomes, qui ont toujours été les plus grands calculateurs. La méthode est donc, sans doute, antérieure au xive siècle et il s'agirait d'en retrouver des traces à une époque plus reculée, soit chez les Grecs, soit chez les Occidentaux, soit chez les Arabes.

Il est essentiel de remarquer, en tous cas, que Barlaam, de même que Rhabdas, suppose que l'on parte, comme première approximation de $\sqrt{A}$, de la relation

$$X_1 = a + \frac{r}{2a},$$

approximation qui appartient, à n'en pas douter, aux Grecs de l'époque classique. Si l'on prend

$$x_0 = a \quad \text{et} \quad X_0 = \frac{A}{a} = a + \frac{r}{a}$$

comme approximation précédente, il est clair que X_1 est la moyenne arithmétique de X_0 et x_0, et que x_1 est leur moyenne harmonique. L'essence du procédé est d'ailleurs que les deux approximations du même degré, l'une par défaut, l'autre par excès, donnent A pour produit,

$$X_n x_n = A = a^2 + r;$$

X_{n+1} et x_{n+1} seront respectivement la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique de X_n et x_n.

Mais Barlaam, pas plus que Rhabdas, ne parle de moyenne harmonique.

La découverte de textes plus anciens que Barlaam et enseignant expressément son procédé ne semble guère devoir être espérée; mais on a un certain nombre de racines approchées, remontant à diverses époques éloignées et dont le mode de calcul n'est pas déterminé : on peut donc essayer de reconnaître si ce procédé a pu servir à les calculer.

Soit $\frac{p}{q}$ une approximation de $\sqrt{A}$; on peut la supposer par excès, sauf à lui substituer $\frac{Aq}{p}$. Soit donc $\frac{p^2}{q^2} = A + R$.

Les valeurs de l'approximation précédente seront, par excès, $\frac{p}{q} + \sqrt{R}$; par défaut, $\frac{p}{q} - \sqrt{R}$.

Ainsi, toutes les fois que R ne sera pas un carré parfait, on sera certain que l'approximation n'aura point été obtenue par le procédé de Barlaam.

Si l'on peut réduire l'approximation à une précédente, on doit poursuivre la réduction; si l'on n'arrive pas finalement à une approximation de la forme $a + \frac{r}{2a}$, on devra encore considérer la racine comme obtenue par un procédé différent.

SUR UNE CERTAINE COURBE DU QUATRIÈME ORDRE DOUÉE DE TROIS POINTS DOUBLES [1];

PAR M. SCHOUTE,
Professeur à l'Université de Groningue.

Pour analyser ce Mémoire, nous nous bornerons à énoncer les lemmes et théorèmes qu'il renferme.

1. OA et OB sont les asymptotes d'une hyperbole équilatère; P et Q sont deux points de cette courbe. Si l'on construit un rectangle dont PQ est une diagonale et dont les côtés sont parallèles à OA et à OB, la seconde diagonale passe par le point O.

Réciproquement, si deux points P et Q sont situés par rapport à deux axes rectangulaires OA et OB, de manière que la deuxième diagonale du rectangle PQ dont les côtés sont parallèles à OA, OB passe par le point O, les points P et Q se trouvent sur une hyperbole équilatère dont OA et OB sont les asymptotes.

Le rectangle PQ sera nommé *rectangle asymptotique,* et l'hyperbole équilatère sera désignée par le symbole

$$H(OA, OB; P, Q, \ldots).$$

2. La tangente en P à H(OA, OB; P) est la droite antiparallèle de OP par rapport à OA et OB.

3. On trouve deux points de la tangente en P à H(OA, OB; P) en prolongeant PR et PS (R et S sont deux sommets du rectangle asymptotique PRQS) de longueurs RT, SU, égales respectivement à PR et PS, et en prenant les points d'intersection V de OT et SQ et W de OU et RQ.

Réciproquement, si les points P et Q sont situés par rapport à deux axes rectangulaires OA et OB, de manière que les points V et W obtenus comme ci-dessus sont en ligne droite avec P, le point Q se trouve sur H(OA, OB; P) et la droite PVW est tangente en P à cette courbe.

---

[1] *Over een bijzondere kromme van den vierden graad met drie dubbelpunten*, door P.-H. Schoute.

4. Par le centre M d'une conique K, les points à l'infini A et B de ses axes et un point quelconque P_1 de K, on peut faire passer quatre coniques tangentes à K en un point différent de P_1. Les quatre points de contact avec K de ces quatre hyperboles équilatères se trouvent sur une même hyperbole équilatère. Si P_2 est le point diamétralement opposé à P_1, cette hyperbole équilatère est $H(P_2A, P_2B; M)$. Chacune des quatre coniques coupe K en un quatrième point qui est situé sur la tangente à $H(P_2A, P_2B; M)$ menée par le point de contact de la conique correspondante avec K.

5. La développée d'une conique à centre est une courbe C_4^6 du sixième ordre et de la quatrième classe. Les tangentes à cette courbe aux quatre points où elle est coupée par une de ses tangentes concourent en un même point.

6. Lorsque le point P_1 parcourt la conique K, l'hyperbole équilatère $H(P_2A, P_2B; M)$, qui coupe K aux quatre points de contact des hyperboles du faisceau (M, A, B, P_1), enveloppe une C^4 dont les points M, A, B sont des points doubles. Les tangentes en ces points à C^4 sont tangentes à K.

7. Par un point quelconque P_1 d'une conique quelconque C^2 passent quatre coniques circonscrites à un triangle donné ABC conjugué par rapport à C_2 et, en outre, tangentes à C_2. Les points de contact de ces quatre coniques se trouvent sur une conique C_r^2 circonscrite à ABC. Le point de Brianchon par rapport au triangle circonscrit à C_r^2 dont les points de contact sont A, B, C est le point P_1. Lorsque P_1 parcourt C_2, la conique C_r^2 des points de contact enveloppe une courbe C^4 dont A, B, C sont des points doubles, les tangentes en ces points doubles étant des tangentes d'inflexion, tangentes en outre à C_2.

8. Si une courbe C^4 du quatrième ordre a trois points doubles et si les six tangentes en ces trois points sont des tangentes d'inflexion, cette courbe jouit des propriétés suivantes. Les points de contact des quatre tangentes à C_4 que l'on peut mener par un de ses points P se trouvent sur une droite l. Lorsque P parcourt la courbe C_4, la droite l enveloppe une conique; le triangle formé

par les points doubles de C_4 est conjugué à cette conique; en outre, les trois couples de tangentes à C_4 en ses points doubles sont tangentes à cette conique (extension d'un théorème sur la lemniscate démontré par M. Emile Weyr, professeur à Vienne).

9. Si une courbe K^4 de la quatrième classe a quatre tangentes doubles et si les points de contact de ces tangentes sont des points de rebroussement, elle jouit des propriétés suivantes. Les tangentes à C_4 aux quatre points d'intersection de la courbe et d'une de ses tangentes l concourent en un même point P. Quand la droite l tourne autour de C_4 en l'enveloppant, le point P décrit une conique; le triangle formé par les tangentes doubles de C_4 est conjugué à cette conique qui passe, en outre, par les points de rebroussement situés sur ces tangentes.

10. Le Mémoire est terminé par quelques remarques sur des propriétés de la courbe C^4 établies géométriquement par M. Kupper, professeur à Prague. E.-D. W.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GUICHARD (C.). — Théorie des points singuliers essentiels. — Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris. 98 pages in-4°; 1883.

La première Partie du travail de M. Guichard a pour objet la théorie générale des fonctions qui ont des points essentiels, et la classification des fonctions uniformes et des points singuliers. L'auteur prend pour point de départ le théorème de Laurent, qui permet de décomposer une fonction $\Pi(z)$, holomorphe dans l'espace annulaire compris entre deux cercles C et C′ ayant pour centre commun l'origine, en une somme de deux séries $Q(z)$, $P\left(\frac{1}{z}\right)$, ordonnées suivant les puissances positives et négatives de la variable. Il existe une fonction $P_1\left(\frac{1}{z}\right)$, uniforme dans tout le plan qui coïncide avec la série $P\left(\frac{1}{z}\right)$ dans toute l'étendue où elle est convergente. En dehors du cercle intérieur C, cette fonction est représentée par la série $P\left(\frac{1}{z}\right)$, et dans ce cercle par la différence $\Pi(z) - Q(z)$. $P_1\left(\frac{1}{z}\right)$ sera la *fonction caractéristique* du point singulier $z = 0$, et l'on dira que deux fonctions ont le point $z = 0$ pour point singulier de même espèce, quand la différence de ces deux fonctions et par suite des fonctions caractéristiques correspondantes est holomorphe près du point zéro.

Un nouveau théorème, corrélatif de celui de Laurent, permet à M. Guichard d'aborder sous un autre point de vue la théorie des points singuliers : *Toute fonction, holomorphe entre deux cercles* C *et* C′ *ayant pour centre l'origine, est égale dans cette étendue au produit de deux séries, contenant l'une les puissances positives, l'autre les puissances négatives de* z *;*

$$\Pi(z) = z^n q(z) p\left(\frac{1}{z}\right).$$

Il existe une fonction $p_1\left(\frac{1}{z}\right)$, uniforme dans tout le plan, qui coïncide avec la série p en dehors du cercle intérieur C. L'expo-

sant entier n peut être choisi de façon que le premier terme de $p_1\left(\frac{1}{z}\right)$ soit indépendant de $\left(\frac{1}{z}\right)$: la fonction $z^n p_1\left(\frac{1}{z}\right)$ caractérise alors les zéros et les points singuliers situés à l'intérieur de C. M. Guichard l'appelle encore *fonction caractéristique*. De là une nouvelle définition de l'espèce d'un point singulier : deux fonctions ont l'origine pour point singulier de même espèce, lorsque leur quotient, et par suite celui des fonctions caractéristiques correspondantes, est holomorphe au voisinage de l'origine. Cette définition ne concorde pas avec la première : il est impossible que deux fonctions différentes aient l'origine comme point singulier de même espèce dans les deux modes de décomposition.

Le théorème de M. Mittag-Leffler s'étend à tous les points singuliers, définis par la décomposition de la fonction en une somme de deux séries : M. Guichard l'énonce dans sa pleine généralité. A ce théorème correspond une proposition analogue pour la décomposition en un produit de deux séries : cette proposition donne le moyen de décomposer une fonction uniforme en un produit de facteurs primaires contenant soit un zéro, soit un pôle, soit un point essentiel, à distance finie, au plus.

M. Guichard fait marcher de pair la classification des points singuliers et celle des fonctions uniformes. Un point singulier sera de *première classe*, quand la fonction $P_1\left(\frac{1}{z}\right)$ ou $p_1\left(\frac{1}{z}\right)$ qui définit l'espèce du point singulier est holomorphe dans tout le plan, sauf au point $z = 0$. Ces deux définitions, qui correspondent à la décomposition en somme et à la décomposition en produit, conduisent au même résultat. Une fonction uniforme, qui a des points singuliers, sera dite de première classe quand tous ses points singuliers sont de première classe. Le point infini d'une fonction de première classe dont les points singuliers sont en nombre illimité est un point singulier de *deuxième classe*. En général, le point a sera un point singulier de deuxième classe, quand les fonctions $P\left(\frac{1}{z-a}\right)$, $p\left(\frac{1}{z-a}\right)$ sont telles que $P(z-a)$, $p(z-a)$ soient des fonctions uniformes de première classe, ayant une infinité de points singuliers. Une fonction uniforme est de *deuxième classe* quand elle n'a que des points singuliers de première et de deuxième classe. Le point infini d'une fonction

uniforme de deuxième classe définit le point singulier de *troisième classe*. En continuant ainsi, on arrive à classer de proche en proche les fonctions uniformes et les points singuliers. Cette classification met en évidence cette double propriété fondamentale des fonctions uniformes : 1° *Toute fonction, de classe n dans une étendue limitée, a dans cette étendue un nombre fini de points singuliers de classe n;* 2° *si une fonction est de classe n sur toute la sphère, le nombre de ses points singuliers de classe n est limité.*

Tous les points singuliers et toutes les fonctions uniformes ne rentrent pas dans la classification précédente. On peut, en effet, former, d'après le théorème de M. Mittag-Leffler, une fonction ayant les points singuliers 1, 2, ..., n d'espèces P_1, P_2, ..., P_n, $P_n\left(\frac{1}{z-n}\right)$ définissant un point singulier de classe n. Cette fonction ne reste dans aucune des classes précédemment énumérées : on dit qu'elle est du *deuxième genre*. Son point infini constitue une nouvelle espèce de discontinuité, que M. Mittag-Leffler appelle un point singulier du *deuxième genre*. Les points singuliers et les fonctions uniformes du deuxième genre se divisent à leur tour en classe, jouissant de la double propriété fondamentale signalée pour les points et les fonctions du premier genre. Si l'on forme une fonction uniforme ayant le point 1 comme point singulier de classe 1, le point 2 comme point singulier de classe 2, ..., le point n comme point singulier de classe n, le point infini d'une telle fonction est une singularité nouvelle, que M. Guichard appelle point singulier du *troisième genre*, et ainsi de suite.

Mais la classification par genres ne suffit pas encore. Il y a lieu de grouper les fonctions uniformes et les points singuliers en *familles*, comprenant chacune une infinité de genres. On pourra former une suite illimitée de familles; on n'aura pas encore formé toutes les fonctions et tous les points singuliers possibles : on peut continuer ainsi indéfiniment.

Dans la deuxième Partie de son travail, l'auteur étudie les fonctions simplement périodiques qui ont des points singuliers essentiels. Il les obtient d'abord sous la forme de produits ou de sommes de termes primaires, puis sous la forme de développements en série qui les représentent d'une façon plus simple.

La dernière Partie est consacrée à l'étude des fonctions doublement périodiques. M. Guichard forme d'abord des fonctions intermédiaires qui jouent dans cette théorie un rôle analogue à celui des fonctions θ dans la théorie des fonctions doublement périodiques méromorphes. En employant la méthode indiquée par M. Appell (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 3 avril 1882), on arrive à développer ces fonctions intermédiaires en séries. Avec ces fonctions intermédiaires, on peut former des fonctions doublement périodiques. En cherchant les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse former une telle fonction, quand l'espèce et la position de ses points singuliers sont données, l'auteur parvient à généraliser un certain nombre de théorèmes relatifs aux fonctions méromorphes doublement périodiques. La méthode de décomposition en sommes généralise le théorème des résidus; la méthode de décomposition en produits généralise les théorèmes de Liouville. Au lieu de passer par l'intermédiaire des fonctions simplement périodiques, on peut arriver directement à la double périodicité par la considération de sommes et de produits doublement infinis. C'est ainsi que M. Guichard étend aux fonctions périodiques les plus générales les résultats obtenus par M. Cayley dans sa théorie des fonctions doublement périodiques méromorphes.

RADAU (R.). — Sur les développements de l'expression $(1 - 2\alpha z + \alpha^2)^{-k}$ (*Annales de l'Observatoire de Paris*, Partie théorique, t. XVIII). Paris, 1883, in-4° de 20 p.

Les fonctions $P^{n,k}$ qui naissent du développement de

$$(1 - 2\alpha z + \alpha^2)^{-k},$$

suivant les puissances ascendantes de α, ont été déjà étudiées par un grand nombre de géomètres. Le travail que nous avons sous les yeux se rattache aux recherches de M. Tisserand sur les formes que prend ce développement lorsqu'on fait

$$z = \mu \cos x + \nu \cos y, \quad \mu + \nu = 1 \quad \text{et} \quad P^{n,k} = 4 \Sigma \mu^i \nu^j A_{i,j}^{n,k} \cos ix \cos jy.$$

L'auteur commence par démontrer d'une façon nouvelle que,

pour $k = \frac{1}{2}$, les coefficients A s'expriment par des séries hypergéométriques, et, pour $k = 1$, par les carrés d'autres séries hypergéométriques, comme l'avait déjà trouvé M. Tisserand. En posant

$$n = i + j + 2f,$$

on a, en effet,

$$A_{i,j}^{n,\frac{1}{2}} = F(-2f, 2n - 2f + 1, 2j + 1, \nu),$$
$$A_{i,j}^{n,1} = F^2(-f, n - f + 1, j + 1, \nu),$$

et ces développements fournissent aussi les coefficients cherchés pour $k = -\frac{1}{2}$ et pour $k = 0$. Dans le cas général, $A^{n,2k+1}$ peut encore se déduire de $A^{n,k}$ (excepté pour $k = \frac{1}{2}$).

Après avoir formé, en passant, l'équation différentielle du troisième ordre que vérifient les coefficients $A^{n,k}$, l'auteur établit l'expression générale de ces coefficients sous forme de trinôme hypergéométrique

$$A_{i,j}^{n,k} = \frac{(k,1)^n}{i!\,j!\,f!}\left(\frac{\mu^2}{i+1,1} + \frac{\nu^2}{j+1,1} - \frac{1}{k+n-1,-1}\right)^f,$$

formule dont le développement donne la série hypergéométrique à deux variables de M. Appell. La notation employée est celle des factorielles de Vandermonde, qui permet d'écrire la série hypergéométrique ordinaire sous la forme d'un binôme

$$F(-n, \beta, \gamma, x) = \left(1 - \frac{\beta,1}{\gamma,1}x\right)^n.$$

L'auteur donne ensuite des expressions nouvelles des coefficients $B_{i,j}^{(k)} = \Sigma\alpha^n A_{i,j}^{n,k}$ du développement

$$(1 - 2\alpha z + \alpha^2)^{-k} = 4\Sigma B_{i,j}^{(k)}\mu^i\nu^j\cos ix\cos jy.$$

Puis, reprenant les coefficients A, il les développe suivant les puissances ascendantes de ν, et il réussit à les représenter, d'une part au moyen d'une suite de binômes (ou séries) hypergéométriques du premier ordre, et de l'autre par une suite de binômes hypergéométriques d'ordre supérieur, qui, en apparence plus compliquée que la première, fournit cependant l'expression la plus simple des coefficients cherchés, et conduit immédiatement aux formes déjà trouvées pour $k = \frac{1}{2}$ et pour $k = 1$. On obtient des résultats analogues en développant suivant les puissances descendantes de ν.

MÉLANGES.

SUR UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE FERMAT, ET SES RAPPORTS AVEC LA THÉORIE DES SUBSTITUTIONS UNIFORMES;

PAR M. G. KOENIGS,
Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.

Dans la séance du 16 avril 1883, M. Picquet a présenté à l'Académie des Sciences une Note qui contient une généralisation du théorème de Fermat, Note qui a été ensuite l'objet de deux Communications de MM. É. Lucas et Pellet. Les recherches sur les substitutions uniformes, dont les premiers résultats ont été publiés dans le *Bulletin* (2e série, t. VII), m'ont conduit à ce même théorème, tout en me donnant une signification très générale de la fonction numérique qui figure dans son énoncé.

Désignant par $\varphi(z)$ une fonction uniforme et représentant par $\varphi_n(z)$ l'opération $\varphi(z)$, n fois répétée, j'envisage les équations E_n de la forme

$$z - \varphi_n(z) = 0.$$

A l'égard de ces équations j'ai démontré les théorèmes suivants :

1° *Si n' divise n, toute racine de $E_{n'}$ vérifie E_n.*

2° *Si d est le plus grand commun diviseur des entiers n et n', l'ensemble des racines communes à $E_{n'}$ et E_n se compose des racines de E_d.*

Il suit de là que les racines de E_n se divisent en deux catégories : les unes vérifient des équations d'indice inférieur à n, les autres ne vérifient aucune équation d'indice inférieur, et de celles-là je dis qu'elles *appartiennent* à l'indice n. Les racines de E_n qui n'appartiennent pas à l'indice n appartiennent à des indices qui divisent n.

Maintenant, si la quantité x appartient à l'indice n, j'ai démontré qu'il en était de même des n quantités

$$x, \varphi(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x),$$

que la substitution uniforme $[z, \varphi(z)]$ permute circulairement.

Il en résulte que les racines appartenant à l'indice n se distribuent en groupes circulaires de n racines. Donc, s'il arrive que le nombre des racines appartenant à l'indice n soit fini, *ce nombre doit être divisible par n.*

Ce théorème comprend celui que M. Picquet a démontré.

Prenons, en effet, pour $\varphi(z)$ une fraction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur soient des polynômes entiers du degré m. L'équation E_n est du degré $m^n + 1$. Le nombre des racines appartenant à l'indice n, et que je représente par $H(m, n)$, est donc fini ; il doit être divisible par n.

Or les $m^n + 1$ racines de E_n se composent de toutes les racines qui appartiennent à l'indice n ou à des indices diviseurs de n : on a donc, en mettant en évidence les facteurs premiers de n,

$$n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda,$$

$$m^n + 1 = \sum_{\xi=0}^{\xi=\alpha} \sum_{\eta=0}^{\eta=\beta} \sum_{\zeta=0}^{\zeta=\gamma} \ldots \sum_{\omega=0}^{\omega=\lambda} H(m, a^\xi b^\eta c^\zeta \ldots l^\omega);$$

changeons α en $(\alpha - 1)$, nous aurons, en retranchant l'expression ainsi obtenue de la précédente,

$$m^n - m^{\frac{n}{a}} = \sum_{\eta=0}^{\eta=\beta} \sum_{\zeta=0}^{\zeta=\gamma} \ldots \sum_{\omega=0}^{\omega=\lambda} H(m, a^\alpha b^\eta c^\zeta \ldots l^\omega);$$

faisons de même en changeant cette fois β en $(\beta - 1)$, il vient

$$m^n - m^{\frac{n}{a}} - m^{\frac{n}{b}} + m^{\frac{n}{ab}} = \sum_{\zeta=0}^{\zeta=\gamma} \ldots \sum_{\omega=0}^{\omega=\lambda} H(m, a^\alpha b^\beta c^\zeta \ldots l^\omega).$$

On continuerait aisément de la sorte jusqu'à avoir

$$m^n - \Sigma m^{\frac{n}{a}} + \Sigma m^{\frac{n}{ab}} - \Sigma m^{\frac{n}{abc}} \ldots = H(m, a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda) = H(m, n).$$

Ainsi, la fonction numérique qui figure dans le théorème démontré par M. Picquet exprime le nombre de racines qui appartiennent à l'indice n dans le cas d'une fraction rationnelle du degré m. Le fait que ce nombre est divisible par n résulte immédiatement de la remarque que j'ai faite au début, et le quotient représente le nombre des groupes circulaires de n racines.

On voit que, s'il existe d'autres cas où le nombre des racines appartenant à un *indice donné n* est fini, on obtient un théorème analogue à mon point de vue, mais qui, au point de vue arithmétique, peut être très différent de celui que M. Picquet a démontré. Néanmoins il m'a été impossible jusqu'ici de trouver quelque exemple qui ne conduise pas à un théorème rentrant dans celui de M. Picquet.

DOMNINOS DE LARISSA;

Par M. Paul TANNERY.

1. Boissonade a publié, dans le tome IV de ses *Anecdota græca* (p. 413-429), le texte du *Manuel d'introduction arithmétique du philosophe Domninos de Larissa*. Cette publication est restée d'autant plus inaperçue des historiens mathématiques, que l'existence de ce petit Traité dans un manuscrit grec n'avait guère été signalée auparavant que dans les catalogues des bibliothèques, et que le nom de l'auteur a généralement été défiguré dans ces indications (Domnenus, Domnininus, Domnius, Dominus).

Dans son édition de la *Bibliotheca græca* de Fabricius (t. V, p. 648), Harles a émis l'opinion que ce vocable *Domnus* n'était pas un nom propre, mais une appellation honorifique (*dominus*), et que l'auteur du Traité en question était cet Héliodore de Larisse auquel on doit quelques pages *Sur les hypothèses optiques* (1). Tout en rétablissant le véritable nom de Domninos, Boissonade a rappelé cette identification, en faisant remarquer que, dans plusieurs manuscrits des *Optiques*, l'inscription est : « de Damianos [fils] d'Héliodore » (Δαμιανοῦ τοῦ Ἡλιοδώρου).

Si ce rapprochement a quelque valeur, il faut, en tout cas, admettre que le nom de Domninos aurait été corrompu en celui de Damianos, et que ce n'est pas le contraire qui a eu lieu. La person-

(1) Éditées à Florence, 1573; Hambourg, 1610; Paris, 1657; Cambridge, 1670; Pistoie, 1758.

nalité de Damianos ou d'Héliodore est en fait très obscure; un seul point est avéré, c'est que l'auteur des *Optiques* vivait après Ptolémée; Domninos de Larissa (en Syrie, aujourd'hui Kalat-Seijar) nous est au contraire suffisamment connu par l'article que lui consacre Suidas, et qui renferme un assez long extrait de Damascius, aussi bien que par un passage de la *Vie de Proclus* (c. 20), par Marinus.

Domninos était un condisciple de Proclus; leur maître Syrianus les traitait tous deux sur le pied de l'égalité, et ils se partagèrent après sa mort la primauté dans l'École d'Athènes. Leur rivalité, qui se faisait déjà jour sous Syrianus, éclata surtout, semble-t-il, au sujet de l'interprétation des doctrines de Platon et dégénéra en une polémique ouverte, dont Damascius attribue les avantages à Proclus. On peut conjecturer que Domninos céda la place de bonne heure, peut-être pour se retirer à Laodicée de Syrie; il laissa à Athènes la réputation d'un homme entier de caractère et d'idées, et prêtant le flanc, au point de vue hellène, à quelques ridicules sur lesquels insiste Damascius; mais en même temps il lui reconnaît une réelle valeur comme mathématicien et, dans une anecdote, il le montre s'occupant particulièrement d'arithmétique.

Le petit Traité qui nous reste sous le nom de Domninos ne paraît exister que dans deux manuscrits de la Bibliothèque nationale de Paris, 2531 (xve siècle) et 2409 (xvie siècle); le texte du second est d'ailleurs certainement une copie de celui du premier. Le titre de ce Traité se retrouve encore dans deux autres manuscrits (Paris, fonds Coislin, 173, et Venise, Saint-Marc, 318). Mais cette fois il ne précède qu'un fragment relatif à un point tout spécial (la décomposition des rapports numériques); ce fragment est étranger au *Manuel* de Domninos, qui le précède dans notre manuscrit 2531, et l'attribution en est au moins douteuse.

J'ajouterai que le texte établi par Boissonade présente d'assez nombreuses incorrections; le savant helléniste n'était certainement pas assez familiarisé avec les auteurs mathématiques grecs pour donner une édition réellement satisfaisante; mais, comme les matières sont très faciles, et le sens généralement bien clair, les corrections à faire ne présentent pas de difficultés sérieuses.

2. L'intérêt que présente le *Manuel* de Domninos ne doit pas se mesurer à la longueur de l'Ouvrage, qui ne comporte qu'un

petit nombre de pages ; il ne doit pas s'estimer aux matières qu'il renferme : c'est un résumé très clair, mais très concis, assez maigre en somme, des connaissances arithmétiques élémentaires qui rentraient alors dans les programmes de l'éducation philosophique ; nous y apprenons au reste que Domninos avait développé le même sujet dans un *Traité élémentaire d'Arithmétique* (Στοιχείωσις ἀριθμητική), dont nous ne pouvons que regretter la perte.

Mais ce qui mérite d'appeler l'attention sur cet Opuscule, c'est qu'il témoigne d'une tentative sérieuse de réaction contre l'*Introduction arithmétique* de Nicomaque et de retour aux enseignements d'Euclide. Le fait de cette tentative, vers le milieu du ve siècle, dans une ère de pleine décadence scientifique, prouve, de la part de son auteur, une réelle originalité, et me paraît digne d'être mis en lumière. Ce sera au reste une occasion d'éclaircir divers points de détail dans l'histoire de l'Arithmétique théorique chez les Grecs.

Les deux livres de l'*Introduction arithmétique* de Nicomaque, composés vers la fin du 1er siècle de l'ère chrétienne, étaient destinés aux mêmes lecteurs que le *Manuel* de Domninos. Nicomaque n'est pas un mathématicien, et l'on aurait tort de le traiter comme tel : c'est un philosophe qui parle d'Arithmétique en s'adressant à des étudiants en Philosophie; ce qui grossit son Ouvrage, ce sont surtout des digressions, en réalité étrangères à la Science.

Nesselmann, qui l'a au reste sérieusement étudié (*Die Algebra der Griechen*, p. 187-223), porte sur lui un jugement trop favorable. Je ne puis, pour ma part, voir aucun progrès réel, au point de vue scientifique, dans l'abandon de l'appareil géométrique des Livres arithmétiques d'Euclide, quand cet abandon entraîne celui de toute démonstration et quand la théorie est systématiquement réduite au procédé de généralisation par simple induction. Je ne puis admettre aucune originalité propre, en tant que mathématicien, dans un auteur qui se laisse aller à des puérilités dont il me suffira de citer un seul exemple, pour le classer comme un maladroit compilateur.

Après avoir défini la *médiété* sous-contraire à l'harmonique, c'est-à-dire la relation de trois nombres $a > b > c$, tels que

$$\frac{a}{c} = \frac{b-c}{a-b},$$

Nicomaque ajoute : « Il faut remarquer la propriété qui appartient à cette médiété, à savoir que le produit du plus grand terme par le moyen y est double du produit du moyen terme par le plus petit (1). »

Mais, quels qu'aient été les défauts de l'Ouvrage de Nicomaque, il n'en obtint pas moins du premier coup un très grand succès auprès du public auquel il était destiné ; ce succès, constaté par le fait d'une traduction latine presque immédiate (par Apulée de Madaure), et par une plaisanterie de Lucien : « Tu calcules comme Nicomaque de Gérasa », fut limité d'abord au public des philosophes (il est clair que Pappus méprise Nicomaque); mais il devint général quand il n'y eut plus de mathématiciens à proprement parler, mais seulement des philosophes s'occupant accidentellement de Mathématiques. Jamblique, dans la première moitié du IVe siècle, marque le commencement de cette ère de décadence définitive. Voulant exposer les théories arithmétiques suivant l'école pythagoricienne, il ne connaît pas d'autre guide que Nicomaque, et il le paraphrase jusque dans les puérilités comme celle que j'ai relevée, après avoir exalté son Ouvrage dans les termes les plus pompeux (2).

Au temps de Jamblique, Nicomaque était au reste déjà classique pour l'Arithmétique élémentaire (et désormais on n'allait pas plus loin), au même titre qu'Euclide était classique pour la

---

(1) Éd. Hoche, p. 141, l. 16 et suiv. Nicomaque induit cette relation du cas tout particulier de la médiété qu'il donne pour exemple : 3.5.6, sans s'apercevoir que la prétendue propriété qu'il énonce revient simplement à supposer $a = 2c$. Pour la médiété suivante (cinquième), il tombe dans la même absurdité.

(2) Jamblique n'en est pas moins, en fait, beaucoup plus intéressant que Nicomaque pour l'histoire des Mathématiques. Je lui consacrerai une étude spéciale.

J'ai aujourd'hui une remarque spéciale à faire sur une question soulevée par M. Cantor dans les *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (t. I, p. 366) : il dit ne pas savoir où peut avoir été formulée une *regula Nicomachi*, donnée par un écrivain du XIIe siècle, O'Creat, lequel a d'ailleurs puisé à des sources arabes. Cette règle consiste en ce que, si $d = 10 - a$, on a

$$a^2 = 10(a - d) + d^2.$$

Elle me semble déduite de la remarque de l'*Introduction arithmétique* (p. 125, l. 17), que dans une *médiété* arithmétique (par exemple, $10 - a + d$, a, $a - d$), le produit des extrêmes est égal au carré du moyen moins le carré de la différence.

Géométrie. D'ailleurs, lorsqu'ils se trouvent en désaccord pour des définitions, c'est à Nicomaque que Jamblique donne la préférence.

L'âge des commentaires était venu, et tout auteur classique avait désormais droit à être expliqué par le menu. Si le Traité de Jamblique n'est pas, à proprement parler, un véritable commentaire, Eutocius cite un travail d'un certain Héronas qui doit avoir répondu aux besoins de l'époque et qui était sans doute antérieur à Domninos. Après celui-ci, et pour le réfuter aussi sur ce terrain comme sur celui de la philosophie platonicienne, Proclus, qui croyait que l'âme de Nicomaque revivait en lui ([1]), dut au moins ébaucher un commentaire de l'*Introduction arithmétique;* en tout cas, deux disciples de son élève Ammonius, Asclépius de Tralles et Jean Philopon ([2]), composèrent sur un thème commun de longues dissertations, toutes à l'honneur de Nicomaque. Vers le même temps, Boèce en donnait une traduction latine qui assura son influence sur l'Occident pendant le moyen âge; les Arabes enfin le traitèrent comme un classique grec. Ainsi la tentative de réaction de Domninos resta sans effet; il nous reste à donner un aperçu de sa portée.

3. Dès le début du *Manuel,* nous sommes avertis : Nicomaque n'a pas défini l'unité ; Domninos commence par la définition d'Euclide (VII, 1).

Pour la définition du nombre, il n'adopte pas, il est vrai, celle d'Euclide et reproduit une des trois données par Nicomaque; mais

---

([1]) Marinus, *Vita Procli,* c. 28. — Les Ouvrages attribués par Suidas à un autre Proclus (Procléius) et qui comprennent un commentaire sur Nicomaque semblent tous appartenir au disciple de Syrianus; en tout cas, cet autre Proclus, *hiérophante*, ne peut être postérieur à Philopon, comme Hoche l'a supposé. Deux des manuscrits du commentaire de Philopon l'attribuent au philosophe Proclus.

([2]) R. Hoche a publié le texte du commentaire de Philopon (Leipzig, 1864, et Berlin, 1867) dont il existe deux recensions notablement différentes. Il semble aussi y en avoir plusieurs du texte d'Asclépius; en tout cas, celle que renferme le manuscrit grec 2376 de la Bibliothèque nationale est tellement voisine du commentaire publié par Hoche qu'il faut admettre, ce me semble, que non seulement Asclépius et Philopon ont utilisé une rédaction antérieure (de Proclus?), mais encore que l'un des deux a copié l'autre; je crois que le plus ancien des deux commentaires est celui d'Asclépius; celui de Philopon en est comme une nouvelle édition revue, corrigée (parfois à tort), considérablement augmentée et entièrement refondue sur divers points.

c'est la plus ancienne, celle que Jamblique attribue à Thalès, et aussi la plus simple : *un système d'unités*.

Après les définitions les plus simples du pair et de l'impair, viennent leurs subdivisions ; on sait que c'est un des points sur lesquels Nicomaque est le plus en désaccord avec Euclide, et il y a là une question historique qui mérite quelques développements.

Philolaos (fragm. 2) distingue le pair, l'impair et le pair-impair (ἀρτιοπέρισσος), troisième espèce secondaire formée du mélange des deux primordiales. Cette distinction ne peut être entendue qu'en ce sens, que pour Philolaos le pair proprement dit était nécessairement une puissance de 2, et le pair-impair le nombre pair non-puissance de 2. Le point est important, en ce que nous apprenons par là que la subdivision de Nicomaque ne remonte pas jusqu'à l'époque des anciens Pythagoriciens.

Dans le *Parménide* (143 *e*) de Platon se trouvent les expressions d'ἀρτιάκις ἄρτιος, pairement pair (plus littéralement : nombre pair pris un nombre pair de fois), et les correspondantes, pairement impair, impairement pair et impairement impair.

Ce sont les expressions qu'on retrouve dans Euclide, et il n'est pas douteux que le sens qu'elles ont dans Platon ne soit bien celui qu'Euclide leur donne.

« Le nombre pairement pair est celui dont le quotient par un nombre pair est un nombre pair, etc. »

Il est certain qu'il n'y a là aucune tentative de classification réelle ; notamment les expressions de pairement impair et d'impairement pair sont rigoureusement synonymes. Aussi considère-t-on comme interpolée la définition de l'impairement pair qui se trouve dans les manuscrits des *Éléments*. Mais, s'il y a eu interpolation, elle était bien conforme à la pensée d'Euclide qui se proposait simplement, dans ses définitions du Livre VII, d'expliquer une nomenclature en usage de son temps.

Quant à la classification pour Euclide, elle résulte de la suite de ses théorèmes. D'abord l'impairement impair est évidemment isolé (*cf.* IX, 29) ; c'est tout nombre impair non premier. Quant au nombre pair, il peut être :

1° Soit seulement pairement pair (IX, 32), lorsqu'il n'a pas de facteur premier impair ou autrement lorsqu'il est une puissance de 2 ;

2° Soit seulement pairement impair et impairement pair (XX, 33), lorsque sa moitié est impaire, forme $4n + 2$;

3° Soit à la fois pairement pair et pairement impair [et aussi impairement pair (IX, 34)], lorsqu'il est au moins divisible par 4, sans être puissance de 2.

Après Euclide, cette subdivision fut reprise (probablement par quelque néopythagoricien, comme Myonidès ou Euphranor), pour être consacrée par l'adoption de termes spéciaux. La dénomination de *pairement pair* (sans l'addition euclidienne de *seulement*) servit pour les nombres de la première classe; ceux des deux suivantes furent respectivement appelés *pair-impairs* (ἀρτιοπέρισσοι, en reprenant avec une acception différente le terme de Philolaos) et *impair-pairs* (περισσάρτιοι, mot nouveau). C'est la nomenclature que l'on retrouve dans Nicomaque, et elle ne peut être critiquée qu'au point de vue de l'utilité, qui est au moins douteuse.

Il n'en est pas de même de la subdivision des nombres impairs que donne Nicomaque et qui lui appartient très probablement; il veut avoir aussi trois classes pour les nombres impairs, et il les distingue en premiers et non composés, en seconds et composés, et en nombres composés quant à eux-mêmes, mais premiers entre eux.

Les expressions de nombres premiers et composés soit absolument, soit relativement, se trouvent dans Euclide et lui sont évidemment antérieures; mais, pour Euclide comme pour nous, 2 est premier, et les autres nombres pairs sont composés; l'innovation de Nicomaque n'a aucune raison d'être; quant à la troisième classe, elle est simplement ridicule.

Domninos revient en fait, pour les subdivisions du pair et de l'impair, à la nomenclature d'Euclide, avec une seule modification. Il reprend en somme la division de Philolaos, entre les puissances de 2, qu'il appelle nombres *pairement pairs*, comme Nicomaque; et les nombres pairs renferment des facteurs impairs, qu'il appelle *pairement impairs et impairement pairs* (ἀρτιάκις τε περιττοὶ καὶ περιττάκις ἄρτιοι). Il est certain que cette appellation est un argument pour l'authenticité de la définition de l'impairement pair dans Euclide, et qu'on pourrait par suite être conduit à modifier dans les *Éléments* les énoncés des propositions IX, 33 et 34.

conformément aux indications à tirer des citations de Jamblique[1].

Quant aux nombres impairs, Domninos les divise en premiers d'une part, en impairement impairs de l'autre; mais il a soin de remarquer que la classe des nombres premiers contient en outre le nombre 2.

4. Après ces distinctions, nous voyons dans notre auteur le philosophe percer sous l'arithméticien; à la division suivant la *forme*, il oppose celle suivant la *matière*, c'est-à-dire suivant la quotité. Il expose donc l'échelle des unités, dizaines, centaines, milliers, myriades simples, doubles, etc. Mais cette exposition, qui manque d'ailleurs chez Nicomaque, est écourtée comme appartenant proprement à la logistique.

Domninos ne passe pas d'ailleurs immédiatement, comme Nicomaque, à la distinction des nombres parfaits, surabondants, déficients; mais il commence beaucoup plus rationnellement par exposer les relations que peuvent avoir deux nombres.

D'abord, au point de vue de la *forme*, ils peuvent être soit premiers, soit composés entre eux; ensuite, au point de vue de la *matière* (quantité), ils peuvent, soit être égaux, soit avoir une des dix relations d'inégalité qu'a détaillées Nicomaque :

1° Multiples et sous-multiples;

2° Épimores (d'un quantième en sus) et sous-épimores, c'est-à-dire dans le rapport $\frac{n+1}{n}$;

3° Épimères (de plusieurs quantièmes en sus) et sous-épimères, c'est-à-dire dans le rapport $\frac{n+p}{n}$, en supposant $p < n$;

4° Multiples-épimores et sous-multiples épimores, c'est-à-dire dans le rapport $\frac{mn+1}{n}$;

5° Multiples-épimères et sous-multiples-épimères, c'est-à-dire dans le rapport $\frac{mn+p}{n}$.

Cette exposition est faite très nettement, en partant d'un théorème d'Euclide (VII, 4), et beaucoup mieux que dans Nicomaque, où l'on ne voit pas clairement si l'expression d'épimère et sous-

---

(1) *Voir* Heiberg, *Studien über Euklid*, p. 198 et suiv.

épimère n'est pas restreinte aux nombres dans le rapport $\frac{2n-1}{n}$, ce qui résulterait aussi de l'opinion de Jamblique, qui distingue les rapports qui ne peuvent être dénommés que comme étant entre deux nombres.

Domninos passe ensuite à la considération de la relation des nombres avec leurs diviseurs, c'est-à-dire à la distinction des nombres parfaits, surabondants et déficients, qu'il se garde bien de borner avec Nicomaque aux nombres pairs, et dont il signale le caractère artificiel.

Il revient maintenant à la *forme* des nombres, considérés à la fois en eux-mêmes et en relation.

Deux nombres peuvent être premiers absolument et relativement, composés absolument et relativement, composés absolument et premiers relativement; ils peuvent enfin être absolument l'un premier, l'autre composé; alors relativement ils sont premiers, à moins que le nombre premier ne divise le nombre composé.

Vient ensuite (relation de plus de deux nombres eu égard à leur quantité) l'exposition des proportions arithmétique, géométrique, harmonique, en trois termes, avec l'énoncé du théorème que la moyenne géométrique de deux nombres est également moyenne géométrique entre leur moyenne arithmétique et leur moyenne harmonique. Les sept autres médiétés sont écartées comme étant sans intérêt réel.

5. Domninos termine par la figuration géométrique des nombres; il rejette toute la figuration des sommations (nombres polygones et pyramides), et n'admet que la figuration des produits comme seule conforme aux principes d'Euclide et de Platon. Il semble que, au milieu de la décadence où il se trouve, il sente le danger de la confusion des deux figurations et de l'emploi des formules de sommation pour le calcul d'aires géométriques; en était-on déjà venu là dans les Manuels des agrimenseurs, comme plus tard au xe siècle?

En tout cas, Domninos distingue seulement les nombres figurés en *plans* (produits de deux facteurs) et *solides* (produits de trois).

Les plans sont carrés ou allongés (προμήκεις).

Les solides sont cubes, *stélides* (¹) ($a^2 b$, si $b > a$), *plinthides* ($a^2 b$, si $a > b$) ou enfin *bômisques*, si les trois facteurs sont inégaux.

Domninos définit enfin les nombres plans ou solides semblables.

On remarquera que pour le nom plan non carré, il n'adopte pas le terme euclidien d'*hétéromèque*, mais que d'autre part il ne reconnaît pas la classe spéciale des *hétéromèques* de Nicomaque, c'est-à-dire des nombres de la forme $n(n+1)$. Le rejet de cette distinction est d'ailleurs lié à celui de la figuration des sommations (²).

Il est encore intéressant de constater que sur ce point comme pour la division des nombres pairs, Euclide avait suivi les usages de son temps.

Le passage du *Théétète* (³) (147 *d*-148 *b*) de Platon prouve incontestablement que la dénomination de nombre *promèque* (allongé) est due au géomètre sous le nom duquel il a mis son dialogue; dans ce même passage Platon emploie comme synonyme *hétéromèque;* le langage était probablement flottant à cette époque pour la désignation du rectangle en Géométrie; plus tard la seconde dénomination triompha momentanément comme le prouve l'opposition attribuée par Aristote aux pythagoriciens entre le carré et l'*hétéromèque*. Euclide ne connaît pas le nom de *promèque,* qui revient après lui à la suite de la distinction établie entre l'*hétéromèque* et le *promèque*.

Mais ce que Jamblique nous permet de constater, c'est que la théorie qui a donné lieu à cette distinction est bien antérieure et remonte très probablement au delà de Théétète. Il nous apprend en effet que :

1° Les anciens appelaient *semblables* les nombres carrés, et *dissemblables* (ἀνόμοιοι) les *hétéromèques* de Nicomaque; comme d'ailleurs il en expose toute la théorie en employant ces anciens

---

(¹) Le terme ordinaire est *docide* (petite poutre) : *stélide* (petite stèle) se trouve aussi dans Jamblique.

(²) Dans cette figuration, les carrés sont présentés comme sommes des nombres impairs à partir de l'unité, les *hétéromèques* comme sommes des nombres pairs à partir de 2.

(³) Il convient de remarquer que, dans ce passage, la racine du nombre non carré doit être appelée δυναμένη et non δύναμις, suivant la leçon reçue.

termes, il est probable qu'il avait sous les yeux une source véritablement ancienne;

2° Les anciens se servaient du mot *hétéromèque* en Arithmétique dans un tout autre sens. Ils désignaient ainsi, dit-il, les nombres pairs, et ils appelaient *amphimèques* les nombres impairs; la raison qu'il donne de cette terminologie est la suivante : un nombre pair se partage soit en deux nombres impairs, soit en deux nombres pairs, de façon à ne présenter dans la division qu'une des deux espèces de *longueurs* dans les nombres; le nombre impair présente au contraire les deux espèces : il se partage en un pair et un impair.

Je laisse à discuter si cette donnée est de tous points acceptable, et si Jamblique n'a pas fait quelque confusion; l'inversion des épithètes me semblerait plus conforme au génie de la langue grecque, surtout si l'on rapproche de cet ordre d'idées un passage de l'*Euthyphron* (12 *d*) de Platon:

« Si tu me demandais, par exemple, quelle partie du nombre est le pair, quelle sorte de nombre c'est, je te dirais que c'est celui qui n'est pas *scalène,* mais *isoscèle.* »

FACULTÉ DE PARIS,
SUJETS DE COMPOSITIONS DONNÉS AUX EXAMENS DE LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE 1881.

Mécanique. — 1° On considère la surface engendrée par une cycloïde ACB tournant autour de sa base AB. Un point matériel M non pesant est assujetti à rester, dans chacune de ses positions, sur cette surface que l'on suppose parfaitement polie; le point M est soumis à l'action d'une force perpendiculaire à AB dirigée vers AB et dont l'intensité est proportionnelle à la distance r du mobile AB. Déterminer le mouvement et discuter les différents cas qui peuvent se présenter; fixer les limites entre lesquelles r peut varier.

Données : a, diamètre du cercle générateur de la cycloïde; v_0, vi-

tesse initiale; r_0, valeur initiale de r; ε, angle de v_0 avec la tangente au parallèle du point de départ; k, intensité de la force d'attraction exercée sur l'unité de masse placée à la distance 1 de AB.

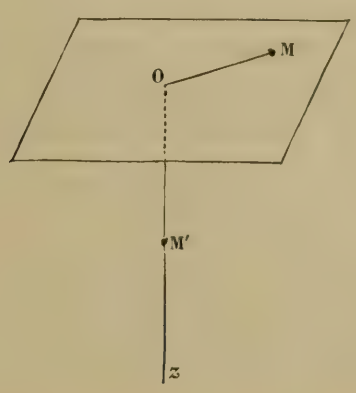
2° Un triangle isoscèle rectangle AOB, de forme invariable et dans lequel le sommet O de l'angle droit est fixe, est animé d'un mouvement quelconque; soient, à un instant quelconque, AA′, BB les vitesses des points A et B. Démontrer que la projection de AA′ sur OB est égale à la projection de BB′ sur AO et que, des deux angles formés, l'un par les directions AA′ et OB, l'autre par les directions BB′ et OA, l'un est aigu et l'autre obtus.

SESSION DE NOVEMBRE 1881.

Analyse (4 heures). — Déterminer les fonctions u, v de deux variables indépendantes x, y dont les différentielles totales vérifient les relations

$$du = (3u + 12v)dx + (2u + 12v)dy,$$
$$dv = (u + 2v)dx + (u + v)dy.$$

Mécanique (4 heures). — 1° On considère deux points matériels M, M′, de masses m et m', que l'on suppose non pesants.



L'un d'eux M est assujetti à demeurer sur un plan P; l'autre M′ à demeurer sur une droite OZ perpendiculaire au plan P. De plus, ces deux points sont reliés par un fil tendu MOM′, de longueur l, qui passe par une petite ouverture pratiquée en O dans le plan P. On demande de déterminer le mouvement de ces deux points, en supposant qu'ils se repoussent proportionnellement à la distance,

la répulsion mutuelle à la distance 1 étant égale à μ. On négligera le frottement et l'on représentera par r_0 la distance du point O à la position centrale M_0 de M, par v_0 la vitesse initiale de M qui sera supposée perpendiculaire à OM_0.

2° Un point M se meut d'un mouvement uniforme sur une hélice tracée sur un cylindre circulaire droit; on demande de démontrer que, toutes les fois que le point M traverse un plan (P), la normale à la trajectoire, située dans ce plan (P), ira passer par un point fixe de ce plan.

On projette le point M sur un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre parallèlement à la tangente à l'hélice au point où elle coupe ce plan. Soit m la projection de M. On construit, à un instant quelconque, la grandeur géométrique mm' qui représente l'accélération du point m. On demande le lieu du point m'. Dans quel cas ce lieu se réduira-t-il à une droite? Quelle est la trajectoire du point m?

Astronomie (2 heures). — Sachant que les coordonnées écliptiques d'un astre sont, à une certaine époque,

$$\lambda = 2^\circ 51' \ 4'',55 \quad \text{(latitude)},$$
$$L = 9^\circ 33' 38'',38.$$

On propose de trouver les coordonnées équatoriales correspondantes. L'obliquité de l'écliptique est supposée égale à

$$23^\circ 27' 32'',935.$$

SESSION DE JUILLET 1882.

Mécanique (4 heures). — 1° Deux points matériels M, M′ de masses m, m' sont fixés aux extrémités d'un fil flexible et inextensible de longueur l qui passe sur une très petite poulie O. Le point M est assujetti à se mouvoir sans frottement sur une courbe plane donnée C dont le plan passe par O. Le point M′ est soumis à une force répulsive émanant du point O inversement proportionnelle au carré de la distance OM′ et dirigée constamment suivant la droite OM′. Étudier le mouvement des deux points M, M′.

On représentera par $\frac{1}{2} m' \mu$ la force répulsive à l'unité de distance. On prendra l'équation de la courbe (C) en coordonnées polaires

sous la forme $\theta = f(r)$, r désignant la distance OM. On suppose nulle la vitesse initiale du point M; celle de M′ sera supposée dirigée dans le plan de la courbe (C) perpendiculairement au rayon vecteur initial et sa grandeur sera représentée par $\sqrt{\frac{\mu}{k}}$, k étant donné.

On ramènera le problème aux quadratures. Trouver en particulier la trajectoire du point M′ lorsque la courbe C est une spirale logarithmique ayant pour pôle le point O.

2° Une circonférence roule sans glisser sur une circonférence fixe de même rayon et l'on considère la courbe fermée décrite pendant un tour complet, par un point de la circonférence mobile.

Trouver le centre de gravité de cette courbe en supposant la densité en chaque point inversement proportionnelle au rayon de courbure de la courbe en ce point.

Astronomie (2 heures). — On donne la distance zénithale apparente de Vénus $z' = 64°43'$ et la parallaxe horizontale $\varpi = 20''$ correspondant à la même distance au centre de la Terre supposée sphérique. On demande la distance zénithale géocentrique.

Vérifier le résultat en déterminant inversement la distance zénithale apparente au moyen de la distance zénithale géocentrique.

Analyse (4 heures). — Soient OX, OY, OZ trois axes rectangulaires. Une surface réglée est engendrée de la manière suivante : le plan ZOA tourne autour de Oz; la génératrice D, située dans ce plan, fait avec Oz un angle constant dont la tangente est λ; elle intercepte sur OC un segment OC égal à $\lambda a \theta$, a désignant une ligne donnée et θ l'angle des plans ZOX, ZOA.

1° Calculer l'expression du volume limité par la surface réglée et les plans XOY, ZOX, ZOA, l'angle θ des deux derniers étant moindre que 2π.

2° Calculer l'aire de la portion de surface limitée par les plans XOY, ZOX, ZOA.

3° Trouver l'équation en coordonnées polaires des projections sur le plan XOY des lignes asymptotiques de la surface.

Géométrie descriptive (2 heures). — Perspective d'un cube

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ reposant par une face ABCD sur le plan horizontal.

Données : On prendra comme point de fuite principal le centre de la feuille.

La ligne d'horizon est parallèle aux petits côtés de la figure.

La ligne de terre est à $0^m,12$ au-dessus de la ligne d'horizon.

La distance principale est de $0^m,14$.

On donne enfin par leurs perspectives deux des sommets du cube situés dans le plan horizontal et appartenant de plus à une même arête AB :

1° (A) à 0,03 à droite du point de fuite principal et à 0,02 au-dessus de la ligne de terre ;

2° (B) à 0,03 à gauche du point de fuite principal et à 0,06 au-dessus de la ligne de terre.

On placera le cube derrière la face verticale $\overline{ABA_1B_1}$.

On dessinera enfin la perspective de la circonférence inscrite dans la face supérieure du cube.

Analyse (4 heures). — Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires et un paraboloïde elliptique défini par l'équation

$$\frac{2z}{c} = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}.$$

1° Calculer la portion de volume limitée par le plan xoy, la surface du paraboloïde et la surface du cylindre dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2° Déterminer les projections sur le plan xoy des trajectoires orthogonales des sections de la surface par les plans qui passent par son axe.

Mécanique (4 heures). — I. On donne un cône de révolution et l'on considère le plan P passant par l'axe du cône et le sommet O. Un point matériel M non pesant est assujetti à se mouvoir sur le cône; dans chacune de ses positions ce point est soumis à l'action d'une force perpendiculaire au plan (P) dirigée vers ce

plan et proportionnelle à la $n^{\text{ième}}$ puissance de la distance z du mobile au plan.

La vitesse initiale v_0 est supposée tangente au parallèle du point de départ :

1° Déterminer le mouvement du point M ;

2° Trouver l'expression de la réaction normale de la surface en fonction de la distance $MO = r$;

3° Effectuer complètement les intégrations dans le cas de $n = 1$.

II. On suppose qu'un plan P soit lié invariablement à un cercle C′ roulant sans glisser sur un cercle fixe C de même rayon; de plus, le point de contact de C et de C′ se meut uniformément sur C.

Trouver pour une position quelconque de P le point de ce plan dont l'accélération est nulle.

Astronomie (2 heures). — En un lieu de la Terre dont la latitude est 38°58′53″ et dont la longitude est est, par rapport au méridien de Paris 48°51′15″, on a observé une étoile qui a 8°31′46″,56 de déclinaison et 79°30′ d'ascension droite absolue, sachant qu'au moment de l'observation la pendule sidérale réglée sur le méridien de Paris marque $22^h 22^m 26^s,76$. On demande la distance zénithale et l'azimut de l'étoile au même moment.

SESSION DE NOVEMBRE 1882.

Analyse. — 1° Intégrer l'équation

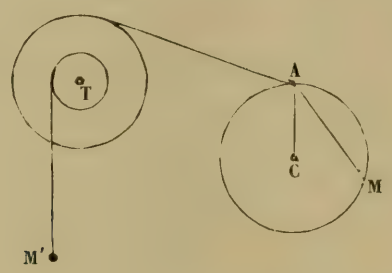
$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 + px + q.$$

2° Déterminer les lignes asymptotiques du tore engendré par un cercle tournant autour d'une de ses tangentes.

Mécanique (4 heures). — I. Un point pesant de masse m est assujetti à rester sur une circonférence verticale C. Ce point est à l'extrémité d'un fil qui passe dans un anneau infiniment mince A, situé au point le plus haut de la circonférence C et qui vient ensuite s'enrouler sur la grande roue d'un treuil T. Le fil enroulé sur la

petite roue de ce treuil porte, à son extrémité, un point pesant M′ de masse m'.

On demande de déterminer le mouvement de ce système. Après avoir traité la question d'une manière générale, on examinera particulièrement le cas où la vitesse initiale du point M serait nulle.



II. Une circonférence C′ de rayon R roule, sans glisser, sur une circonférence fixe de même rayon et le point de contact des deux circonférences se déplace sur C avec une vitesse constante v_0.

On demande quelle est l'accélération d'un point du cercle C′ au moment où il se trouve sur la circonférence C.

Astronomie. — On donne, à un certain instant, l'ascension droite

$$Æ = 6^\circ 33' 29'', 3$$

et la déclinaison

$$\delta = -(16^\circ 22' 35'', 45)$$

d'un astre.

Sachant que l'obliquité de l'écliptique est $23^\circ 27' 31'', 72$, calculer la longitude et la latitude astronomique correspondante.

SESSION DE JUILLET 1883.

Mécanique (4 heures). — 1° Trois points matériels M, M′, M″ non pesants, de masses m, m', m'', assujettis à se mouvoir dans un plan, s'attirent mutuellement, proportionnellement aux masses et à la distance.

1° On demande de déterminer leur mouvement, on prendra pour origine la position initiale G_0 du centre de gravité des trois points et l'on exprimera les coordonnées xy, $x'y'$, $x''y''$ des trois points en fonction du temps et des données qui font connaître la position et les vitesses initiales des trois points.

2° En supposant les vitesses initiales perpendiculaires respectivement aux rayons vecteurs, aboutissant au point G_0 et supposant en outre $m = m' = m''$, on demande quelles relations doivent exister entre les positions et les vitesses initiales, pour que les trajectoires des trois points M, M′, M″ soient trois ellipses égales entre elles.

Cinématique. — 1° On considère un plan lié invariablement à un cercle de rayon R qui roule sans glisser sur un cercle fixe de même rayon. Un point quelconque du plan mobile décrit pendant une révolution complète une circonférence fermée; quel est dans ce plan le lieu des points dont la trajectoire limite une aire donnée A^2?

Astronomie (2 heures). — Le 1er avril 1880, en un lieu qui a 105°30′15″ de longitude est et 48°50′ de latitude, on a observé :

1° L'heure que marquait une pendule sidérale réglée sur Paris, ce qui a donné $5^h 20^m 59^s$;

2° La différence en azimut entre une étoile ayant 272°43′47″ pour ascension droite et 86°36′12″,4 pour déclinaison et un certain signal terrestre situé à l'est de l'étoile, ce qui a donné 25°20′18″,2.

On demande l'azimut du signal.

Analyse (4 heures). — 1° On donne le paraboloïde hyperbolique défini en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$z = \frac{xy}{C},$$

dans laquelle C désigne une constante.

Déterminer les lieux des centres de courbure des sections principales qui correspondent aux divers points de l'axe Ox.

2° On considère les intégrales

$$\int_S \frac{dz}{\sqrt{z^3+1}} \quad \text{et} \quad \int_{S_1} \frac{dz}{\sqrt{z^3+1}},$$

dans lesquelles S et S_1 désignent deux contours formés de la manière suivante.

Le contour S se compose de la droite OA (que l'on fait grandir

indéfiniment) du cercle de centre O et de rayon OA, enfin de la droite AO.

Le contour S_1 est la suite des trois lacets qui enveloppent les points a, b, c, dont les affixes sont les racines de l'équation $z^3 + 1 = 0$. Établir la relation entre les deux intégrales

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^3}},$$

à laquelle on est conduit par cette comparaison.

Épreuve pratique (2 heures). — On donne : 1° une perpendiculaire au plan vertical AA′ sur le grand axe de la feuille, à $0^m,10$ au-dessus du plan horizontal;

2° Une parallèle à la ligne de terre BB′ à $0^m,10$ en avant du plan vertical et $0^m,06$ au-dessus du plan horizontal ;

3° Une circonférence CC′ contenue dans un plan de front; son centre est sur le grand axe de la feuille, à $0^m,06$ en avant du plan vertical et à $0^m,10$ au-dessus du plan horizontal; son rayon est de $0^m,04$.

On demande de trouver le contour apparent horizontal de la surface réglée ayant pour directrice les trois lignes AA′, BB′, CC′. On indiquera à l'encre les constructions nécessaires pour trouver un point de cette courbe.

La surface est supposée opaque, prolongée indéfiniment, les plans de projection transparents.

Analyse (4 heures). — 1° Exprimer sous forme réelle l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{d^5y}{dx^5} + \frac{d^2y}{dx^2} = x.$$

2° Déterminer la courbe C de façon que le rayon de courbure $\mathcal{R}$ en un point quelconque M de cette courbe et l'arc $s = \text{AM}$, compté à partir d'un point fixe A, vérifient la relation

$$s = \frac{\rho^2 + a^2}{a},$$

dans laquelle a désigne une ligne donnée.

Mécanique (4 heures) : 1° *Dynamique.* — Étudier le mouvement d'un disque circulaire homogène pesant, de masse M et de rayon a, situé dans un plan vertical et assujetti à glisser sans frottement sur une circonférence de cercle fixe de centre O et de rayon $R > 2a$ situé dans le plan vertical.

Calculer la pression normale du disque mobile sur la circonférence.

2° *Cinématique.* — Étant donnés dans un plan fixe P un cercle fixe de centre O, et sur la circonférence de ce cercle un point fixe A, le mouvement d'un plan mobile P′ sur le plan P est défini de la manière suivante : une droite BB′ fixe dans le plan P′ passe par le point A pendant qu'un point B fixe sur cette droite décrit la circonférence du cercle O :

1° Trouver dans ce mouvement la base et la roulette;

2° En supposant que le point B décrive la circonférence avec une vitesse constante, trouver pour une position quelconque du plan mobile P′ le point de ce plan, dont l'accélération est nulle.

Astronomie (2 heures). — Dans un lieu dont la latitude est 38°58′53″, on a observé un astre au théodolite en un certain instant, et l'on a trouvé :

Distance zénithale..... $z = 69°42'30''$,
Azimut..... $A = 300°10'38''$.

On demande les valeurs correspondantes de la distance polaire p et de l'angle horaire P.

SESSION DE NOVEMBRE 1883.

Analyse. — 1° On demande de calculer l'intégrale curviligne

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + z + 1}},$$

prise le long du contour OABCDAO, formé de l'axe des x depuis l'origine O jusqu'en A, du cercle ABCDA et de la droite AO, les différentes parties du contour étant parcourues successivement dans l'ordre indiqué par les lettres qui les désignent. On suppose que

OA $= 2$ et que la valeur initiale du radical $\sqrt{z^2 + z + 1}$ est prise égale à 1.

2° Déterminer les trajectoires orthogonales des courbes qui sont les positions successives d'une courbe plane fixe (C) tournant sans changer de forme autour d'un point O de son plan. Application au cas où la courbe (C) est un cercle passant en O.

Mécanique (4 heures). — 1° Une barre pesante et homogène AB est fixée par une de ses extrémités A, et elle peut tourner librement dans l'espace autour de ce point. Un fil fixé à l'extrémité B vient passer dans un anneau infiniment mince situé sur la verticale de A, au-dessus de ce point et à une distance égale à la longueur AB de la barre; il retombe ensuite suivant la verticale OA, portant à son extrémité un poids de masse m.

On demande de trouver le mouvement de la barre.

N. B. — On désignera par $2l$ la longueur et par ρ la masse de l'unité de longueur de la barre; on fera abstraction de la masse du fil.

2° On considère à un instant déterminé un système invariable en mouvement. En prenant dans ce système trois axes de coordonnées rectangulaires dont l'axe des z est l'axe de rotation instantanée, on demande d'écrire les projections sur les axes de la vitesse d'un point quelconque (x, y, z) du système.

Démontrer ensuite à l'aide de ces formules qu'il existe dans un plan quelconque non parallèle à l'axe instantané un point, et un seul, dont la vitesse est perpendiculaire au plan.

Astronomie (2 heures). — On donne la longitude et la latitude d'un astre,

$$L = 9^\circ 32' 47'',94,$$
$$\lambda = -(2^\circ 51' 28'',12).$$

Calculer l'ascension droite et la déclinaison, l'obliquité de l'écliptique étant $\omega = 23^\circ 27' 32'',9$.

SESSION DE JUILLET 1884.

Analyse (4 heures). — 1° Déterminer l'intégrale générale de

l'équation différentielle

$$ax^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy(y-2a)\frac{dy}{dx} - 2y^2(y-2a) = 0.$$

Reconnaître si l'équation a des solutions singulières.

2° Les fonctions $f(z)$, $f'(z)$ sont holomorphes à l'intérieur d'un contour C comprenant l'origine; on demande la valeur de l'intégrale $\int f f'(z) L(z) dz$ prise le long d'un contour C_1 intérieur à C, en partant d'un point déterminé z du contour C_1.

Géométrie descriptive (2 heures). — On donne les deux points

$$\begin{array}{lllll} AA'\ldots & x = & 8, & y = 4, & z = 0^m,10, \\ BB'\ldots & x = & -8, & y = 4, & z = 0^m,10. \end{array}$$

Sur la droite ABA'B' comme base, on construit dans le plan horizontal A'B' un triangle équilatéral ABCA'B'C'. (Le sommet C est en avant.)

On considère :

1° Le cylindre vertical ayant pour base la circonférence inscrite dans le triangle ABC;

2° Le conoïde ayant pour plan directeur le plan horizontal, et pour directrices la verticale C, puis la circonférence décrite sur ABA'B' comme diamètre dans le plan de front AB.

Représenter le solide commun au cylindre et au conoïde.

On expliquera et l'on indiquera à l'encre la construction d'un point de l'intersection, et de la tangente en ce point.

Mécanique (4 heures). — I. Une tige homogène pesante, AB, de longueur l, est suspendue verticalement à un point fixe A; on imprime à cette tige une vitesse angulaire ω_0,

$$\omega_0 = \sqrt{(n+6)\frac{g}{l}},$$

où g désigne la gravité, et n un nombre positif.

1° Déterminer le mouvement de la tige.

Au moment où la tige occupe la position verticale AB', on rend libre l'extrémité A;

2° Déterminer le mouvement de la tige dans cette seconde phase;

3° Déterminer n de manière que les deux extrémités de la tige se trouvent à un même moment sur le plan horizontal mené par le point B.

II. Deux cercles C et C′ de rayon R et R′ peuvent tourner indépendamment l'un de l'autre autour de leur centre commun O.

Le cercle C engrène extérieurement et le cercle C′ intérieurement avec un troisième cercle Γ.

Le cercle C tourne avec la vitesse angulaire ω et le cercle C′ avec la vitesse angulaire ω'; dans ces conditions, le mouvement du cercle Γ est complètement déterminé.

On demande d'abord de calculer la vitesse angulaire avec laquelle se déplace la droite $O\gamma$ joignant le centre fixe O au centre γ du cercle Γ.

On considère ensuite un plan invariablement lié au cercle Γ : trouver à un moment quelconque la position du centre instantané de rotation de ce plan.

Astronomie. — On donne les coordonnées équatoriales d'une étoile, à savoir

$$\mathfrak{D} = -16^\circ 22' 35'',45,$$
$$\mathfrak{A} = 6^\circ 33' 29'',30;$$

on sait que l'obliquité de l'écliptique est

$$\varepsilon = 23^\circ 27' 31'',72.$$

On demande les coordonnées écliptiques, latitude et longitude astronomiques de l'étoile.

Analyse (4 heures). — 1° Calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{[(t-\alpha)^2+\beta^2]^{n+1}},$$

où α, β sont des constantes réelles (n entier);

2° Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces jouissant de la propriété que les tangentes aux deux lignes de courbure en un quelconque de leurs points se projettent sur le plan des xy suivant deux droites dont les coefficients angulaires soient égaux et de signes contraires (c'est-à-dire dont les bissectrices

soient parallèles à Ox et à Oy), déterminer celles de ces surfaces dont l'équation est de la forme

$$z = \varphi(x) + \varphi(y),$$

et intégrer l'équation différentielle de leurs lignes de courbure.

N. B. On suppose les axes rectangulaires.

Mécanique (4 heures). — I. Deux barres homogènes pesantes AB, A'B', de même longueur $2a$ et de même masse M, sont reliées l'une à l'autre par deux fils AA', BB', inextensibles et sans masse de même longueur l; la barre supérieure AB est mobile autour de son milieu O qui est fixe, et le système tout entier est assujetti à se mouvoir dans un plan vertical invariable xOy.

Étudier le mouvement de ce système.

Nota. — On désignera par Mk^2 le moment d'inertie de chaque barre par rapport à son milieu; par θ l'angle que fait la verticale Oy avec la droite OO' joignant les milieux des deux barres, et par φ l'angle que fait la droite OA avec l'horizontale Ox.

II. Un cône C de révolution est fixe; un second cône de révolution C' et de même sommet roule extérieurement sans glisser sur le premier, de telle sorte que la génératrice de contact se déplace sur C d'un mouvement uniforme.

On considère un solide lié invariablement au cône C' : trouver à un moment quelconque les points du solide dont l'accélération est, à ce moment, parallèle à l'axe instantané de rotation.

N. B. — On désignera par α et α' les demi-angles au sommet des cônes C et C'.

Astronomie. — On a trouvé à un certain instant et dans un certain lieu :

La déclinaison du Soleil égale à.....	$23^\circ 26' 8'', 57$
L'ascension droite.....	$5^h 48^m 50^s, 54$

(l'heure valant, comme on sait, 15°).

On demande : 1° l'obliquité vraie ou apparente ε de l'écliptique et la longitude vraie $\odot$ du Soleil.

Sachant, en outre, qu'à l'instant considéré la longitude du nœud de l'orbite lunaire est

$$☊ = 272^\circ 37',4$$

et réduisant les formules de la nutation à

$$\Psi = -17'',24 \sin ☊ - 1'',269 \sin 2 ☉,$$
$$\Omega = 9'',233 \cos ☊ + 0'',55 \cos 2 ☉.$$

On demande : 2° l'obliquité moyenne ε_m de l'écliptique et la longitude $☉_m$ comptée à partir de l'équinoxe moyen du Soleil ([1]).

([1]) On a dû remarquer une notable différence entre les sessions de juillet et de novembre, en ce qui concerne le nombre et la composition des sujets donnés. Les remarques suivantes, faites une fois pour toutes, et destinées surtout à nos lecteurs étrangers, expliquent complètement cette différence. Il y a en juillet trois séries d'examens pour la licence, que nous allons indiquer par ordre de date : 1° les élèves de première année de l'École Normale ont une composition d'Analyse de quatre heures et une épreuve pratique de deux heures (le plus souvent une épure); 2° les élèves de seconde année de la même École ont une composition de Mécanique de quatre heures et une épreuve pratique de deux heures se rapportant à l'Astronomie; 3° tous les autres candidats qui passent la licence en une fois ont une composition d'Analyse de quatre heures, une composition de Mécanique de même durée et une épreuve pratique de deux heures, qui consiste le plus souvent en un calcul astronomique.

En novembre, au contraire, il y a une seule session, consacrée aux candidats qui sont interrogés sur l'ensemble du Programme.

1re P. 5.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

THÈSES DANOISES.

CRONE (C). — On Fladerne af fjorde Orden med Tilbagegangskeglesnit og deres Konturer, med sorligt Hensyn til Realitetsegenskaberne (1). in-8°, 80 pages, Copenhague, 1881.

Les surfaces étant des transformées homographiques de surfaces de révolution, il n'est pas difficile d'en indiquer une génération commode par une conique variable passant par deux points fixes de l'espace. C'est en suivant la variation de cette conique que l'auteur établit les différentes formes des surfaces et leurs propriétés de réalité. Celles-ci présentent quelque intérêt à cause de leur ressemblance avec celles des cubiques planes ; cette analogie est, du reste, une conséquence immédiate du fait que le contour apparent de la surface projetée d'un point de la conique de rebroussement est une cubique.

L'auteur déduit des figures des surfaces celles de leurs contours apparents, le centre de projection étant un point arbitraire de l'espace. Ces dernières courbes sont du sixième ordre ; elles ont huit points de rebroussement, et sont homologiques à elles-mêmes. Leur étude devient intéressante par le fait qu'elles sont les courbes les plus générales du sixième ordre et à huit points de rebroussement. C'est cette circonstance, que l'auteur n'avait pas observée en écrivant sa thèse, qui l'a porté à s'occuper de nouveau des mêmes courbes dans le second Volume des *Acta mathematica*.

(1) Sur les surfaces du quatrième ordre à une conique de rebroussement, et sur leurs contours, en ayant égard aux propriétés de réalité.

VALENTINER (H.). — Bidrag til Rumkurvernes Theori (1). In-8°, 72 pages. Copenhague, 1881.

Comme l'auteur est revenu plus tard sur le même sujet, qu'il a traité d'une manière plus étendue dans le second Volume des *Acta mathematica,* nous nous bornerons à remarquer que le travail actuel a paru avant la publication des Mémoires, couronnés par l'Académie de Berlin, de MM. Halphen et Nöther, dont toutefois les travaux antérieurs ont été utiles à l'auteur, et à indiquer sommairement ce que contiennent les différents Chapitres.

I. Propositions de la Géométrie plane dont on arrive à se servir pour l'étude des courbes gauches algébriques. — II. Représentation des courbes par l'intersection de cônes et de monoïdes. — III. Intersection de courbes et de surfaces; dépendance des points d'intersection entre eux. — IV. Singularités des situations des points doubles apparents. — V. Nombre des conditions servant à déterminer une courbe gauche algébrique.

DREYER (J.-L.-E). — Bidrag til Bestemmelse af Præcessionskonstanten (2). In-8°, 56 pages. Copenhague, 1882.

Après avoir discuté les déterminations de Bessel, Struve et Nyrén, l'auteur entreprend une nouvelle détermination de la constante de précession au moyen de l'Histoire céleste de Lalande et du Catalogue des étoiles de Schjellerup. Il trouve que la constante a été de 50″,2365 en 1880. Cette valeur est plus petite de 0″,0046 seulement que celle qu'on doit à Struve et Peters.

---

(1) Contribution à la théorie des courbes gauches.

(2) Contribution à la détermination de la constante de précession.

MÉLANGES.

EUTOCIUS ET SES CONTEMPORAINS;

PAR M. PAUL TANNERY.

1. Eutocius, le commentateur d'Archimède et d'Apollonius, doit avoir appartenu à une riche famille d'Ascalon qui reconnaissait pour lointain ancêtre un mercenaire thrace du même nom, dont Suidas (*voce* Εὐτόκιος) raconte l'histoire, au reste peu édifiante.

S'il a eu pour maître l'ingénieur Isidore de Milet, l'époque de sa vie doit se placer vers le milieu du VIe siècle de notre ère, comme le remarque M. Heiberg; mais, dans son étude critique sur Eutocius (1), le savant philologue s'est peut-être trop laissé aller à l'opinion commune, qui souffre d'assez graves difficultés.

Le nom d'Isidore de Milet se trouve quatre fois dans les Commentaires d'Eutocius; trois fois, c'est à la fin de chacun des deux Livres *Sur la sphère et le cylindre* et de celui de la *Mesure du cercle;* c'est partout la même formule, qu'il suffira de traduire une fois :

« D'Eutocius d'Ascalon, Commentaire sur la mesure du cercle d'Archimède; l'édition ayant été revue par le mécanicien Isidore de Milet, notre maître. »

Cette formule, qui revient ainsi à la fin des trois premiers commentaires (2) composés par Eutocius, de ceux qu'il a dédiés au philosophe Ammonius, est évidemment très singulière; elle a naturellement été entendue toujours en ce sens qu'Eutocius travaillait sur des éditions d'Archimède revues par son maître, et moi-même j'ai eu déjà l'occasion de l'interpréter ainsi; mais il est peu compréhensible qu'on y trouve « notre maître » à la première personne.

Il me semble qu'en réfléchissant à cette singularité, on trouvera

---

(1) *Jahrbücher für classische Philologie,* t. XI. Tirage à part, Leipzig, Teubner, 1880.

(2) A cet égard, comme sur nombre d'autres points, j'utilise et j'adopte pleinement les conclusions de M. Heiberg.

plausible, à titre d'hypothèse provisoire, l'interprétation suivante : un élève d'Isidore de Milet aura fait, à Constantinople, une édition des trois commentaires dont il s'agit, commentaires publiés à Alexandrie et ayant déjà une certaine date; pour recommander son édition, au lieu d'y inscrire son propre nom, encore obscur il l'aura mentionnée comme revue par son maître, l'architecte de Sainte-Sophie.

Dans cette hypothèse, la quatrième mention d'Isidore de Milet, qui se trouve dans les commentaires d'Eutocius (*Sphère et Cylindre,* II, 2), serait une interpolation de l'éditeur, et de fait elle a bien ce caractère. On la rencontre après l'exposé d'une solution du problème de Délos par Ménechme, au moyen d'une parabole et d'une hyperbole.

« La parabole se décrit avec le *diabètès* inventé par Isidore de Milet, le mécanicien, notre maître, et décrit par lui dans son Commentaire sur les *Camariques* de Héron ([1]). »

Ainsi la relation de disciple à maître entre Eutocius et Isidore est loin d'être suffisamment établie par les textes : il me reste à faire ressortir à quelles difficultés se heurte la croyance à cette relation.

2. Je commencerai par la moins grave de ces difficultés, qui ne laisse pas cependant que d'être déjà assez embarrassante.

Après avoir composé sur les *Équilibres des plans* d'Archimède d'autres commentaires, dédiés à un Pierre, qu'il est impossible d'identifier, mais dont le nom indique en tout cas un personnage chrétien, après avoir fait sur la *Syntaxe* de Ptolémée un travail perdu, Eutocius s'occupa des quatre premiers Livres des *Coniques* d'Apollonius, et dédia cette fois son travail à un Anthémius dans lequel on s'accorde à reconnaître l'ingénieur de Tralles, qui dirigea avec Isidore de Milet la construction de Sainte-Sophie. Or Eutocius dit : « mon cher camarade Anthémius », en sorte que, s'il a été l'élève d'Isidore, il faut nécessairement qu'Anthémius l'ait

---

([1]) *Traité des voûtes.* Comme dans l'opuscule de Héron, sur la *Chirobaliste,* l'expression de καμαρίον est employée techniquement dans la nomenclature de cette arme de guerre, on a émis l'opinion qu'il fallait rattacher à cet objet les *Camariques* commentés par Isidore de Milet : c'est là une conjecture tout à fait invraisemblable.

été également; tout au contraire, dans Procope et dans Agathias, les chroniqueurs qui parlent de la construction de Sainte-Sophie, Anthémius paraît nettement comme l'architecte en premier, Isidore de Milet comme en sous-ordre; les textes cités par M. Heiberg suffisent à le montrer.

Il convient ici de remarquer que comme il y a eu un second Isidore de Milet, neveu du premier, et qui dut arriver au moins à une célébrité égale à celle de son oncle, puisqu'il présida *seul* à la reconstruction de Sainte-Sophie, après le tremblement de terre de 557 (alors qu'Anthémius au moins était déjà mort dès longtemps), nous ne pourrions, dans l'hypothèse que j'ai proposée, savoir au juste quel est l'Isidore des commentaires d'Eutocius, et, pour ma part, je pencherais peut-être à l'identifier avec le neveu.

Dans l'hypothèse contraire, on ne peut évidemment penser qu'au premier, mais la difficulté reste entière; il faut supposer qu'Anthémius a été l'élève d'Isidore, tandis que tous les autres témoignages, malheureusement trop peu nombreux, tendraient plutôt à renverser la relation.

3. Pour se rendre compte maintenant de la seconde difficulté, il importe de préciser des dates. M. Heiberg ne voit rien qui empêche de reconnaître dans l'Ammonius des premiers commentaires sur Archimède le fils d'Hermias, disciple de Proclus, et de fait on ne peut penser à aucun autre philosophe de ce nom. Je chercherai à établir plus loin qu'il est difficile de supposer la vie d'Ammonius prolongée au delà de 510. Eutocius doit donc être né au plus tard une trentaine d'années auparavant, soit vers 480; mais on peut, semble-t-il, faire remonter sa naissance de dix à quinze ans plus tôt, car le commentaire dédié à Anthémius peut bien avoir été écrit avant le commencement de la construction de Sainte-Sophie, c'est-à-dire avant 532.

Dans ces conditions, il faut admettre qu'Eutocius était à peine plus jeune que son prétendu maître Isidore, et il paraît bien plutôt un peu plus âgé que ce dernier et qu'Anthémius, ce qui, pour celui-ci, n'offre d'ailleurs pas de difficultés sérieuses.

Si maintenant on examine les termes de la dédicace à Ammonius, on ne peut méconnaître le langage d'un ancien élève s'adres-

sant à un maître avec lequel il a conservé des relations; Eutocius soumet son travail à Ammonius, dont la compétence était au reste incontestable, comme nous le verrons; il le prie de le corriger s'il est nécessaire, d'arrêter l'édition s'il juge le travail insuffisant, d'exprimer au contraire son approbation, s'il croit devoir l'accorder. Si Eutocius a été l'élève d'Isidore de Milet, comment ne s'adressait-il pas plutôt à ce dernier, pour une pareille dédicace?

Enfin l'éducation mathématique d'Eutocius n'a certainement pu se faire en dehors d'Athènes et d'Alexandrie, les seuls centres scientifiques à cette époque; sa patrie indique qu'il fit au moins la majeure partie de ses études à Alexandrie, où professait Ammonius; mais, ni dans cette ville ni dans Athènes, on ne comprend qu'à cette date, vers 500, Isidore ait professé avec l'appellation de μηχανικός (ingénieur) : ce qu'il peut avoir enseigné à Eutocius, c'est non pas la Mécanique, mais bien la Géométrie; il s'occupait en tout cas d'éditions d'Archimède, et le Livre XV des *Éléments,* dû à l'un de ses élèves, prouve qu'il enseignait aussi la Géométrie d'Euclide. Des travaux spéciaux sur la Mécanique ne pouvaient suffire, surtout au début de sa carrière, pour lui faire reprendre le titre porté par Héron. A Athènes ou à Alexandrie, et à cette date, Isidore de Milet, professeur, aurait dû s'appeler philosophe, comme l'avaient fait Ptolémée et Pappus.

Le titre d'ingénieur se comprend seulement aux côtés d'Anthémius, sous Justinien; les grands travaux publics exécutés par cet empereur amenèrent nécessairement la création de fonctions officielles correspondantes, et la constitution d'une véritable école, dont avant lui on ne voit aucune trace; si dans cette école on veut trouver un nom d'écrivain auquel puisse être attribué le Livre XV des *Éléments,* et la réédition d'Eutocius, on peut par exemple prendre le nom de Leontios, dont il nous reste un petit écrit sur la *Sphère* d'Aratus.

Jusqu'à Justinien, comme nous l'avons dit, l'instruction scientifique était restée le monopole des écoles d'Alexandrie et d'Athènes; Théodose II, en 425, avait bien fondé à Constantinople une sorte d'Université, mais elle semble avoir été surtout littéraire, ou plutôt encore avoir joué le rôle d'un haut séminaire de théologie chrétienne. Les écoles d'Athènes et d'Alexandrie étaient au contraire des foyers de paganisme, comme telles mal vues du

pouvoir. Justinien ferma, au moins temporairement ([1]), celle d'Athènes; celle d'Alexandrie ne subsista évidemment que par suite de compromis qui la rendirent à moitié chrétienne; et l'on peut admettre qu'Eutocius, quelle qu'ait été sa religion au reste, y professa; elle eut encore plus tard Olympiodore (qui observa une comète en août 565) et Étienne d'Alexandrie, qu'Héraclius, grand amateur d'astrologie, devait appeler à sa cour. Il n'en est pas moins clair que Justinien dut favoriser, dans la capitale de son empire, l'enseignement scientifique indispensable pour former les ingénieurs qu'il employait. Cet enseignement amena nécessairement des rééditions d'Ouvrages classiques, et nous voyons ainsi s'expliquer d'elles-mêmes, dans notre hypothèse, des circonstances qui, autrement, semblent au moins singulières.

4. J'ai à revenir sur les circonstances et sur les dates de la vie d'Ammonius; on les connaît surtout par des fragments de son élève Damascius, qui écrivit l'histoire des philosophes de son temps. Ces fragments, malheureusement très confus, nous ont été conservés par Photius et par Suidas; voici ce qu'on peut y démêler pour l'objet qui nous occupe.

Le père d'Ammonius, Hermias, était un condisciple de Proclus, (412-485); il était venu d'Alexandrie à Athènes suivre les leçons de Syrianus qui le maria avec une de ses parentes, Ædésia, après avoir échoué dans son projet de la donner à Proclus. Retourné à Alexandrie, où il professa, Hermias y mourut encore jeune, laissant deux enfants, l'aîné Ammonius, le second Héliodore; sa veuve les amena à Proclus pour lui confier leur éducation; Ammonius fut certainement le meilleur élève de Proclus; Damascius, qui ne l'aime guère, ne l'en déclare pas moins un des premiers géomètres ou astronomes qui aient jamais été; comme arithméticien, sa réputation était encore vivante au temps de Photius; inutile de dire qu'à côté de cela il enseignait la philosophie de Platon et

---

([1]) En 529. On sait que les professeurs tentèrent d'aller s'établir en Perse, mais renoncèrent à leur projet; ils obtinrent néanmoins de ne plus être inquiétés, et il semble bien que Simplicius soit revenu rouvrir son cours à Athènes; mais le coup porté à l'école n'en fut pas moins mortel.

([2]) *Voir* De Stephano Alexandrino, *Hermanni Useneri commentatio*, Bonn, 1880.

d'Aristote : il ne nous reste d'ailleurs de lui que des commentaires philosophiques.

Si Ammonius n'a pas succédé à Proclus à Athènes, c'est évidemment qu'avant la mort de ce dernier il avait déjà été, avec son frère, reprendre la place de son père à l'école d'Alexandrie; c'est là que Damascius suit ses leçons sur Platon et sur Ptolémée, en même temps que celles (de dialectique) d'un autre élève de Proclus, Isidore (de Gaza) (1), qui se trouve subordonné aux deux frères, quoiqu'il semble avoir été plus âgé. Les professeurs païens ont des difficultés avec les patriarches d'Alexandrie, Pierre Mongus (480-489), Athanase (489-496); Isidore est obligé de quitter la ville, et Damascius le suit à Athènes, tandis qu'Ammonius fait les concessions nécessaires.

Il est clair, d'après l'ensemble des dates indiquées, que la naissance d'Ammonius et d'Héliodore peut être placée sans grande erreur entre 440 et 450 ans après J.-C. Nous avons d'ailleurs une précieuse confirmation de cette fixation dans des observations astronomiques dont il me reste à parler.

5. Dans plusieurs manuscrits de Ptolémée (notamment dans le n° 2390 de la Bibliothèque Nationale), la *Syntaxe* est précédée d'un préambule à la suite duquel, sous la mention Ταῦτα ἀπὸ τοῦ ἀντιγράφου τοῦ φιλοσόφου ἔγραψα (2), vient une série de sept observations d'appulses et de conjonctions de planètes, faites à des dates qui répondent aux années suivantes : 1re, 498; 2e, 502; 3e, 475; 4e, 508; 5e, 6e et 7e, 509.

---

(1) C'est cet Isidore dont le regretté Th.-H. Martin, a voulu, après Friedlein, faire le maître de l'auteur du Livre XV des *Éléments*, tandis qu'il a vu, par suite, dans Damascius, l'auteur de ce Livre. Il a mis en avant un argument singulier; l'Isidore du Livre XV est appelé *grand* par son élève; Damascius appelle aussi son maître le *grand* Isidore. Ce nom de grand n'aurait été donné dans toute l'antiquité qu'à un autre philosophe, à Parménide, par Platon. Cette assertion est singulière; il suffit de consulter les index des Ouvrages de cette époque pour reconnaître que l'épithète de grand y est presque banale; si Proclus est plutôt *divin* (θεῖος), Marinus, Simplicius, Olympiodore disent le grand Plotin, le grand Syrianus, le grand Ammonius, etc. Au reste, Isidore n'était nullement mathématicien; j'ai discuté la question ailleurs (*Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux*, 1881), et M. Heiberg a conclu également de son côté que le Livre XV des *Éléments* est d'un élève d'Isidore de Milet.

(2) « J'ai copié ceci sur l'exemplaire du Philosophe ». Ce philosophe est évidemment Héliodore.

La première commence par ces mots « εἶδον Ἡλιόδωρος » (j'ai vu, moi Héliodore); la première personne est encore employée pour le récit de la seconde et de la cinquième observation; et dans la seconde, Héliodore dit qu'il l'a faite avec le concours de « son frère très chéri ». La troisième, qui rompt l'ordre chronologique, est mentionnée comme faite à Athènes, et porte la mention spéciale « τοῦ θείου τήρησις, observation du divin ».

Bouilleau, qui, le premier, a mentionné ces observations dans son *Astronomia philolaica,* a pris θείου pour un nom propre, d'où il suit que, dans l'histoire de l'Astronomie, les sept sont attribuées à un certain Thius et regardées comme ayant été faites à Athènes.

Fabricius a soupçonné déjà que θείου n'était que l'épithète donnée à un philosophe de ce temps; s'il n'avait pas été trompé sur la question de dates par la façon dont Bouilleau a présenté les choses, il aurait certainement reconnu, dans le « divin » vivant à Athènes en 475, le philosophe Proclus. Il est clair d'ailleurs que la troisième observation seule (1) appartient à ce dernier, Héliodore l'ayant notée, à un moment où il en a eu une connaissance exacte, au milieu des observations de même nature faites à Alexandrie par lui, par son frère et peut-être par leurs élèves.

Il est singulier que Bouilleau, qui a utilisé les observations dont il s'agit, n'ait pas soupçonné son erreur, quand il a reconnu que la cinquième (occultation d'Aldébaran par la Lune) ne pouvait avoir été faite à la longitude d'Athènes à l'heure indiquée. En tout cas, les six de 498 à 509 doivent être rapportées à la longitude d'Alexandrie, et il pourrait être intéressant dès lors de reprendre leur discussion.

Ainsi, nous avons en 502 la date d'une observation à laquelle Ammonius (2) a pris part; mais il est clair aussi qu'en voyant clore en 509 une série d'observations de même nature, comme celles dont il s'agit, nous sommes naturellement portés à adopter une date voisine pour celle de la fin de la carrière du plus jeune

---

(1) Si Halma, qui a publié le texte, d'une façon assez incorrecte au reste, dans sa *Chronologie de Ptolémée* (IIe Partie, p. 10-12), a lu τηρήσεις et par suite attribué au prétendu Thius les cinq dernières observations, le manuscrit ne permet aucun doute sur la véritable leçon que Bouilleau avait au reste donnée.

(2) Simplicius témoigne avoir assisté à des observations astronomiques d'Ammonius relatives à la précession des équinoxes.

frère, Héliodore, et par suite aussi de l'aîné, alors que nous obtenons ainsi une parfaite concordance avec tous les autres renseignements historiques que nous possédons.

6. Je vais maintenant essayer de prouver que la naissance d'Eutocius ne doit pas être sensiblement écartée de 480, par cette raison que la rédaction des Commentaires dédiés à Ammonius doit être rapportée aux dernières années de la vie de ce philosophe, ou aux premières années du VIe siècle.

Ammonius, pour l'époque, écrivit relativement peu; mais il eut des élèves qui publièrent ses leçons, et cela en partie de son vivant même. Tels nous apparaissent la plupart des Ouvrages laissés par Asclépius de Tralles, un concitoyen d'Anthémius, et surtout par Jean Philopon.

Jean d'Alexandrie, qui prenait le surnom de « grammairien », mais que la postérité connaît sous celui de Philopon (laborieux), ne doit pas être confondu, comme on l'a souvent fait, avec un Jean Philopon dont parle Photius, et qui fut auteur d'écrits théologiques et condamné comme hérétique dès 578. Quoique ce dernier écrivît encore après 610, il est douteux qu'il ait pu assister à la prise d'Alexandrie par les Arabes en 641, comme le veut l'inadmissible légende sur la destruction de la bibliothèque de cette ville par les conquérants.

En tous cas, le disciple d'Ammonius vivait un siècle plus tôt; son commentaire sur la Physique d'Aristote est de 517; son Traité *Contre les arguments de Proclus en faveur de l'éternité du monde* est un peu postérieur à 529; c'est à peu près sa seule œuvre personnelle et, en tout cas, une de ses dernières; elle lui fut inspirée par ses croyances religieuses, car il était chrétien, et souleva une vive polémique de la part de Simplicius qui, quoique ancien élève d'Ammonius, déclare ne pas connaître personnellement Jean le Grammairien. Il est donc probable que ce dernier était sensiblement plus âgé que lui.

Or, dans son commentaire sur les *Seconds Analytiques* d'Aristote (p. 24), Jean Philopon raconte la légende relative au problème de Délos; il attribue à Platon d'avoir ramené ce problème à l'invention de deux moyennes proportionnelles, et dit que les géomètres contemporains et amis de Platon trouvèrent différentes

solutions, *mais qu'elles sont toutes perdues.* Enfin il en donne une sous le nom d'Apollonius de Perge, qu'il emprunte, dit-il, à un nommé Parménion (¹).

On sait qu'Eutocius a publié, dans son Commentaire sur le second Livre *De la sphère et du cylindre,* des solutions attribuées entre autres à Platon, à Archytas et à Ménechme, qu'il déclare avoir trouvé également celle d'Eudoxe. Il est donc clair, d'une part, que le commentaire précité de Jean Philopon est antérieur à celui d'Eutocius; d'un autre côté, qu'au moment où écrivait le premier, l'*Histoire géométrique* d'Eudème, d'où provient au moins la solution d'Archytas (²), était regardée comme introuvable, soit à Alexandrie, soit à Athènes (³).

La première de ces conclusions suffit pour ma dernière conjecture relative à la date de la naissance d'Eutocius; je vais considérer d'un peu plus près la seconde.

7. Il convient de remarquer qu'en tout cas le Parménion de Philopon n'a pas été utilisé par Eutocius. On sait que ce dernier donne trois solutions du problème de Délos qui sont très voisines, sous les noms d'Apollonius, d'Héron et de Philon de Byzance.

L'intersection du cercle $x^2 + y^2 = ax + by$, et de l'hyperbole $xy = ab$, donne les moyennes proportionnelles

$$x = \sqrt[3]{ab^2}, \quad y = \sqrt[3]{a^2 b}.$$

Ce doit être là le résultat analytique obtenu par Apollonius, si l'on s'en rapporte à Pappus; maintenant, pour éviter la construction de l'hyperbole, on peut se servir d'une de ses propriétés bien

---

(¹) On ne connaît guère sous ce nom qu'un obscur grammairien, et l'inventeur d'un cadran solaire dont parle Vitruve.

(²) Celles d'Eudoxe et de Ménechme devaient venir de la même source, mais d'une seconde main; car la première était trop défigurée pour qu'Eutocius en tirât parti; dans les deux de Ménechme, on a au moins introduit la terminologie d'Apollonius; quant à la solution de Platon, elle est apocryphe.

(³) Si Proclus avait eu entre les mains l'*Histoire* d'Eudème, opinion que j'ai déjà plusieurs fois combattue, il est invraisemblable qu'Ammonius n'en ait pas eu connaissance, et le commentaire de Philopon, ce sont les leçons d'Ammonius. Il est à noter que la légende de Délos se retrouve dans les mêmes termes, sauf précisément la fin, dans le commentaire inédit d'Asclépius sur l'Arithmétique de Nicomaque.

connues et faire mouvoir une règle passant par le point

$$(x = a,\ y = b),$$

commun au cercle et à l'hyperbole, jusqu'à ce que les segments de cette règle interceptés de part et d'autre entre le cercle et les axes coordonnés soient égaux : c'est la solution de Philon et d'Apollonius d'après Parménion; on peut aussi faire mouvoir la règle jusqu'à ce que ses intersections avec les axes soient à égale distance du centre du cercle : c'est la solution de Héron et d'Apollonius d'après Eutocius.

8. Le commentateur d'Archimède avait fait une véritable découverte, ce qui est bien d'accord avec la façon dont il en parle, quoique, dans les termes obscurs qu'il emploie, on sente comme un secret désir de conserver pour lui cette mine précieuse où devaient se trouver d'autres renseignements historiques, et notamment au moins d'importants fragments d'Eudème. Mais il est clair aussi que cette découverte dut exciter une vive curiosité dans le milieu où vivait Eutocius, et qu'il lui fut bien difficile de ne pas la satisfaire en communiquant le ou les manuscrits qu'il avait trouvés. C'est à cela sans doute qu'il fait allusion au début de son Commentaire sur la *Mesure du cercle;* il n'a pas à parler pour le cercle de ceux qui jugeront son œuvre, de la quadrature d'Hippocrate; ceux auxquels il s'adresse ont pu examiner l'*Histoire géométrique* d'Eudème et ont eu communication du *Rucher aristotélique.*

C'est ainsi qu'il désigne les textes qu'il a découverts, et si la conclusion que nous avons tirée du langage de Philopon est exacte, on ne peut guère douter que ces textes ne comprissent le fragment d'Eudème sur la quadrature des lunules; Simplicius, qui peut-être se trouvait à Alexandrie à cette époque, a pu se le procurer ainsi, pour le reproduire plus tard dans ses commentaires sur Aristote.

Mais est-il possible de croire qu'Eutocius ait retrouvé en son entier l'*Histoire* d'Eudème? En aucune façon ; autrement, au début de son commentaire sur Apollonius, il n'eût pas manqué sans doute d'invoquer son autorité relative aux travaux sur les coniques antérieurs à Archimède; au contraire, il n'a sur ces travaux que

de vagues notions tirées de l'étude des écrits d'Archimède lui-même ou des renseignements empruntés à Geminus ([1]).

Eutocius ne paraît en somme avoir possédé de fragments d'Eudème que sur la duplication du cube et la quadrature du cercle, et ces fragments semblent s'être trouvés, avec des extraits d'autres auteurs sur le même sujet, dans une complication qu'il appelle le « Rucher aristotélique » ou simplement le « Rucher » (κήρια). J'ai émis ailleurs ([2]) sur la nature de ce recueil et sur son auteur (un Sporos de Nicée, qui aurait vécu un peu avant Pappus?) des conjectures que M. Heiberg a trouvées insuffisamment fondées; et je ne puis moins faire que de reconnaître qu'elles reposent sur des hypothèses trop multipliées pour pouvoir entraîner un assentiment unanime; en tout cas, je considérais alors le recueil en question comme bien connu à Alexandrie avant Eutocius, et non pas comme retrouvé par lui; la question change ainsi de face et il me semble que mes conjectures en deviennent quelque peu plus plausibles.

9. Je terminerai cette étude par quelques remarques relatives au commentaire d'Eutocius sur les *Coniques* d'Apollonius.

On ne sait guère jusqu'à quel point, dans ses travaux sur Archimède, Eutocius a pu être aidé par des commentaires antérieurs; il déclare lui-même qu'il n'a rien trouvé ayant quelque valeur, et l'on n'a d'ailleurs de traces que d'un commentaire de Théodose de Tripoli sur l'ἐφόδιον ([3]) d'Archimède, sans qu'on puisse savoir ce que c'était que cet ἐφόδιον, un Traité particulier ou une méthode considérée comme digne d'être étudiée à part.

Mais, pour Apollonius, il existait des commentaires de Serenus et d'Hypatia qu'Eutocius a dû utiliser; il est digne de remarque que ces commentaires ne devaient porter que sur les deux premiers Livres; Eutocius déclare expressément sur le troisième qu'il n'a pas trouvé de scolies de quelque valeur d'auteurs précédents;

([1]) Je laisse de côté la *Vie d'Archimède* par Héraclide ou Héracleios (Héraclite?), que d'ailleurs Eutocius ne cite peut-être que de seconde main; mais je remarque qu'à la façon dont cet auteur parle des coniques et d'Apollonius il me paraît difficile d'admettre, comme on l'a fait, que ce soit l'Héraclide qui servait d'intermédiaire entre Archimède et Dosithée.

([2]) *Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux* (t. IV, p. 70-76 et 257-261).

([3]) Proprement, *Provision de route*.

quant au quatrième, il ne l'a pas en réalité commenté; il s'est borné à reproduire quelques variantes des démonstrations qu'il adoptait.

Il suit de là qu'il n'a pas utilisé les lemmes sur les *Coniques,* que donne Pappus dans son Livre VII, lemmes qui sont de fait les matériaux d'un commentaire. Eutocius devait cependant avoir ce Livre à sa disposition, mais il est certain qu'il ne l'a pas étudié.

Le fait est clair si l'on examine ce qu'il dit sur les *lieux* au début du commentaire sur le Livre I. Au lieu de recourir à Pappus, qui l'aurait si sûrement guidé, il commence, voulant définir les lieux, par donner une définition qui est celle du lieu plan en général. Puis il ajoute :

« Les lieux dits *solides* sont ainsi appelés parce que les lignes au moyen desquelles on construit les problèmes qui les concernent sont engendrées par la section de solides, comme les sections du cône et beaucoup d'autres. Il y a aussi d'autres lieux dits *en surface,* ainsi appelés en raison de leur propriété spéciale. »

Sur le second point, il montre seulement son ignorance; mais sur le premier il se met en opposition complète avec la tradition, en étendant au delà des coniques la classe des lieux solides, et il ne paraît pas comprendre pourquoi on les appelle lieux.

J'arrive à un passage obscur qui a appelé l'attention de M. Heiberg et qui soulève de graves difficultés.

Dans la lettre au début du Livre III, Apollonius s'exprime ainsi :

« Le Livre III renferme nombre de théorèmes singuliers utiles pour les synthèses des lieux solides et pour les limitations (des conditions de possibilité des problèmes); la plupart et les plus beaux sont nouveaux ([1]); je les ai imaginés en me rendant compte qu'Euclide n'avait pas en fait effectué la synthèse du lieu à trois et quatre lignes, mais seulement pour une partie arbitrairement choisie, et encore assez malheureusement; c'est qu'il n'est pas possible de faire la synthèse complète sans ce que j'ai trouvé. »

Pappus (Livre VII) commente assez longuement ce passage et explique très nettement ce qu'est le lieu à trois ou quatre lignes, c'est-à-dire le lieu des points tels que le produit de leurs distances

---

([1]) ὧν τὰ πλεῖστα καὶ κάλλιστα ξένα ἃ καὶ, etc. Leçon des manuscrits de la Bibliothèque nationale de Paris, nos 2357 et 2358.

à deux droites données soit égal au carré de leur distance à une troisième ou au produit de leurs distances à deux autres droites données.

Voici maintenant le passage obscur d'Eutocius, d'après les manuscrits de Paris :

Μέμφεται δὲ ἑξῆς τῷ Εὐκλείδῃ [οὐχ ὡς οἴεται Πάππος καὶ ἕτεροί τινες] διὰ τὸ μὴ εὑρηκέναι δύο μέσας ἀνάλογον· ὅ τε γὰρ Εὐκλείδης ὑγείως εὗρεν τὴν μίαν μέσην ἀνάλογον, ἀλλ' οὐχ ὡς αὐτός φησιν, οὐχ εὐτυχῶς, καὶ (om. Halley) περὶ τῶν δύο μέσων οὐδὲ ὅλως ἐπεχείρησεν (ἐπιχειρεῖται Halley) ζητῆσαι ἐν τῇ στοιχείωσει· αὐτὸς ὅ τε Ἀπολλώνιος οὐδὲν περὶ τῶν δύο σημείων (lisez μέσων avec Halley) ἀνάλογον φαίνεται ζητῆσαι ἐν τῷ τρίτῳ βιβλίῳ, ἀλλ' ὡς ἔοικεν (ἐν Halley) ἑτέρῳ βιβλίῳ περὶ τόπων γεγραμμένῳ τῷ Εὐκλείδῃ ἐπισκήπτει (ἐπισκώπτει Halley), ὅπερ εἰς ἡμᾶς οὐ φέρεται.

Je vais essayer de traduire ce passage, en maintenant les ambiguïtés du texte.

« S'il blâme ensuite Euclide (ce n'est pas comme le pensent Pappus et quelques autres) pour n'avoir pas trouvé deux moyennes proportionnelles, en fait Euclide a trouvé la simple moyenne proportionnelle d'une façon irréprochable et non pas, comme le dit Apollonius, assez malheureusement; quant aux deux moyennes, il n'a nullement abordé leur recherche dans les *Éléments;* Apollonius lui-même ne paraît avoir rien recherché sur les deux moyennes proportionnelles dans le troisième Livre, mais c'est (dans *Halley*) un autre Livre écrit *Sur les Lieux* pour lequel il vise Euclide; ce Livre n'est pas parvenu jusqu'à nous. »

Dans l'interprétation de M. Heiberg, interprétation qui serre incontestablement le texte aussi bien que possible, il faut admettre que Pappus aurait dit quelque part, par exemple dans son commentaire sur Euclide, qu'Apollonius aurait blâmé le maître pour n'avoir pas résolu le problème des deux moyennes proportionnelles; Eutocius contredirait Pappus et ferait justement remarquer qu'Apollonius s'en prenait aux Livres d'Euclide *Sur les Lieux en surface,* Ouvrage perdu au VIe siècle.

Cette ingénieuse explication est loin de lever toutes les difficultés; s'il est clair qu'Eutocius ne connaît rien de ce que dit Pappus dans son Livre VII, le reste est absolument obscur; car, si Pappus avait dit ailleurs ce que semble lui attribuer Eutocius,

ou bien il s'était grossièrement mépris sur ce que signifie « le lieu à trois ou quatre lignes », ou bien il avait en vue un autre passage d'Apollonius. Dans ce second cas, Eutocius se serait lui-même mépris sur le rapprochement fait par Pappus; dans les deux il a ignoré le sens du terme « lieu à trois ou quatre lignes », car il n'avait, pour réfuter Pappus, qu'à expliquer le sens de ce terme.

Ignorant le sens du terme technique, il a pu prendre « les trois ou quatre lignes » pour trois ou quatre longueurs en proportions géométriques et commettre une erreur dont Pappus était incapable; dans ces conditions, le plus simple me paraît être de regarder les mots relatifs à Pappus et que j'ai mis entre parenthèses, comme une ancienne remarque marginale (d'Anthémius, si l'on veut?), notant que l'opinion d'Eutocius diffère de celle de Pappus; cette remarque marginale aura passé plus tard dans le texte et l'aura rendu incompréhensible.

Dans cette hypothèse, tout devient clair jusqu'à la fin; ici les difficultés recommencent; on serait bien tenté de supprimer les mots τῷ Εὐκλείδῃ ἐπισκήπτει (pour lequel il vise Euclide), qui détruisent un sens très naturel, surtout si la leçon ἐν (dans) de Halley est bonne; alors le Livre perdu serait d'Apollonius, et ce serait dans ce Livre qu'il aurait résolu le problème des deux moyennes proportionnelles.

Mais cette nouvelle suppression serait cette fois sans motif sérieux; le ἐν de Halley semble bien une dittographie; d'ailleurs Eutocius, qui a publié une solution du problème des deux moyennes proportionnelles par Apollonius, peut se contenter de remarquer que le géomètre de Perge ne touche pas ce problème dans son troisième Livre. Le Livre qu'il considère comme perdu est bien un Livre d'Euclide, mais c'est un Livre imaginaire, où Eutocius suppose que le maître aurait traité « assez malheureusement », suivant les expressions d'Apollonius, une partie seulement de la question des deux moyennes. Il ne s'agit pas en particulier des Livres *Sur les lieux à la surface,* quoiqu'il soit bien probable, comme le remarque M. Heiberg, qu'ils fussent perdus au temps d'Eutocius.

Le savant philologue a reconnu depuis au reste que ce ne peut être à ce dernier traité d'Euclide que font allusion Apollonius et Pappus : il s'agit pour eux probablement des *Coniques* d'Euclide,

rédigé par lui en liaison avec les *Lieux solides* d'Aristée, mais que Pappus ne semble plus connaître que par tradition.

Je termine en mentionnant le titre que portent, dans les manuscrits de Paris, les commentaires d'Eutocius sur Archimède, titre omis par Halley : Εὐτοκίου Ἀσκαλωνίτου εἰς τὸ $\bar{\alpha}$ ($\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ ou $\bar{\delta}$) τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν τῆς κατ' αὐτὸν ἐκδόσεως ὑπόμνημα.

« D'Eutocius d'Ascalon, sur le 1° (2°, 3° ou 4°) des *Coniques* d'Apollonius de son édition, commentaire. »

On peut remarquer la différence avec la formule finale des premiers commentaires sur Archimède.

QUESTIONS HÉRONIENNES;

PAR M. PAUL TANNERY.

I.

Je crois avoir établi, dans un de mes précédents essais (1), que la restitution du mode d'extraction des racines carrées incommensurables dans l'école héronienne est intimement liée au système de représentation des fractions par une suite de *quantièmes*, c'est-à-dire de fractions ayant pour numérateur l'unité, et, pour dénominateurs, des nombres allant en croissant. Je me propose aujourd'hui de réunir quelques observations sur l'histoire de ce système, en remontant à son origine, c'est-à-dire en commençant par l'étudier dans le papyrus égyptien, traduit et commenté par August Eisenlohr (Leipzig, 1877).

A la vérité, les questions que soulève l'emploi de ce système chez les Égyptiens ont été à peu près épuisées, soit par M. Cantor, dans l'exposition qu'il en a faite au premier Chapitre de ses *Vorlesungen* (2), soit par F. Hultsch, dans la recension qu'il a faite de cet Ouvrage. Mais, si je dois me borner à très peu près à répé-

(1) *L'Arithmétique des Grecs dans Heron d'Alexandrie*, pages 161-194 du t. IV (2e série) des *Memoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*.

(2) *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Leipzig, 1880, p. 21 et suivantes.

ter ce qui a déjà été dit par ces deux illustres savants, je crois indispensable de le faire pour bien établir le terme de comparaison avec les suites de quantièmes dans l'École héronienne.

Le système dont il s'agit est constamment suivi dans tout le papyrus d'Eisenlohr, ou du moins il ne souffre que deux exceptions.

L'une se rapporte à l'emploi de mesures concrètes, subdivisions de mesures plus grandes. Ainsi le *bescha*, unité de mesure pour les grains et les liquides, se partageait en demi, quart, huitième, et l'on rencontre des signes particuliers pour en représenter les fractions $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$.

L'autre exception concerne la fraction $\frac{2}{3}$, qui jouissait du privilège singulier d'être considérée comme un *quantième*, privilège que, plus tard, les Grecs lui ont conservé.

Il est à noter, toutefois, que l'équivalence $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ est bien connue et expressément notée dans les règles de calcul qui sont réunies sous le n° 61 du papyrus.

« Prendre les $\frac{2}{3}$ d'une fraction. Si l'on te demande : quels sont les $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{5}$, prends sa moitié et son sixième, cela fera ses $\frac{2}{3}$. Fais de même pour toute fraction qui se présente. »

Cette règle est appliquée dans toute sa rigueur, sinon à $\frac{1}{2}$, au moins à $\frac{1}{6}$. Ainsi pour les $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{6}$, on donne non pas $\frac{1}{9}$, mais

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{36}.$$

Après le titre, le papyrus commence immédiatement par une Table qui donne le développement en quantièmes de $\frac{2}{p}$ pour toutes les valeurs impaires de p allant de 5 à 99. L'usage de cette Table suppose naturellement que, pour les fractions de numérateur supérieur à 2, on procédait par opérations successives qu'il est facile d'imaginer.

Mais, si l'on se propose d'étudier suivant quels principes ont été obtenus les développements de cette Table, il convient de distinguer, d'une part, le cas où p est premier, de l'autre, celui où il est composé.

Pour le premier cas, il est avantageux d'employer le mode de représentation de F. Hultsch, qui indique comment sont composés les différents dénominateurs :

$p = 3)\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2p},$	$p = 43)\ \frac{1}{42}\ \frac{1}{2p}\ \frac{1}{3p}\ \frac{1}{7p},$
$= 5)\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3p},$	$= 47)\ \frac{1}{30}\ \frac{1}{3p}\ \frac{1}{10p},$
$= 7)\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4p},$	$= 53)\ \frac{1}{30}\ \frac{1}{6p}\ \frac{1}{15p},$
$= 11)\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{6p},$	$= 59)\ \frac{1}{36}\ \frac{1}{4p}\ \frac{1}{9p},$
$= 13)\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{4p}\ \frac{1}{8p},$	$= 61)\ \frac{1}{40}\ \frac{1}{4p}\ \frac{1}{8p}\ \frac{1}{10p},$
$= 17)\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{3p}\ \frac{1}{4p},$	$= 67)\ \frac{1}{40}\ \frac{1}{5p}\ \frac{1}{8p},$
$= 19)\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{4p}\ \frac{1}{6p},$	$= 71)\ \frac{1}{40}\ \frac{1}{8p}\ \frac{1}{10p},$
$= 23)\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{12p},$	$= 73)\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{3p}\ \frac{1}{4p}\ \frac{1}{5p},$
$= 29)\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{2p}\ \frac{1}{6p}\ \frac{1}{8p},$	$= 79)\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{3p}\ \frac{1}{4p}\ \frac{1}{10p},$
$= 31)\ \frac{1}{20}\ \frac{1}{4p}\ \frac{1}{5p},$	$= 83)\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{4p}\ \frac{1}{5p}\ \frac{1}{6p},$
$= 37)\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{3p}\ \frac{1}{8p},$	$= 89)\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{4p}\ \frac{1}{6p}\ \frac{1}{10p},$
$= 41)\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{6p}\ \frac{1}{8p},$	$= 97)\ \frac{1}{56}\ \frac{1}{7p}\ \frac{1}{8p}.$

Si l'on se propose, en thèse générale, de décomposer $\frac{2}{p}$ en deux quantièmes, dans le cas où p est impair, une seule solution est possible,

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{\frac{p+1}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2}p}.$$

La Table ci-dessus montre que ce mode de décomposition n'est employé que pour les valeurs de $\frac{p+1}{2}$ suivantes : 2, 3, 4, 6, 12, c'est-à-dire pour les facteurs de 12.

Toutes les décompositions rentrent d'ailleurs dans la formule générale

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{M} + \frac{1}{ap} + \frac{1}{bp} + \frac{1}{cp},$$

où M est le plus petit multiple commun des facteurs a, b, c, dont le nombre est 1, 2 ou 3.

En dehors des valeurs de M déjà rencontrées, on trouve

$$8 = \frac{2}{3}\,12, \quad 24 = 2.12, \quad 36 = 3.12,$$

puis 20, 30, 40, 60 qui rentrent de même dans le système sexagésimal; enfin tout à fait isolés $42 = 6 \times 7$ et $56 = 7 \times 8$.

Le procédé général du développement est donc facile à reconnaître; on devait choisir d'abord parmi les nombres ayant plusieurs diviseurs et principalement dans la série des diviseurs ou des premiers multiples de 12 $\left(\frac{3}{2}\right.$ étant compté comme entier$\left.\right)$ ou dans la série des sous-multiples de 60, un nombre M compris entre p et $\frac{p}{2}$; la différence $\frac{2}{p} - \frac{1}{M} = \frac{2M - p}{Mp}$ se développait ensuite facilement en quantièmes, en décomposant $2M - p$ en une somme de diviseurs de M. Naturellement M devait être pris le plus petit possible, et, de la sorte, les Égyptiens ont trouvé accidentellement la division en deux quantièmes pour cinq des fractions $\frac{2}{p}$.

L'exemple de la décomposition de $\frac{2}{13}$,

$$\frac{2}{13} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8.13} = \frac{2}{8.13} + \frac{1}{8.13} = \frac{1}{4.13} + \frac{1}{8.13},$$

montre nettement qu'ils n'ont pas eu la notion de la règle générale que j'ai rappelée plus haut et qui leur eût donné la décomposition plus simple

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7.13}.$$

La décomposition

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{10} + \frac{1}{2.13} + \frac{1}{5.13}$$

leur eût d'ailleurs donné des dénominateurs moins élevés, s'ils avaient pris M plus grand, toujours en restant d'ailleurs dans la série des nombres qu'ils semblent avoir pu choisir.

Que cette préoccupation d'avoir leurs derniers dénominateurs le moins élevés possible les guidât dans leurs calculs, on le voit

d'ailleurs bien clairement dans les décompositions

$$\frac{2}{17} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12.17} = \frac{4}{12.17} + \frac{3}{12.17},$$
$$\frac{2}{19} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12.19} = \frac{3}{12.19} + \frac{2}{12.17}.$$

Il est certain, en effet, que nous aurions plutôt, avec un système semblable, tendance à graduer l'approximation en augmentant le plus possible le second quantième. Nous décomposerions donc 7 en $6+1$, et 5 en $4+1$.

Au point de vue égyptien, la décomposition de $\frac{2}{17}$ offre donc une particularité à signaler. Si $\frac{p+1}{2} = m^2$, on a

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{mp} + \frac{1}{(m+1)p};$$

les deux facteurs de p ne diffèrent que d'une unité. Cette décomposition se trouve effectivement appliquée pour $p = 31$, et pour $p = 97$.

Dans le premier cas, nous voyons apparaître $M = 20$, alors que $M = 24$ est préféré pour les nombres voisins; dans le second cas, nous avons $M = 7.8$ en dehors de la série sexagésimale; mais, au contraire, la décomposition analogue $\frac{2}{71} = \frac{1}{42} + \frac{1}{6.71} + \frac{1}{7.71}$ n'est pas donnée, quoique 42 soit choisi pour M dans un cas moins favorable.

A partir de $p = 29$, pour le choix de M, il semble y avoir une lutte entre les multiples de 12 et les diviseurs de 60; sauf l'exception signalée pour 20 ($p = 31$), 24 l'emporte d'abord

$$\frac{2}{29} - \frac{1}{24} = \frac{19}{24.29} = \frac{12}{24.29} + \frac{4}{24.29} + \frac{3}{24.29}.$$

On peut remarquer que le choix de 18 aurait donné une décomposition plus simple

$$\frac{2}{29} - \frac{1}{18} = \frac{1}{6.29} + \frac{1}{9.29}.$$

D'autre part,

$$\frac{2}{29} - \frac{1}{20} = \frac{1}{2.29} + \frac{1}{20.29}.$$

On préfère trois facteurs à deux pour avoir des dénominateurs

plus simples, tandis que

$$\frac{2}{31} - \frac{1}{24} = \frac{1}{3.31} + \frac{1}{4.31} + \frac{1}{8.31}$$

aurait donné un développement moins avantageux que $\frac{2}{31} - \frac{1}{20}$.

De même

$$\frac{2}{37} - \frac{1}{24} = \frac{8+3}{24.37} = \frac{1}{3.37} + \frac{1}{8.37},$$

contre

$$\frac{2}{37} - \frac{1}{20} = \frac{3}{20.37} = \frac{1}{10.37} + \frac{1}{20.37};$$

puis

$$\frac{2}{41} - \frac{1}{24} = \frac{4+3}{24.41} = \frac{1}{6.41} + \frac{1}{8.41},$$

contre

$$\frac{2}{41} - \frac{1}{30} = \frac{10+6+3}{30.41} = \frac{1}{3.41} + \frac{1}{5.41} + \frac{1}{10.41};$$

au contraire,

$$\frac{2}{47} - \frac{1}{30} = \frac{10+3}{30.47} = \frac{1}{3.47} + \frac{1}{10.47},$$

au lieu de

$$\frac{2}{47} - \frac{1}{24} = \frac{1}{24.47}.$$

Le multiple 36 n'apparaît qu'une fois

$$\frac{2}{59} - \frac{1}{36} = \frac{9+4}{36.59} = \frac{1}{4.59} + \frac{1}{9.59},$$

au lieu de

$$\frac{2}{59} - \frac{1}{30} = \frac{1}{30.59},$$

tandis que

$$\frac{2}{53} - \frac{1}{30} = \frac{2+5}{30.53} = \frac{1}{6.53} + \frac{1}{15.53},$$

au lieu de

$$\frac{2}{53} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3.53} + \frac{1}{9.53} + \frac{1}{12.53}.$$

Désormais il n'y a plus de multiple de 12 avant 60 :

$$\frac{2}{61} - \frac{1}{40} = \frac{10+5+4}{40.61}, \quad \text{au lieu de} \quad \frac{2}{61} - \frac{1}{36} = \frac{1}{4.61} + \frac{1}{18.61},$$

$$\frac{2}{67} - \frac{1}{40} = \frac{8+5}{40.67}, \quad \text{au lieu de} \quad \frac{2}{67} - \frac{1}{36} = \frac{1}{12.67} + \frac{1}{18.67},$$

$$\frac{2}{71} - \frac{1}{40} = \frac{5+4}{40.71}, \quad \text{au lieu de} \quad \frac{2}{71} - \frac{1}{36} = \frac{1}{36.71}.$$

Mais 60 apparaît avant qu'il soit nécessaire

$$\frac{2}{73} - \frac{1}{60} = \frac{20 + 15 + 12}{60.73} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{2}{73} - \frac{1}{40} = \frac{5 + 2}{40.73},$$

$$\frac{2}{79} - \frac{1}{60} = \frac{20 + 15 + 6}{60.79} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{2}{79} - \frac{1}{40} = \frac{1}{40.73}.$$

On a enfin

$$\frac{2}{83} - \frac{1}{60} = \frac{15 + 12 + 10}{60,83} = \frac{1}{4.83} + \frac{1}{5.83} + \frac{1}{6.83}$$

et

$$\frac{2}{89} - \frac{1}{60} = \frac{15 + 10 + 4}{60.89} = \frac{1}{4.83} + \frac{1}{6.89} + \frac{1}{15.89}.$$

En résumé, il semble bien, d'après tous ces cas, que les Égyptiens ont cherché à résoudre par tâtonnements le problème d'avoir les dénominateurs les plus petits possible, sauf à en augmenter le nombre.

L'introduction de $M = 56$ était évidemment avantageuse à ce point de vue pour $p = 97$; quant à celle de $M = 42$ pour $p = 43$,

$$\frac{2}{43} - \frac{1}{42} = \frac{21 + 14 + 6}{42.43} = \frac{1}{2.43} + \frac{1}{3.43} + \frac{1}{7.43},$$

il faut la comparer aux décompositions

$$\frac{2}{43} - \frac{1}{24} = \frac{3 + 2}{24.43} = \frac{1}{8.43} + \frac{1}{16.43}$$

ou bien

$$\frac{2}{43} - \frac{1}{30} = \frac{15 + 2}{30.43} = \frac{1}{2.43} + \frac{1}{15.43}.$$

On ne peut évidemment se refuser à admettre l'opinion de M. Cantor, que la Table que nous étudions n'a pas été faite d'un coup, suivant un dessein précis et des règles conçues d'avance; d'autre part, la préférence pour les petits dénominateurs, surtout mise en lumière par F. Hultsch, est suffisamment claire, quoique les décompositions correspondantes n'aient pas toujours été atteintes.

Si nous abordons maintenant les fractions $\frac{2}{a}$, où a est un nombre composé, il est facile de reconnaître en premier lieu que, si 3 y entre comme facteur, on a toujours $\frac{2}{3q} = \frac{1}{2q} + \frac{1}{6q}$, suivant la décomposition $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.

On serait tenté, dès lors, d'attendre de même toujours : pour les facteurs de 5 non multiples de 3 : $\frac{2}{5q} = \frac{1}{3q} + \frac{1}{15q}$, suivant la décomposition $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$, et pour les facteurs de 7 non multiples de 3 ou de 5 : $\frac{2}{7q} = \frac{1}{4q} + \frac{1}{28q}$, suivant la décomposition $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$.

Mais ces décompositions ne se rencontrent, avec 5, que pour $q = 5, 13, 17$; avec 7, que pour $q = 7, 11$.

Au contraire,

$$\frac{2}{5.11} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{66}\right)\frac{1}{5} \quad \text{et} \quad \frac{2}{5.19} = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}\right)\frac{1}{5},$$

au lieu de

$$\frac{2}{5.11} = \frac{1}{33} + \frac{1}{165} \quad \text{et} \quad \frac{2}{5.19} = \frac{1}{57} + \frac{1}{325},$$

qui donnent des dénominateurs cependant plus faibles, mais moins commodes pour les calculs.

Les décompositions de $\frac{2}{35}$ et de $\frac{2}{91}$ forment exception en ce qu'elles ne peuvent se déduire des décompositions de l'un des facteurs premiers des dénominateurs.

Elles correspondent à la formule $\frac{2}{pq} = \frac{1}{p\frac{p+q}{2}} + \frac{1}{q\frac{p+q}{2}}$, dont l'application systématique eût permis de satisfaire, dans certains cas, au *desideratum* des Égyptiens plus complètement que ne le font les développements de la Table.

Ainsi

$$\frac{1}{99} = \frac{1}{90} + \frac{1}{110}, \quad \frac{2}{95} = \frac{1}{60} + \frac{1}{228}, \quad \ldots.$$

L'opinion de M. Cantor se trouve ainsi amplement confirmée.

II.

L'étude des nombreux calculs que renferment les solutions des divers problèmes du papyrus mathématique n'indique aucune divergence par rapport aux règles de décomposition données dans le premier Tableau.

Mais cette étude permet de constater les graves inconvénients

que présentait, en thèse générale, le système de numération égyptien pour les fractions.

Ce système ne conduit, en somme, nullement à une représentation définie pour chaque fraction déterminée; suivant la marche des calculs qui conduisent à telle représentation, elle affectera des formes toutes différentes, dont on ne pourra reconnaître l'identité que par une réduction au même dénominateur.

Pour en donner un exemple : $\frac{1}{14}$, conçu comme moitié de $\frac{1}{7}$, se représente par la fraction simple; conçu comme quart de $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$, il se représentera par $\frac{1}{16} + \frac{1}{112}$ (n°s 12 et 13). De même $\frac{1}{28}$ peut aussi se représenter par $\frac{1}{32} + \frac{1}{224}$ (n°s 14 et 15), et ainsi de suite.

En tous cas, les calculs, qu'il s'agisse de la multiplication ou de la division, sont appropriés au système de numération, et l'opération qui revient à la réduction au même dénominateur n'intervient jamais que là ou elle est indispensable.

Dans les calculs de la collection héronienne, le système égyptien est, au contraire, à vrai dire, en pleine décadence; sauf dans les cas simples, on procède d'ordinaire pour les calculs à la réduction des suites en fractions de la forme moderne, et l'on transforme après coup le résultat en une suite de quantièmes. Il y a là incontestablement un progrès considérable réalisé.

Il n'en est pas moins vrai que les inconvénients du système subsistent et que l'on rencontre souvent des décompositions différentes représentant la même fraction.

Je vais analyser, aussi rapidement que possible, les particularités qu'offrent les calculs héroniens pour la décomposition des fractions en quantièmes.

A. *Le dénominateur est une puissance de* 2. — Les décompositions, très fréquentes, se font naturellement toujours suivant le principe de la numération du système binaire.

On doit remarquer la décomposition approximative

$$\frac{327}{512} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{73} \quad (S_2, 20)\ (^1).$$

---

(1) Les indications de renvoi se rapportent à l'édition *Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiæ* de Hultsch, Berlin, 1864. Les lettres dé-

Après la formation des deux premières fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, il reste $\frac{7}{512}$ qui donnerait régulièrement $\frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512}$. Au lieu de cette décomposition, le dénominateur a été divisé par le numérateur et l'on a pris pour dénominateur d'un nouveau quantième le quotient par défaut. Le reste étant l'unité ($512 = 7 \times 73 + 1$), l'approximation est par excès et l'erreur est de $\frac{1}{73.512}$.

Aucune approximation analogue ne se rencontre dans le papyrus mathématique égyptien.

B. *Le dénominateur est de* 3 *ou son produit par une puissance de* 2. — Nous avons dit que la fraction $\frac{2}{3}$ était considérée comme quantième par les Grecs; toutefois, nous la rencontrons exceptionnellement remplacée par $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ dans le problème S_1, 37.

Nous avons, dans cette même classe, les dénominateurs 6 et 12. Pour le premier, il faut remarquer que l'on trouve $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ et non $\frac{5}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$, ce qui nous indique le maintien du principe égyptien, d'avoir les dénominateurs les plus faibles possible.

Au contraire, $\frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$ et non pas $\frac{5}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$, ce qui est l'application du principe inverse.

Pour $\frac{7}{12}$ et $\frac{11}{12}$, nous rencontrons les deux décompositions

$$\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} (S_2, 23) \quad \text{et} \quad \frac{7}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} (S_2, 22),$$

$$\frac{11}{12} = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} (G, 53) \quad \text{et} \quad \frac{11}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} (G, 98).$$

C. *Le dénominateur est une puissance de* 3 *ou son produit par une puissance de* 2. — Nous avons les décompositions sui-

---

signent : G, le Traité *Heronis Geometria*, p. 41-140; S_1 = *Heronis introductiones stereometricorum*, p. 153-171; S_2 = *Heronis stereometricorum collectio altera*, p. 172-187; M = *Heronis mensuræ*, p. 188-207; D = *Didymi Alexandrini mensuræ*, p. 238-244. Les nombres suivant les lettres indiquent les numéros du problème de chaque Recueil.

vantes :

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}, \quad \frac{4}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}, \quad \frac{7}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{9}, \quad \frac{8}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18},$$
$$\frac{11}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{9}, \quad \frac{31}{36} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}, \quad \frac{4}{27} = \frac{1}{3} + \frac{1}{27}.$$

Mais, en réalité, la suite qui représente $\frac{31}{36}$ est une approximation substituée à la partie fractionnaire dans le carré de $4\frac{1}{4}\frac{1}{16}\frac{1}{32}$; cette partie fractionnaire est $\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{16}\frac{1}{32}\frac{1}{64}\frac{1}{128}\frac{1}{1024}$, et $\frac{1}{9}$ est substitué aux fractions qui suivent $\frac{1}{4}$, c'est-à-dire à $\frac{121}{1024}$. Le quotient du dénominateur par le numérateur est ici pris par excès

$$(1024 = 9 \times 121 - 65)$$

et l'erreur est $\frac{65}{9.1024}$; l'approximation eût été un peu plus satisfaisante en prenant le quotient par défaut $(1024 = 8 \times 121 + 56)$; l'erreur n'eût été que de $\frac{7}{1024}$ (S_2, 38).

D. *Le dénominateur est* 5 *ou son produit par une puissance de* 2. — Nous rencontrons

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}, \quad \frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}, \quad \frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20},$$
$$\frac{7}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}, \quad \frac{3}{20} = \frac{1}{8} + \frac{1}{40}.$$

La seconde forme du développement pour $\frac{4}{5}$ se rencontre une fois (S_1, 39) contre trois fois pour la première (G, 34, 66; D, 12). Celle-ci est remarquable en ce qu'elle offre encore le choix de dénominateurs aussi petits que possible. On peut observer également que la décomposition de $\frac{2}{5}$ conduirait, par multiplication pour $\frac{4}{5}$, à la décomposition $\frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$.

E. *Le dénominateur est une puissance de* 5 *ou son produit*

par une puissance de 2 :

$$\frac{2}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{75}, \quad \frac{6}{25} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25}, \quad \frac{8}{25} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{50},$$

$$\frac{12}{25} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{200}, \quad \frac{16}{25} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{25},$$

$$\frac{104}{125} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{50} + \frac{1}{125} + \frac{1}{250},$$

$$\frac{19}{50} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{200}, \quad \frac{31}{50} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{50}, \quad \frac{39}{50} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{40} + \frac{1}{200}.$$

Les décompositions $\frac{8}{25}$, $\frac{12}{25}$, $\frac{16}{25}$ et les trois dernières proviennent, en fait, de divisions par 200, ce qui explique leur nature.

F. *Le dénominateur renferme les facteurs* 3, 5 et 2 :

$$\frac{11}{30} = \frac{1}{3} + \frac{1}{30}, \quad \frac{13}{30} = \frac{1}{3} + \frac{1}{10}, \quad \frac{17}{30} = \frac{1}{2} + \frac{1}{15},$$

$$\frac{61}{90} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{90}.$$

G. *Le dénominateur est* 7 :

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28},$$

et exceptionnellement dans une décomposition de $\frac{11}{14}$:

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} (S_2, 26),$$

$$\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14},$$

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} (G, 89; M, 31) \quad \text{et} \quad \frac{5}{7} = \frac{2}{3} + \frac{1}{21} (G, 90),$$

$$\frac{6}{7} = \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{21} (G, 35, 96; M, 38) \quad \text{et} \quad \frac{6}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{42} (G, 89, 102).$$

On remarquera les doubles formes pour les deux dernières fractions.

H. *Le dénominateur est le produit de* 7 *par une puissance*

de 2 :

$$\frac{3}{14} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14}, \quad \frac{9}{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7}, \quad \frac{11}{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28},$$

$$\frac{25}{28} = \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28},$$

$$\frac{17}{112} = \frac{1}{7} + \frac{1}{112}, \quad \frac{73}{112} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{112},$$

$$\frac{43}{224} = \frac{1}{7} + \frac{1}{28} + \frac{1}{112} + \frac{1}{64}$$

et

$$\left.\begin{aligned} \frac{163}{224} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{112} + \frac{1}{224} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{112} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{21} + \frac{1}{112} + \frac{1}{224} \end{aligned}\right\} \text{(G, 90)}.$$

Dans la triple forme de cette dernière fraction, on retrouve les deux formes du développement de $\frac{5}{7}$.

On rencontre encore (M, 38) la suite

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{21} + \frac{1}{84} = \frac{9}{14},$$

mais le calcul est erroné : en fait, les manuscrits ajoutent les fractions $\frac{1}{7} + \frac{1}{28}$ de façon à donner la somme inexacte $\frac{23}{28}$.

I. *Le dénominateur contient, soit les facteurs* 7 *et* 3, *soit aussi une puissance de* 2 :

$$\frac{5}{21} = \frac{1}{6} + \frac{1}{14} \text{ (M, 29)} \quad \text{et} \quad \frac{5}{21} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42} \text{ (G, 54)},$$

$$\frac{11}{21} = \frac{1}{2} + \frac{1}{42} \text{ (S}_1\text{, 9)} \quad \text{et} \quad \frac{11}{21} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{21} \text{ (S}_1\text{, 42)},$$

$$\frac{13}{21} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}, \qquad \frac{16}{21} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21},$$

$$\frac{37}{84} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{42}, \qquad \frac{70}{84} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{84}.$$

J. *Le dénominateur contient les facteurs* 7 *et* 5 :

$$\frac{19}{35} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15}, \quad \frac{57}{175} = \frac{1}{4} + \frac{1}{25} + \frac{1}{28}, \quad \frac{116}{175} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{50}.$$

K. *Le dénominateur contient le facteur* 11 :

$$\frac{6}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{22}, \qquad \frac{9}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{22} + \frac{1}{44},$$

$$\frac{20}{33} = \frac{1}{2} + \frac{1}{11} + \frac{1}{66}, \quad \frac{23}{33} = \frac{2}{3} + \frac{1}{33},$$

$$\frac{35}{66} = \frac{1}{2} + \frac{1}{33},$$

$$\frac{101}{132} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{66}.$$

L. *Le dénominateur contient le facteur* 13 :

$$\frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{26} + \frac{1}{52}, \quad \frac{5}{13} = \frac{1}{3} + \frac{1}{26} + \frac{1}{78},$$

$$\frac{8}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{13} + \frac{1}{26}, \quad \frac{9}{13} = \frac{2}{3} + \frac{1}{39},$$

$$\frac{10}{13} = \frac{2}{3} + \frac{1}{13} + \frac{1}{39}, \quad \frac{12}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{13} + \frac{1}{78},$$

$$\frac{21}{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{26} + \frac{1}{52}.$$

Ces décompositions sont remarquables, en ce que pour $\frac{4}{13}$ et $\frac{8}{13}$ elles dérivent évidemment de la forme complexe des Égyptiens, $\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$.

M. *Le dénominateur est* $51 = 17 \times 3$ (G, 57, 58) :

$$\frac{19}{51} = \frac{1}{3} + \frac{1}{34} + \frac{1}{102}, \quad \frac{31}{51} = \frac{1}{2} + \frac{1}{17} + \frac{1}{34} + \frac{1}{51},$$

$$\frac{35}{51} = \frac{1}{3} + \frac{1}{51}, \qquad \frac{39}{51} = \frac{13}{17} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{68},$$

$$\frac{41}{51} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{51} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}.$$

L'irrégularité de la dernière décomposition, qui contient deux fois la fraction $\frac{1}{51}$, saute aux yeux; elle dérive évidemment de celle de $\frac{39}{51}$ par l'addition de cette double fraction.

La décomposition égyptienne de $\frac{2}{51} = \frac{1}{34} + \frac{1}{102}$ se retrouve d'ailleurs dans celle de $\frac{19}{51}$.

Il serait facile de multiplier les rapprochements de cette nature, et il apparaît, pour l'ensemble des décompositions héroniennes, que l'antique procédé originaire des bords du Nil a été conservé dans la logistique grecque en subissant, à la vérité, parfois certaines modifications, mais sans recevoir aucun perfectionnement réel, quoiqu'il laissât, comme nous l'avons vu, singulièrement à désirer, et sous le rapport théorique et sous le rapport pratique.

Le système moderne des fractions ordinaires, qui se trouve en fait concurremment employé avec les développements en quantièmes dans la collection des écrits héroniens, fut de bonne heure imaginé par les Grecs, à la suite de leurs spéculations sur les rapports numériques des intervalles musicaux; il semble déjà connu du temps de Platon et il est employé, dès avant Archimède, par Aristarque de Samos, il est vrai seulement sous forme de rapport de deux nombres.

Mais le triomphe du nouveau système n'a jamais été définitif pour la pratique des calculs: il est à remarquer, notamment, que lorsque Ptolémée n'emploie pas la notation sexagésimale, c'est de l'antique procédé qu'il se sert de préférence pour la représentation des fractions. Diophante lui-même semble l'avoir employé autant qu'il lui était possible, alors que cependant la nature des problèmes qu'il traitait le conduisait nécessairement à préférer l'autre système.

A la vérité, les traces de l'emploi du procédé égyptien ont été systématiquement éliminées du texte de Diophante dans l'édition de Bachet, où notamment le signe spécial qui représente la fraction $\frac{1}{2}$ est constamment remplacé par la notation α^{β}, qui n'a jamais été grecque. Dans les manuscrits de Diophante eux-mêmes, surtout ceux qui contiennent les scolies, attribués à Planude, le travail accompli par Bachet avait déjà été poussé très loin.

Je puis citer un exemple frappant; dans un problème de Diophante, la fraction $\frac{3}{5}$ est donnée dans les manuscrits de cette dernière classe sous la forme γ^{ε} ou $\overline{\gamma}\ \varepsilon^{\alpha}$ (1). Mais les manuscrits les

(1) Les manuscrits varient constamment entre l'usage de mettre le dénominateur en exposant, et celui de l'écrire à la suite du numérateur avec des signes spéciaux représentant la finale qui change avec les différents cas, puisque le dé-

plus anciens donnent pour cette fraction S ιγ″, c'est-à-dire $\frac{1}{2} + \frac{1}{13}$, avec la note marginale que c'est à très peu près la valeur de $\frac{3}{5}$.

Il me paraît évident que Diophante avait écrit S ι″, c'est-à-dire $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$, comme l'eût fait un héronien ; plus tard un copiste aura juxtaposé $\bar{\gamma}$ ε^{α}, comme l'expression plus naturelle pour lui; plus tard encore, un autre copiste aura cru que ιγ formait un seul nombre, et supprimant le ε, dont il ne comprenait pas la présence, il aura donné la leçon actuelle avec l'absurde note marginale destinée à la justifier.

Nous avons d'ailleurs une preuve assurée qu'en plein XIVe siècle les Grecs de Byzance conservaient encore le procédé égyptien pour la représentation des fractions; Friedlein a, en effet, publié en 1866 (¹) la *Géométrie* de Pediasimos, qui est un des derniers travaux rédigés sur le plan des écrits héroniens. Il est très remarquable que le procédé en question pour la représentation des fractions s'y trouve pour ainsi dire exclusivement employé, et que le système des fractions ordinaires n'y a nullement gardé la place qu'il a déjà prise dans les écrits héroniens.

(*A suivre.*)

---

nominateur se décline en tant que nombre ordinal. Parfois même, on trouve le dénominateur à la fois en exposant et à la suite du dénominateur.

Quant au mode singulier que donnent les manuscrits héroniens utilisés par Hultsch et qui consiste à répéter le dénominateur $\left(p \text{ et } \gamma' \varepsilon'' \varepsilon'' \text{ pour } \frac{3}{5}\right)$, ce me semble être moins une véritable notation mathématique que l'extension abusive d'un usage des copistes de redoubler les signes abréviatifs lorsque le mot abrégé est au pluriel; par exemple, le carré (τετράγωνον) se représente en abrégé par un signe qui a la forme d'un carré; mais au pluriel on répète ce signe, etc. La forme authentique pour $\frac{3}{5}$ me paraît d'ailleurs avoir plutôt été $\bar{\gamma}$ $\bar{\varepsilon}\varepsilon^{\alpha}$.

(¹) *Programm zur öffentlichen Preise-Vertheilung an der Studien-Anstalt Ansbachs.*

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GUNTHER (S.). — Lehrbuch der Geophysik und physikalischen Geographie. Stuttgart, 1884. Erster Band. In-8°, x-418 pages, 77 figures.

A l'occasion d'un important recueil de Mémoires du même auteur, sur diverses questions relatives à l'histoire de la Géographie mathématique et physique, nous avons exprimé le désir de voir la curiosité de notre savant collègue se porter sur une série de questions intéressant la Géographie générale.

Le nouvel Ouvrage, que nous sommes heureux de signaler ici, donne à ce vœu une satisfaction complète et presque inespérée. Il n'entre pas dans notre pensée que ces questions aient ainsi été signalées pour la première fois à l'attention de l'auteur, mais il les avait certainement rencontrées dans l'étude des documents nécessaires à la préparation de ses Mémoires, et elles se présentaient d'une façon si logique, qu'il fallait s'attendre à les voir étudiées un jour par M. Günther. Les renseignements bibliographiques qu'il a ainsi réunis nous offrent, par cela même, une richesse d'érudition qui les rend particulièrement précieux pour guider de nouvelles recherches dans le domaine de la Physique du globe.

Le plan de cet Ouvrage, la nature des sujets traités, le but poursuivi par l'auteur offrent de nombreuses analogies et une grande ressemblance avec les qualités que nous avons rencontrées dans les premières études, dont le *Bulletin* a renfermé une analyse très détaillée (1).

Ce Traité de Géophysique comprendra deux Volumes dont le premier, qui vient de paraître, sera seul analysé dans le présent article.

L'auteur se reporte fréquemment à d'autres travaux qui ont une certaine relation avec celui-ci, et dont la plupart, à l'exception de ses études sur la Géographie et sur les Mathématiques, dont il a été rendu compte au *Bulletin* (2), constituent autant d'intéressantes monographies, précieuses pour l'histoire de telle ou telle

(1) *Voir* 2e série, t. II, octobre et novembre 1878; t. III, mars, juillet et août 1877.

(2) *Voir* 2e série, t. II, avril 1878.

question. C'est dire que l'Ouvrage n'a pas un caractère exclusivement mathématique, mais il est de nature à guider le géomètre comme le physicien, grâce à l'abondance et à la précision des données bibliographiques qu'il renferme.

Le lecteur aura déjà pu en juger par les résumés consacrés aux Ouvrages précités; il y aurait peut-être témérité à vouloir signaler quelques petites lacunes : nous n'y reviendrons qu'incidemment.

Le premier Volume débute par une Introduction consacrée à un aperçu d'ensemble sur le développement historique et bibliographique des hypothèses et théories auxquelles a donné lieu la Physique du globe. Les noms des plus illustres philosophes et historiens grecs se trouvent attachés aux premières études sur cette partie des sciences d'observation. Homère, Hésiode, Thalès, Théophraste, Démocrite, Platon, Hérodote, Hippocrate, Aristote, puis, parmi les géomètres et astronomes, Ératosthène, Hipparque, Ptolémée, enfin les géographes et les navigateurs, Pythéas, Strabon, exercent une puissante influence sur les progrès de ces notions.

Les Romains y occupent aussi un rang distingué, Lucrèce, Pline, Sénèque, puis les Arabes, et quelques autres dont il a été déjà plus longuement question, et auxquels il faut renvoyer le lecteur ([1]).

Il nous paraît difficile de résumer assez rapidement la suite des principales étapes qui ont signalé le progrès de la Physique du globe pendant le moyen âge et depuis la découverte du nouveau monde. L'Œuvre d'Alexandre de Humboldt représente, en cette matière, un résultat qui ne semble pas encore avoir été dépassé.

Trois grandes subdivisions caractérisent l'Ouvrage qui nous occupe actuellement : dans la première, on étudie la situation de la Terre comme corps céleste; dans la deuxième, on examine, au point de vue mathématique et physique, les changements qu'éprouve le globe terrestre; dans la troisième, enfin, on expose la Géophysique d'une manière plus spéciale et l'on donne les bases de la géologie dynamique.

Nous allons les parcourir successivement.

Le premier Chapitre est consacré à l'examen de la théorie cos-

---

([1]) Voir *Bulletin*, novembre 1878.

mogonique imaginée par Kant et puissamment développée par Laplace. Cette hypothèse, qui a joui d'une grande vogue et qui a été confirmée, dans certains aperçus, par les belles expériences de Plateau sur les liquides soustraits à l'action de la pesanteur, a été, depuis, l'objet de critiques nombreuses, qui en ont passablement ébranlé le crédit. Il est juste de dire, cependant, que les progrès de l'Astronomie et de la Physique ont nécessairement amené des modifications imprévues à la théorie de Laplace.

Le Chapitre II renferme l'exposé des résultats obtenus dans l'étude de la constitution physique du système solaire.

En première ligne, la constitution du Soleil lui-même a été étudiée avec grand succès depuis W. Herschel et Secchi. Enfin l'analyse chimique de la lumière du Soleil et la possibilité de l'observation des protubérances en dehors des éclipses ont utilement contribué à établir l'explication des phénomènes auxquels notre Soleil et, par analogie, les étoiles du firmament doivent leur puissance lumineuse.

Après avoir résumé quelques généralités relatives aux planètes, l'auteur expose ensuite les principales théories qui ont été successivement invoquées pour l'explication des comètes, depuis Apian, Kepler, qui les trouvait aussi nombreuses que les poissons dans l'Océan, comparaison dont l'idée première appartient à Stobée, Hévélius, Jacques Bernoulli, Newton, Piazzi, W. Herschel, Laplace, Lehmann, Tyndall, Schwedoff, Von Dellingshausen, Zenker, Miller, puis, plus récemment, les hypothèses faisant intervenir une force polaire, et notamment une force répulsive, à propos de laquelle nous aurions désiré une mention des Travaux et Notices d'Ed. Roche (1) et de M. Faye (2).

De même, dans le paragraphe suivant, relatif aux météorites, il y a lieu de rappeler que M. Goulier a publié, en 1868, des études géométriques fort complètes, faisant connaître en tous détails la détermination des essaims et les instruments qui conviendraient à ces observations délicates. Cette intéressante monographie (3) pourra être citée dans une nouvelle édition.

---

(1) *Recherches sur les atmosphères des comètes* (*Ann. de l'Obs. de Paris*, t. V, 1859; et *Mém. de l'Acad. de Montpellier*, 1851 à 1861.

(2) *Annuaire du Bureau des Longitudes* et *Comptes rendus*.

(3) *Études géométriques sur les étoiles filantes* (*Mém. de l'Acad. de Metz*, 1866-1867, 154 p., 2 pl.).

La lumière zodiacale, observée ou signalée pour la première fois par Childrey (*Histoire d'Angleterre,* London, 1661), puis étudiée par Cassini et Fatio de Duiller qui en ont essayé l'explication, a donné lieu, de même que la théorie des phénomènes cométaires, à un grand nombre de recherches dont la conclusion paraît se trouver dans les hypothèses et observations de Geelmuyden, Crookes et Schiaparelli.

Les hypothèses relatives à ce que l'on désigne sous le nom de *vide interplanétaire,* à la nature du fluide lumineux et à la température de l'espace, terminent cet intéressant Chapitre.

Le suivant est consacré à l'étude des planètes semblables ou regardées comme semblables à la Terre, et à l'examen des conditions climatologiques de la Lune. Les deux planètes dont il est question sont Vénus et Mars, toutes deux entourées d'une atmosphère, et animées d'un mouvement de rotation presque égal à celui de notre globe.

Bien que notre connaissance topographique de Vénus soit peut-être moins avancée que celle de Mars, et que l'absence admise ou constatée de satellite nous prive de moyens d'évaluation précis de la masse, cette planète n'en est pas moins intéressante pour les astronomes par le rôle important qu'elle a joué dans la détermination de la parallaxe solaire et par plusieurs analogies qu'elle offre avec notre Terre.

La planète Mars est la seule, dit Newcomb, dont la rotation ait été évaluée avec toute la précision possible; elle compte, en effet, deux siècles d'observations suivies depuis Huygens. La durée assignée par Kaiser et Schmidt, $24^h 37^m 22^s,6$ est donc exacte à quelques centièmes de seconde.

L'histoire de la découverte de ses satellites est bien connue. On pourra à ce sujet consulter le *Bulletin* (1), mais il n'est pas inutile d'appeler incidemment l'attention sur les dimensions apparentes de ces deux astéroïdes pour les habitants de la planète. Le plus rapproché, Phobos, doit avoir un diamètre de $4'$ à $5'$; le plus éloigné, Deimos, de $1',5$ à $2'$. Il ne faudrait donc pas se faire illusion sur le pouvoir éclairant des deux satellites.

---

(1) Juillet 1878, p. 269-270.

La planète Mars n'est pas seulement célèbre par les études de son mouvement par Kepler d'après les observations de Tycho Brahe. Elle a été très soigneusement étudiée au point de vue de ses conditions physiques, par un grand nombre d'astronomes qui, depuis Fontana et Huygens, jusqu'à Schröter, J. Schmidt, Beer et Mädler, Schiaparelli et Terby, pour ne citer que les plus assidus, n'ont pas laissé moins de 1092 dessins qui ont permis de fixer, avec une certaine précision, l'aréographie de cette planète. L'intérêt de ces observations s'est accru de la notion de plusieurs analogies que Schiaparelli a établies entre Mars et la Terre, et dont on trouvera le détail dans l'Ouvrage.

Les deux planètes dont il vient d'être question sont immédiatement voisines de la Terre, mais celle-ci possède un satellite qui, par sa proximité relative, a fixé davantage l'attention des astronomes. Aujourd'hui, grâce aux progrès accomplis dans l'Optique, la connaissance des conditions physiques de la Lune a acquis un degré de précision très satisfaisant. Nous n'y reviendrons pas ici; elle est trop répandue pour que nous ayons à y insister. Nous aurions voulu cependant que l'auteur empruntât quelques remarques à l'excellente Notice que M. Faye a consacrée à la géologie de la Lune, et que les importants travaux de Delaunay fussent au moins indiqués à propos des perfectionnements considérables apportés au calcul des Tables du mouvement de la Lune.

La deuxième Partie, la plus étendue de l'Ouvrage, renferme l'étude des propriétés générales relatives aux dimensions et au mouvement du globe terrestre. On y considère, au Chapitre I, la Terre comme sphère et comme sphéroïde de révolution.

Développement successif de la doctrine de la sphéricité. L'auteur ne fait ici que le résumer, car il y a consacré ailleurs un Mémoire, avec tous les détails désirables ([1]).

Exposé des méthodes suivies pour évaluer la grandeur de la Terre par la dépression de l'horizon; méthode de Ghetaldi, modifiée par Dufour; méthode de Klose. Ces moyens, qui manquent de précision, sont avantageusement remplacés par les mesures de longueur d'arc de méridien ou de parallèles, qui depuis Érato-

([1]) *Bulletin*, octobre et novembre 1878.

sthène, Picard, Cassini, ont illustré le nom des astronomes du siècle dernier et du commencement de notre siècle. L'auteur a mis largement à contribution les indications historiques et techniques fournies par les Ouvrages spéciaux, dont le compte rendu, inséré au *Bulletin* (1), a été emprunté au *Journal des savants* (novembre 1874); Baeyer, *Triangulation d'un arc de parallèle de l'Europe centrale,* 1861; *Rapports annuels sur cette opération de* 1863 *à* 1873; Listing, *Notions actuelles de la figure et de la grandeur du globe,* 1872.

Nous ne pouvons mieux faire que de renvoyer le lecteur à l'exposé de ces remarquables travaux, qui ont désormais fixé les bases de la Géodésie.

M. Günther a trouvé aussi de précieux renseignements dans un opuscule plus récent de M. Bruns : *La figure de la Terre,* 1878, dont il a été question dans le *Bulletin* (2).

Il rappelle ensuite brièvement les principales formules du sphéroïde terrestre : aplatissement, latitudes géographiques et géocentriques, expression de l'excentricité déduite de deux diamètres de l'ellipse méridienne, ou de la longueur d'un arc du méridien (formule de Bohnenberger); rayon de la sphère de même volume que le sphéroïde; dimensions de ce dernier.

Objections diverses à la base fondamentale de la géographie mathématique. Hypothèse de l'érosion; hypothèse de l'ellipsoïde à trois axes inégaux; hypothèse de Fergola et recherche de la situation de l'axe de figure de la Terre relativement à son axe de rotation.

Chap. II : Les phénomènes de l'attraction et leur application à la recherche de la figure et de la densité de la Terre.

Exposé des méthodes fondées sur l'observation directe de l'attraction exercée par les diverses régions du globe. Appareils imaginés dans ce but par Hengler, Perrot, Zöllner; baromètre à gravité de Boussingault et Mascart, etc.

Aperçu historique de l'emploi du pendule dans les recherches relatives à la Physique du globe. La première observation de la variation de la durée d'oscillation du pendule appartient à Richer

---

(1) Décembre 1875.
(2) Juillet 1878.

qui reconnut, en 1671, que le pendule de Paris retardait à Cayenne. Il attribua ce fait à une variation de la gravité, ce qui donna une nouvelle confirmation aux idées récentes de Newton sur la forme du globe terrestre. Toutefois, en France, on ne fut pas éloigné de croire que l'élévation de la température moyenne sous les tropiques devait aussi avoir une influence sur la nature de ce phénomène; on oubliait seulement qu'il eût fallu pour cela une différence de 200° de température entre la France et la Guyane, comme l'a fait remarquer M. R. Wolff.

Anciennes méthodes de détermination de la densité du globe :

1° Par l'attraction des montagnes. C'est ainsi que Maskelyne et Hutton évaluèrent la déviation que le mont Shealliien, en Écosse, faisait éprouver au fil à plomb. Ils en conclurent une densité de 4,7, résultat remarquablement approché, si l'on songe à la difficulté de mesurer exactement le volume et la densité moyenne d'une montagne. James, qui reprit ces expériences un siècle plus tard, parvint au résultat plus précis de 5,32.

Dans le même ordre d'idées, Struve et Peters ont proposé d'observer les déviations produites, soit par un bras de mer, soit par la grande pyramide d'Égypte.

2° Par les mesures du pendule dans les puits de mine. Les observations d'Airy en 1826 avaient conduit à 2,5; Haughton les a discutées à nouveau et a trouvé 5,48.

3° Par la balance de torsion (Cavendish, Cornu et Baille).

Le Chapitre III, intitulé *la Géoïde,* nous donne de nouveaux détails sur une notion récemment introduite par Listing et déjà étudiée par M. Bruns [1]. Nous y renverrons donc le lecteur.

Au Chapitre IV, on traite du mouvement de la Terre dans l'espace.

Revision rapide du développement de la doctrine de la rotation de notre planète autour d'un axe. Invariabilité de position de cet axe et de la durée de la rotation.

Conséquences de ce mouvement et vérifications expérimentales (déviation de chute des corps vers l'est, etc.) au nombre desquelles on a voulu ajouter des observations, plus ou moins fondées, tirées

[1] Voir *Bulletin*, juillet 1878.

de l'érosion des fleuves, de l'usure des bandages de roues sur les chemins de fer et même de déviations dans la structure des plantes.

Mais la plus remarquable confirmation directe du mouvement de la Terre a été donnée par les célèbres expériences de Foucault sur le pendule, dont la théorie a été le point de départ d'un grand nombre de beaux Mémoires mathématiques.

Après avoir énuméré les divers systèmes astronomiques imaginés par Eudoxe, Ptolémée, les Égyptiens et Tycho Brahe, l'auteur expose la réforme de Copernic et les preuves qu'elle a tirées des phases des planètes, de la parallaxe annuelle des étoiles et de l'aberration de la lumière.

Énoncé et démonstration des trois lois de Kepler; exposé des trois principales perturbations du mouvement de la Terre, les variations séculaires de l'obliquité de l'écliptique, de l'excentricité et de la longitude du périhélie. Les conséquences possibles ou probables de ces inégalités ont été étudiées par Adhémar et Croll ([1]).

Enfin un intéressant paragraphe est consacré aux autres perturbations du mouvement de la Terre, la précession des équinoxes et sa démonstration mécanique ([2]), la nutation et le mouvement général du système solaire dans l'espace, sur une orbite non encore complètement déterminée, et dans une direction qui aboutit actuellement à un point de la constellation d'Hercule, d'après les études d'Argelander et de quelques autres astronomes.

Le Chapitre V traite des procédés graphiques mis au service de la Physique du globe.

Au premier rang, il faut compter la représentation au moyen de cartes, dont les procédés usuels sont la projection orthographique, la projection stéréographique, la projection gnomonique (étudiée par l'auteur dans une monographie publiée au *Zeitschrift der Gesel. für Erdkunde zu Berlin,* 1883), la projection de Mercator ([3]), la projection conique et une dizaine d'autres procédés plus ou moins analogues aux précédents.

([1]) Voir *Bulletin,* mars 1879.

([2]) Voir au *Bulletin,* août 1882, le Mémoire de M. Gilbert, *Sur les preuves mécaniques de la rotation de la Terre.*

([3]) Voir aussi *Bulletin,* août 1879.

Après les cartes d'ensemble, il faut préciser les détails. On y arrive par une représentation systématique des variations de hauteur ou de profondeur, suivant les procédés de perspective, ou de teintes graduées, ou de hachures, ou de courbes de niveau à cotes équidistantes (idée qui paraît due à Millet de Mureau, 1748); puis, par une évaluation des surfaces, à propos de laquelle nous ne pouvons mieux faire que de renvoyer à l'excellente monographie publiée en 1882 par M. P. Mansion; enfin, par d'autres moyens plus spéciaux, tels que les plans reliefs, les globes, les panoramas.

La troisième Partie est intitulée : *De la Géophysique dans un sens plus restreint; Géologie dynamique.*

Chapitre I : Variation de la température dans l'intérieur du globe.

Pénétration de la chaleur solaire. Accroissement de la température du sol à partir de la zone invariable. Observations faites dans les puits de mines, dans les sondages et dans les tunnels. Résultats généraux et conséquences théoriques.

Les controverses auxquelles a donné lieu l'étude de la constitution probable de l'intérieur du globe terrestre sont exposées en détail dans le Chapitre II et dans une grande partie du Chapitre III. L'auteur passe en revue les hypothèses anciennes, les principes en faveur de la solidité continue, les raisons pour et contre la théorie de l'élasticité de l'intérieur du globe, la conception de l'état gazeux de la masse centrale de la Terre, et l'hypothèse d'une masse centrale formée d'un mélange de lave.

Comme on le voit, la certitude est encore loin d'être obtenue dans ces difficiles recherches.

Au Chapitre III, on s'occupe des phénomènes volcaniques, qui tiennent une large place dans la Physique du globe. Ils représentent en effet, à notre époque, les plus anciennes manifestations violentes dont notre planète a dû être le théâtre à une époque extrêmement éloignée.

L'alternance et la succession des couches de terrains autour des volcans et sous l'action des forces intérieures a donné lieu à quelques essais analytiques de la part de Français et de Löwe; mais il ne semble pas qu'il en soit résulté de nouveaux éclaircissements sur la structure et le mécanisme des volcans.

Les géologues ont aussi classé parmi les phénomènes volcaniques ceux qui s'observent dans les geysers (Islande), les fume-

rolles (Pantellaria), les solfatares (Pouzzoles), les salses (Italie, Chine, etc.), les mofettes (Naples, Java, etc.), les maccalubes (Italie) et enfin, par extension, les sources thermales et les phénomènes éruptifs, étudiés par Ch. Sainte-Claire Deville et M. Fouqué.

Pour revenir aux volcans proprement dits, mieux caractérisés par la nature ignée de leurs éruptions, les géologues les ont classés en séries et en catégories, comprenant douze variétés dans le bel Ouvrage de Léopold de Buch. La distribution géographique des volcans, encore actifs ou actuellement éteints, a été rappelée d'après les géologues qui font autorité. Il n'est pas inutile de signaler à ce sujet l'*Astronomie* d'Arago et les *Traités de Géologie* de Beudant et d'Ach. Comte.

Les produits des éruptions volcaniques, leur origine probable, leur mode de formation et les autres particularités qui s'y rattachent, sont autant de questions sur lesquelles l'auteur donne aussi d'intéressantes remarques.

Le quatrième et dernier Chapitre renferme l'exposé des connaissances actuelles relatives au phénomène des tremblements de terre.

Leur étude a beaucoup gagné à la discussion des statistiques et des relevés chronologiques établis par Mallet, Perrey et quelques autres observateurs, mais c'est M. de Rossi qui a ramené l'attention et qui a obtenu d'y intéresser un grand nombre de physiciens, en jetant les bases d'une météorologie endogène, qui se propose de suivre et de mesurer les mouvements sismiques dont la croûte terrestre est le siège.

Dans la description des circonstances qui accompagnent les secousses de tremblement de terre, nous désirerions une indication plus complète des résultats si intéressants que les géologues et physiciens ont déduits de l'observation du terrible cataclysme du 27 août 1883, près de l'île de Java. C'est, en effet, le premier exemple d'une aussi nombreuse série de phénomènes ayant eu un pareil retentissement dans l'atmosphère terrestre et dans la masse des eaux de l'océan Pacifique, et pour laquelle il ait été possible de les étudier complètement, grâce à la multiplicité des moyens d'observation dont on dispose, depuis quelques années, sur la totalité du globe.

Indices précurseurs des secousses et moyens proposés pour préserver les constructions. Appareils de constatation des secousses (séismographes et sismomètres). Géométrie et Mécanique du centre et des lignes sismiques. Hypothèses diverses de l'origine probable des tremblements de terre. Distinction fondamentale entre les secousses volcaniques et celles qui résultent de fractures et d'éboulements mécaniques.

Ici se termine le compte rendu, que nous aurions très volontiers développé davantage; nous croyons cependant qu'il suffira pour montrer l'intérêt qui s'attache à ce Traité de Géophysique.

Nous ne voulons pas donner d'importance aux petites lacunes rencontrées ou signalées dans les indications bibliographiques qui constituent le fonds même de l'Ouvrage. Elles doivent disparaître devant l'impression favorable que produit le soin attentif avec lequel l'auteur s'est appliqué à rechercher et à faire connaître avec précision à quel savant ou philosophe il faut attribuer l'honneur de tel ou tel progrès réalisé dans chaque branche des connaissances humaines. Les livres dits *classiques* laissent trop de côté ces renseignements, et c'est pourtant une grande satisfaction que de pouvoir connaître l'histoire de chaque question envisagée séparément. Avec M. Günther, on est habitué à cette recherche de la vérité historique, et nous ne croyons pouvoir mieux conclure qu'en souhaitant que cet utile exemple soit désormais suivi par tous les géomètres dans la rédaction de leurs Ouvrages.

H. B.

DESPEYROUS, ancien professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse. — COURS DE MÉCANIQUE, avec des Notes par M. G. DARBOUX, Membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences. 1 vol. grand in-8°, IX-457 p. A. Hermann; Paris, 1884.

L'Introduction est destinée à définir l'objet de la Mécanique rationnelle et l'ordre que l'auteur a cru devoir suivre dans son Ouvrage. Adoptant les idées des plus grands géomètres du commencement de ce siècle, l'auteur fait précéder l'étude de la Dynamique de celle de la Statique.

Première Partie. — *Statique.*

La Statique a pour objet de résoudre un problème parfaitement défini : *Trouver les conditions d'équilibre d'un système de forces appliquées à un corps solide.* C'est de l'énoncé même du problème que l'auteur déduit la marche qu'il doit suivre pour le résoudre. Il se trouve amené à la notion de *résultante* et de *composante,* et à la composition des forces concourantes. Une remarque ingénieuse le conduit de la composition des forces concourantes à celle de forces parallèles considérée comme un cas limite.

La théorie des forces parallèles à son tour entraîne à la recherche des centres de gravité, qui occupe tout le Chapitre III. Nous y relevons l'examen de plusieurs questions intéressantes, comme le centre de gravité de l'aire du triangle sphérique, une extension du second théorème de Guldin et enfin les célèbres propriétés du centre de gravité d'un système de points matériels. Le Chapitre IV est consacré à la théorie des couples. Maître dès lors de tous les éléments nécessaires pour résoudre le problème général de la Statique, l'auteur aborde, dans le Chapitre V, la théorie de la composition et de l'équilibre des forces qui agissent sur un corps solide. La question y est traitée avec détails. Réduction des forces à une force et à un couple, cas d'une résultante unique, usage des moments, leur identité avec les couples, systèmes équivalents, théorie de l'axe central, étude de la réduction des forces à deux et des propriétés spéciales à ce mode de réduction, rien n'a été oublié, et chaque chose s'y trouve en sa place, qualité bien rare quand il s'agit d'exposer une théorie aussi complexe que celle des systèmes de forces et de leur équivalence.

Les applications de la solution du problème général se présentent naturellement dans le Chapitre suivant *Équilibre d'un système qui n'est pas libre,* ainsi que dans le VIIe et dernier *Equilibre des fils.* Les équations de l'équilibre d'un fil y sont établies par une méthode vraiment rigoureuse et qui ne laisse rien à désirer. Le problème de la chaînette et celui des ponts suspendus y sont non seulement résolus, mais encore minutieusement discutés.

Deuxième partie. — *Cinématique.*

La Cinématique précède la Dynamique à laquelle elle fournit la ressource indispensable de ses formules qui traduisent les propriétés géométriques du mouvement. C'est dans ce but que doit être traitée la Cinématique dans un volume exclusivement théorique. Aussi ne s'est-on pas préoccupé dans cet Ouvrage des applications possibles de la Cinématique à la théorie des mécanismes, ni des propriétés trop géométriques qui paraissent appartenir moins à la Mécanique qu'à cette dérivation de la Cinématique dont le nom est récent, la Géométrie cinématique.

Les démonstrations y sont géométriques et directes, et celle du théorème de Coriolis notamment est aussi simple que l'on puisse le désirer, sans sacrifier la rigueur. Voici les titres des Chapitres qui composent cette Partie :

Chap. I. — Mouvement du point matériel; vitesse.
Chap. II. — Accélération dans le mouvement d'un point matériel.
Chap. III. — Mouvement d'un corps solide.
Chap. IV. — Mouvement composé et mouvement relatif d'un point.
Chap. V. — Composition des mouvements d'un corps solide.

Troisième Partie. — *Dynamique du point matériel.*

La Dynamique constitue la partie la plus importante et la plus originale de l'Ouvrage; dans le premier Chapitre l'auteur aborde la question si délicate des principes de la Dynamique qui a prêté et peut encore prêter à tant de controverses. En débutant par l'énoncé précis des principes fondamentaux, l'auteur se place tout de suite sur le terrain géométrique qui s'ouvre alors sans obstacle à la Dynamique, dans laquelle s'offre tout d'abord l'étude du mouvement rectiligne du point matériel. Cas de la pesanteur ou de l'attraction par des centres fixes, tels sont les types généraux des problèmes résolus, en y joignant ceux où entre la considération de la résistance du milieu. L'auteur n'a pas omis le cas, qu'il est important de signaler aux élèves, où les équations du problème sont différentes suivant le sens du mouvement.

Dans le Chapitre III, on établit les équations générales du mouvement curviligne, directement déduites des principes fondamentaux énoncés au début.

Comme première application, le Chapitre IV est tout entier consacré à une étude très soignée du mouvement des projectiles avec diverses hypothèses sur la loi de la résistance de l'air.

Le Chapitre V est particulièrement remarquable. On ne peut songer dans un livre d'enseignement à donner un grand développement à la belle théorie que Lagrange, Poisson, Cauchy, Jacobi, Bertrand et Bour ont édifiée sur les équations générales de la Dynamique. Mais l'auteur a pu en quelques lignes donner un aperçu très net sur le point de départ de ces grandes découvertes.

La définition des *intégrales* y est très clairement donnée, et le théorème des forces vives se trouve ainsi spontanément amené pour fournir dans certains cas l'intégrale des forces vives. Les cas où il existe une fonction de force, les propriétés des surfaces de niveau, l'application du théorème des forces vives à divers exemples remplissent ce Chapitre intéressant, qui se termine par quelques pages sur la définition et l'usage de la locution *travail*.

Le théorème des forces vives trouve une belle application dans l'étude du mouvement d'un point matériel sur une courbe fixe. Ce problème est traité dans le Chapitre VI, et un cas particulier est abordé dans le Chapitre VII, à savoir le mouvement d'un point pesant sur une courbe fixe.

Ce dernier problème offre un grand intérêt, soit à cause des singularités analytiques qu'il présente dans les formules, soit à cause des cas particuliers qui ont occupé les plus grands géomètres à la naissance même du Calcul infinitésimal. Cela explique les développements avec lesquels il se trouve traité. C'est ainsi que le Chapitre VIII est entièrement consacré au mouvement du pendule simple avec diverses lois de résistance, que le Chapitre IX s'occupe plus spécialement de la célèbre propriété qu'offre la cycloïde d'être tout à la fois tautochrone et brachistochrone pour la pesanteur. On trouvera aussi dans ce Chapitre des considérations générales sur les tautochrones et les brachistochrones avec des applications. Enfin le Chapitre X termine la dynamique du point matériel par la théorie classique des forces centrales, suivie d'une application très développée aux lois de Kepler et de nombreux et intéressants exercices.

Tel est, dans son ensemble, le tome Ier de l'Ouvrage que vient de publier M. Hermann. Le cours de M. Despeyrous est essentiel-

lement un Ouvrage d'enseignement; il se recommande aux étudiants de nos Facultés, non seulement par l'ordre parfait qui règne dans l'ensemble, mais encore par le soin minutieux que l'éminent professeur de la Faculté de Toulouse a apporté dans les détails. Les discussions des problèmes y sont menées jusqu'au bout, condition bien précieuse pour un livre destiné à servir de guide aux élèves.

Pour ajouter encore au mérite de l'Ouvrage, M. Darboux l'a enrichi de Notes relatives à diverses questions de Mécanique. Certaines de ces Notes ont trait à des questions que M. Darboux a développées complètement dans des Mémoires insérés dans divers Recueils scientifiques; d'autres offrent des résultats entièrement nouveaux. Voici la liste de ces Notes :

Note I. — Sur la composition des forces en Statique.
Note II. — Relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité.
Note III. — Sur le centre de gravité de certains volumes.
Note IV. — Sur le système de quatre forces en équilibre.
Note V. — Sur l'équilibre astatique.
Note VI. — Sur les lignes géodésiques de l'ellipsoïde.
Note VII. — Problème de Mécanique.
Note VIII. — Sur le mouvement d'une figure invariable.
Note IX. — Sur un nouvel appareil à ligne droite de M. Hart.
Note X. — Sur la brachistochrone relative à un point matériel pesant.
Note XI. — Sur une loi particulière de la force signalée par Jacobi.
Note XII. — Sur les lois de Kepler.
Note XIII. — Sur le tautochronisme en ayant égard au frottement.

G. K.

MÉLANGES.

QUESTIONS HÉRONIENNES

PAR M. PAUL TANNERY.

III.

Je reviens maintenant à la question de l'extraction des racines incommensurables chez les anciens, pour présenter quelques remarques qui m'ont été suggérées par la lecture des travaux récemment publiés sur cette question.

Dans mon essai *Sur la mesure du cercle d'Archimède* (¹), j'ai proposé la restitution de la méthode d'invention qui m'a paru la plus naturelle et la plus conforme à l'ordre d'idées historiquement établi pour la solution de l'équation de Pell. Mais je tiens à bien constater que, abstraction faite des Hindous, il n'y a aucune preuve positive que cette solution ait été connue avant Fermat.

Le seul indice grave que nous possédions pour une découverte antérieure de cette solution consiste, en effet, dans le fameux *problème des bœufs* attribué à Archimède, et dont l'authenticité reste sujette à caution; si l'on écarte ce problème, le choix de certaines valeurs approximatives de $\sqrt{3}$ fait par Archimède dans sa *Mesure du cercle*, est entièrement insuffisant pour attribuer au géomètre de Syracuse la connaissance de la solution de l'équation de Pell.

On peut de même rencontrer, bien avant Fermat, d'autres valeurs approximatives de racines incommensurables correspondant à des solutions particulières d'équations de Pell, mais il ne peut être permis d'en conclure la connaissance d'une solution théorique, car ces solutions particulières peuvent avoir été obtenues par tel ou tel procédé d'approximation dans l'extraction de la racine.

Le procédé qui me paraît devoir être essayé de préférence est celui que M. Günther (²) a développé comme lui ayant été proposé par M. Radicke, dans une correspondance particulière. J'avais d'ailleurs déjà posé, dans l'essai que je viens de rappeler, le principe de ce procédé que je désignerai par R, par opposition au principe que j'indiquerai par la lettre T, et qui est celui que j'ai proposé comme représentant le mode de calcul employé dans l'École héronienne.

Pour bien faire comprendre en quoi diffèrent ces deux procédés, je ferai tout d'abord remarquer qu'ils peuvent être considérés comme exclusivement arithmétiques et uniquement fondés tous deux en principe, comme notre méthode vulgaire, sur l'ap-

---

(¹) *Mémoire de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. IV_2, p. 313-337.

(²) *Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden* dans les *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, IV.

proximation

$$\sqrt{A} \backsim a + \frac{r}{2a},$$

si l'on a

$$A = a^2 + r\,(^1).$$

Les deux procédés supposent également la détermination successive de *quantièmes* dans une suite que je représenterai par

$$\frac{x_n}{y_n} = E + \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} + \ldots + \frac{1}{d_n},$$

les lettres étant supposées représenter des nombres entiers et x_n et y_n étant premiers entre eux.

En particulier, dans cette notation :

$$x_0 = E, \qquad y_0 = 1,$$
$$x_1 = E d_1 + 1, \quad y_1 = d_1.$$

J'ai sans doute à peine besoin de faire remarquer que la réduction au même dénominateur, que je suppose par la notation $\frac{x_n}{y_n}$, devait être chez les anciens évitée généralement comme essentiellement contraire au principe même du mode de représentation suivi pour les fractions; mais, dans la suite des temps, lorsque ce mode a été abandonné, cette réduction est, au contraire, devenue de règle.

Si l'on suppose déterminés successivement n dénominateurs, il s'agit d'obtenir le suivant, d_{n+1}.

Soit posé $\frac{x_n}{y_n} = a$, le reste r de l'extraction de la racine sera nécessairement de la forme $\frac{R_n}{y_n^2}$, et le terme complémentaire de l'approximation est

$$\frac{r}{2a} = \frac{R_n}{2x_n y_n}.$$

Au lieu de déterminer d_{n+1}, les héroniens pouvaient d'ailleurs :

1° Soit développer le terme complémentaire en une suite de *quantièmes* suivant les procédés propres à ce genre de développement, et pour l'étude desquels j'ai réuni plus haut l'ensemble des matériaux fournis par la collection héronienne;

---

(1) Je représente, avec MM. Cantor et Günther, l'égalité approximative par le signe $\backsim$.

2° Soit limiter ce développement (en forçant ou non son dernier terme) de manière à négliger les fractions à dénominateur trop élevé, dépassant 100 par exemple.

Il peut d'ailleurs se faire, exceptionnellement, que $2x_n y_n$ soit divisible par R_n : dans ce cas, on a naturellement

$$d_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{R_n};$$

dans ce cas singulier, R_{n+1} et les numérateurs suivants des restes soit nécessairement égaux à -1, et dès lors x_{n+1}, y_{n+1}, comme les couples suivants, forment des solutions particulières de l'équation de Pell

$$x^2 - Ay^2 = 1.$$

Mais, dans le cas général, si l'on veut déterminer d_{n+1}, deux systèmes différents peuvent être adoptés.

Procédé T. — On peut prendre pour d_{n+1} la partie entière du quotient $\frac{2x_n y_n}{R_n}$ ou cette partie entière augmentée d'une unité, suivant que l'on veut obtenir l'approximation par excès ou par défaut. C'est évidemment le procédé le plus naturel et aussi le plus simple, si l'on ne calcule que deux ou trois termes successifs de la suite.

Procédé R. — Dès que l'on veut poursuivre l'approximation plus loin, la nécessité des réductions au même dénominateur s'impose, et il y a lieu de chercher à simplifier les calculs ; on a un moyen très simple en faisant entrer y_n comme facteur dans le nouveau dénominateur à déterminer.

Soit donc z_n une valeur entière approchée (en plus ou en moins) de $\frac{2x_n}{R_n}$, on posera

$$d_{n+1} = y_n z_n = y_{n+1},$$

d'où

$$x_{n+1} = x_n z_n + 1,$$

et

$$R_{n+1} = (R_n z_n - 2x_n) z_n - 1.$$

Il faut d'ailleurs remarquer que, comme

$$x_n^2 = A y_n^2 + R_n,$$

si A est entier, comme x_n, y_n sont supposés premiers entre eux, R_n et y_n le seront également; il conviendra d'ailleurs de supprimer, le cas échéant, les facteurs communs à x_{n+1} et y_{n+1}, déterminés comme ci-dessus, ce qui permettra de diviser R_{n+1} par le carré de ces facteurs communs.

Il est clair d'ailleurs que, si l'application du procédé T est limitée au calcul de deux termes, il donnera les mêmes résultats que le procédé R. Il peut donc être difficile d'établir en fait lequel de ces deux procédés a été suivi dans ce cas, et c'est celui des approximations que l'on retrouve dans les collections héroniennes.

Je ne me suis donc déterminé, pour le premier de ces deux procédés, que par des conditions *a priori;* théoriquement, en effet, il est plus simple; d'autre part, le second repose sur l'hypothèse que, dans les suites héroniennes de *quantièmes*, chaque dénominateur doit être un multiple du précédent; or ce principe n'a jamais été suivi, ni par les Égyptiens, ni par l'École héronienne.

Mais il me semble au moins très probable que le procédé R a été adopté plus tard par certains calculateurs pour obtenir des approximations poussées assez loin et, en particulier, pour arriver par tâtonnement à des solutions d'équations de Pell.

Je l'ai notamment appliqué avec succès aux douze solutions signalées par M. Perott [1], dans l'édition de 1534, du *Tratado subtilissimo de Arismetica y de Geometria* du dominicain Juan de Ortega. Toutes s'obtiennent, grâce au procédé R, poussé du premier au quatrième degré d'approximation, comme l'indique le Tableau suivant :

$$(1)\qquad \sqrt{128} \backsim 11\frac{16}{51} = 11 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.17},$$

$$(2)\qquad \sqrt{80} \backsim 8\frac{17}{18} = 9 - \frac{1}{18},$$

$$(3)\qquad \sqrt{297} \backsim 17\frac{659}{2820} = 17 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4.15} + \frac{1}{4.15.47},$$

$$(4)\qquad \sqrt{300} \backsim 17\frac{25}{78} = 17 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.26},$$

$$(5)\qquad \sqrt{375} \backsim 19\frac{285}{781} = 19 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.11} + \frac{1}{11.71}.$$

---

[1] *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze mathematiche e fisiche*, avril 1882.

(6) $\sqrt{135} \backsim 11\frac{13}{21} = 12 - \frac{1}{3} - \frac{1}{21}$ (racine héronienne),

(7) $\sqrt{75} \backsim 8\frac{103}{156} = 9 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3.52}$,

(8) $\sqrt{756} \backsim 27\frac{109}{220} = 27 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.110}$,

(9) $\sqrt{611} \backsim 24\frac{6886}{9585} = 25 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.6} - \frac{1}{3.6.15} - \frac{1}{3.3.15.71}$,

(10) $\sqrt{231} \backsim 15\frac{151}{760} = 15 + \frac{1}{5} - \frac{1}{5.152}$,

(11) $\sqrt{800} \backsim 28\frac{197}{693} = 28 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.7} - \frac{1}{3.7.33}$,

(12) $\sqrt{4100} \backsim 64\frac{1}{32} = 64 + \frac{1}{32}$.

Cette application suffit pour montrer la valeur du procédé R.

On pourra remarquer que, pour les racines (7), (8), (10), une solution de l'équation de Pell a déjà été obtenue au précédent degré d'approximation, de même que pour (2) la partie entière fournit déjà une solution semblable.

M. Perott a encore signalé l'approximation

$$\sqrt{2000} \backsim 44\frac{2079}{2582},$$

qu'il considère comme la réduite $44\frac{1719}{2383}$, à des fautes d'impression près.

Il est très probable, en effet, que les nombres imprimés sont fautifs, mais leur correction ne peut être qu'aventureuse.

Je me contenterai donc des remarques suivantes : si le dénominateur 2582 est exact, la valeur la plus approchée par le numérateur est 1863 qui est égal à 207×9, en sorte que l'erreur a pu provenir de ce que, dans ce dernier produit, le signe de la multiplication a été omis.

D'autre part, $\sqrt{2000} = 20\sqrt{5}$, et pour $\sqrt{5}$ la série de Fibonacci avait pu conduire facilement à l'approximation

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \backsim \frac{1597}{2584},$$

d'où

$$\sqrt{5} \backsim \frac{5778}{2584} \quad \text{et} \quad 20\sqrt{5} \backsim 44\frac{1864}{2584}.$$

Or $1864 = 207 \times 9 + 1$. De même 2584 a 1 pour résidu par rapport à 9. Il semble donc qu'un calculateur ait voulu simplifier la fraction $\frac{1864}{2584}$ en diminuant les deux termes d'une unité et en divisant haut et bas par 9, mais qu'ensuite son opération n'ait pas été comprise ou qu'il l'ait lui-même abandonnée après avoir reconnu que $\frac{1863}{2582}$ est de fait plus approchée que $\frac{1863}{2583} = \frac{207}{287}$.

IV.

Depuis l'important travail que j'ai signalé plus haut de M. Siegmund Günther, sur l'extraction approximative des racines carrées, je dois particulièrement appeler l'attention sur deux récents essais dus à M. Hundrath ([1]), parce qu'ils ont suffisamment approfondi la question telle que je l'avais posée, pour me conduire à préciser davantage mon point de vue particulier.

Je fais abstraction des considérations propres à M. Hundrath, dans lesquelles il cherche à restituer l'ordre d'idées suivi par les Grecs, en admettant, par exemple, qu'ils se sont aidés de raisonnements sur des figures géométriques; cette opinion a une grande probabilité historique sinon pour l'invention, au moins pour la démonstration qui a dû suivre l'invention presque immédiatement; mais je crois pouvoir me borner au point de vue spécialement arithmétique.

La restitution de la méthode héronienne, telle que je l'ai essayée, comportait deux éléments distincts :

1° La constatation du fait que les suites de quantièmes dans les approximations héroniennes ont été partiellement calculées au moyen du développement d'un terme complémentaire $\frac{r}{2a}$.

2° La détermination des règles de calcul suivies dans le choix des approximations successives donnant naissance à ces termes complémentaires.

([1]) *Ueber das Ausziehen der Quadratwurzel bei Griechen und Indern*, Hadersleben, Schütze et Festersen, 1883. *Die Berechnung irrationaler Quadratwurzeln vor der Herrschaft der Decimalbrüche*, Kiel, Lipsius et Tischer, 1884.

Sur le premier point, M. Hundrath est, comme M. Günther, parfaitement d'accord avec moi, et il me semble qu'en fait il n'y a plus aujourd'hui matière à aucun doute; sur le second point, au contraire, la discussion peut rester ouverte.

Ainsi j'ai déjà indiqué le doute qui peut subsister sur le choix théorique entre les deux procédés que j'ai désignés par les lettres T ou R. D'autre part, les règles de calcul que j'avais admises pour le procédé T ont été présentées par moi comme laissant une certaine latitude à l'habileté du calculateur; on peut se demander si cette latitude n'allait pas encore plus loin.

Ainsi j'avais admis en principe que, pour éviter des réductions subséquentes, les premières approximations devaient être faites régulièrement par défaut. Mais, si l'on n'admet que deux degrés d'approximation au plus, si l'on remarque d'autre part, qu'en fait dans les exemples héroniens, pour le second degré d'approximation, la première fraction, en valeur absolue, est toujours $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{4}$, le motif mis en avant n'est guère valable, puisque, avec ces fractions, les réductions peuvent se faire immédiatement; il est même clair qu'il est plus facile de calculer le reste pour $(a+1)-\frac{1}{3}$ que pour $a+\frac{2}{3}$.

M. Hundrath a systématiquement essayé les approximations par excès et il est ainsi arrivé à des simplifications incontestables et à des réductions dans le degré d'approximation supposé; à la vérité, dans son premier travail il a admis, contrairement à mon opinion, que le calcul pouvait être poussé jusqu'au quatrième degré. Mais, dans son second essai, il est revenu sur cette conjecture et s'est borné au deuxième degré, tandis que j'avais été jusqu'au troisième. Je pense que sa dernière conclusion, à laquelle j'étais déjà arrivé de mon côté à la suite de son premier travail, est de beaucoup plus probable et qu'en thèse générale on doit admettre les premières approximations par excès toutes les fois qu'elles conduisent plus simplement au résultat. On doit avoir d'autant moins de scrupule à cet égard que l'emploi d'un terme négatif se rencontre déjà effectivement dans la collection héronienne; que l'usage alternatif de termes positifs et négatifs semble

avoir été chez les Hindous l'objet d'une certaine préférence; qu'enfin l'heureuse application que nous avons vue plus haut du système R, suppose également l'emploi de termes négatifs.

Voici donc comment je classerais aujourd'hui les racines héroniennes que je considère comme calculées directement. Les numéros qui les marquent sont ceux de mon premier travail. Je les subdiviserai en trois groupes pour chacun des deux degrés d'approximation, et je ferai remarquer que les procédés de calcul supposés ne présentent plus que des différences insignifiantes avec ceux admis en dernier lieu par M. Hundrath.

Premier degré.

1° *Solution immédiate de l'équation de Pell.*

(1) $\sqrt{63} \backsim 8 - \frac{1}{16}$,

(4) $\sqrt{50} \backsim 7 + \frac{1}{14}$,

(18) $\sqrt{720} \backsim 27 - \frac{9}{54} = 27 - \frac{1}{6} = 26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ (Hundrath).

2° *Premier quotient complet développé.*

(2) $\sqrt{1125} \backsim 33 + \frac{36}{66} = 33\frac{1}{2}\frac{1}{22}$,

(3) $\sqrt{1081} \backsim 32 + \frac{57}{64} = 32\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{64}$,

(5) $\sqrt{75} \backsim 8 + \frac{11}{16} = 8\frac{1}{2}\frac{1}{8}\frac{1}{16}$,

(23) $\sqrt{108} \backsim 10 + \frac{8}{20} = 10\frac{1}{3}\frac{1}{15}$.

On remarquera que la décomposition de $\frac{8}{20}$ ou $\frac{2}{5}$ en $\frac{1}{3}\frac{1}{15}$ est celle du papyrus d'Eisenlohr et qu'elle est d'ailleurs authentiquement héronienne.

3° *Premier quotient approché.*

(Les fractions entre crochets représentent les termes négligés par Héron)

A. Par excès.

$$(6)\quad \begin{cases} \sqrt{58\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16}} \backsim 8 - \dfrac{5\frac{1}{2}\frac{1}{16}}{16} \\ \quad = 8 - \frac{1}{3} + \frac{1}{48} - \frac{1}{32} - \frac{1}{256} = 7\frac{2}{3} - \left[\frac{1}{96} + \frac{1}{256}\right], \end{cases}$$

$$(7)\quad \sqrt{444\frac{1}{3}\frac{1}{9}} \backsim 21 + \frac{3\frac{1}{3}\frac{1}{9}}{42} = 21 + \frac{3\frac{1}{2}}{42} - \frac{1}{18.42} = 21\frac{1}{12} - \left[\frac{1}{756}\right],$$

$$(8)\quad \sqrt{3400} \backsim 58 + \frac{36}{116} = 58 + \frac{1}{3} - \frac{2}{87} = 58\frac{1}{3} - \left[\frac{1}{58} + \frac{1}{174}\right],$$

$$(16)\quad \sqrt{356} \backsim 19 - \frac{5}{38} = 19 - \frac{1}{8} - \frac{1}{152} = 18\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8} - \left[\frac{1}{152}\right],$$

$$(17)\quad \sqrt{5000} \backsim 70 + \frac{100}{140} = 70 + \frac{1}{2} + \frac{3}{14} = 70\frac{1}{2}\frac{1}{4} - \left[\frac{1}{28}\right],$$

$$(21)\quad \sqrt{8\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16}} \backsim 3 - \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{16}}{6} = 3 - \frac{1}{12} - \frac{1}{96} = 2\frac{2}{3}\frac{1}{4} - \left[\frac{1}{96}\right].$$

B. Par défaut.

$$(9)\quad \sqrt{54} \backsim 7 + \frac{5}{14} = 7 + \frac{1}{3} + \left[\frac{1}{42}\right],$$

$$(15)\quad \sqrt{356\frac{1}{18}} \backsim 7 - 19 - \frac{5 - \frac{1}{19}}{38} = 19 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \left[\frac{1}{114}\right] \backsim 18\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{9}.$$

Second degré.

1° *Solutions médiates de l'équation de Pell.*

$$(10)\quad \sqrt{135} \backsim 12 - \frac{1}{3} - \frac{1 + \frac{1}{9}}{24 - \frac{2}{3}} = 11\frac{2}{3} - \frac{10}{3.70} = 11\frac{1}{2}\frac{1}{14}\frac{1}{21},$$

$$(13)\quad \sqrt{1575} \backsim 40 - \frac{1}{3} + \frac{1\frac{2}{3} - \frac{1}{9}}{80 - \frac{2}{3}} = 39\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{14}{238} = 39\frac{2}{3}\frac{1}{51} \quad \text{(Hundrath)},$$

$$(14)\quad \sqrt{216} \backsim 15 - \frac{1}{3} + \frac{1 - \frac{1}{9}}{30 - \frac{2}{3}} = 14\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{8}{88} = 14\frac{2}{3}\frac{1}{33} \quad \text{(Hundrath)},$$

$$(22)\quad \begin{cases} \sqrt{886} - \frac{1}{16} \backsim 30 - \frac{1}{4} + \dfrac{1 - \frac{1}{8}}{60 - \frac{1}{2}} \\ \quad = 29\frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{7}{119} = 29\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{68} \quad \text{(Hundrath)}. \end{cases}$$

2° *Second quotient complet développé.*

$$(11)\quad \sqrt{43\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4}} \backsim 6 + \frac{1}{2} + \frac{1\frac{1}{2}}{13} = 6\frac{1}{2}\frac{1}{13}\frac{1}{26},$$

$$(12)\quad \begin{cases} \sqrt{6300} \backsim 79 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{6\frac{1}{3} - \frac{1}{9}}{158 + \frac{2}{3}} \\ \qquad = 79\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\dfrac{56}{476} = 79\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{51} = 79\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{34}\dfrac{1}{102}. \end{cases}$$

3° *Second quotient approché* (*par défaut*).

$$(19)\quad \sqrt{208} \backsim 14 + \frac{1}{3} + \frac{2\frac{2}{3} - \frac{1}{9}}{28\frac{2}{3}} = 14\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{23}{86} = 14\frac{1}{3}\frac{1}{12} + \left[\frac{1}{172}\right],$$

$$(20)\quad \sqrt{43\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4}\tfrac{1}{9}} \backsim 6 + \frac{1}{2} + \frac{1\frac{1}{2}\frac{1}{9}}{13} = 6\frac{1}{2} + \frac{1}{9}\frac{13\frac{1}{2}}{13} = 6\frac{1}{2}\frac{1}{9} + \left[\frac{1}{234}\right].$$

Quant aux deux racines

$$(24)\qquad \sqrt{2460\tfrac{15}{16}} \backsim 49\frac{1}{2}\frac{1}{17}\frac{1}{34}\frac{1}{51},$$

$$(25)\qquad \sqrt{615\tfrac{15}{64}} \backsim 24\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{51}\frac{1}{51}\frac{1}{68},$$

il me paraît de plus en plus certain qu'elles n'ont pas été obtenues directement, quoiqu'il n'y ait pas de difficulté réelle à les obtenir en faisant subir aux règles de calcul des dérogations plus ou moins importantes.

En résumé, sur *vingt-trois* racines qu'il faut faire entrer en ligne de compte, *treize* sont fournies exactement par le procédé supposé, *dix* le sont seulement en supposant négligés un ou deux termes du développement complet, dans des conditions où cette hypothèse a un haut degré de vraisemblance.

Mais, si l'on veut comparer ce procédé à tout autre que l'on supposera avoir été connu des Grecs, la question change. Comme, en effet, tout procédé doit, comme premier degré d'approximation, donner $\sqrt{a^2 + r} \backsim a + \frac{r}{2a}$, les quinze solutions du premier degré ne doivent pas entrer en ligne de compte, sauf le cas, très improbable *a priori*, où le procédé supposé donnerait rigoureusement, pour une transformation intermédiaire, avant de passer au second

degré, quelques-unes des solutions seulement approchées du premier degré. Il ne reste donc à considérer que huit racines, sur lesquelles notre procédé en donne six exactement contre deux seulement d'une façon approchée; il convient seulement de remarquer que, si l'on admet contre toute vraisemblance que les Grecs ont connu des moyens spéciaux pour obtenir la solution de l'équation de Pell, quatre des racines du deuxième degré doivent encore être écartées, et l'on ne se trouve plus posséder un nombre d'éléments suffisant pour asseoir une probabilité.

V.

Il est clair que la restitution d'un procédé pour l'évaluation approximative des racines carrées chez les Grecs ne doit pas entraîner la conviction que ce procédé ait été le seul connu, et ne doit pas arrêter, par suite, les tentatives pour établir l'existence de tel ou tel autre.

Historiquement, d'ailleurs on trouve vers le commencement du XIVe siècle, chez les Byzantins (Barlaam, Nicolas Rhabdas), un procédé dont M. Günther a fait remarquer l'existence chez les Latins du XVe siècle (Lucas Pacioli) et qui a été réinventé plus tard.

De la première approximation de $\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r}$,

$$X_0 = a + \frac{r}{2a},$$

laquelle est par excès; on en déduit une autre du même degré par défaut,

$$x_0 = \frac{A}{X_0},$$

puis une du second degré par excès,

$$X_1 = \frac{X_0 + x_0}{2}.$$

Le procédé peut être indéfiniment poursuivi.

Il est facile de reconnaître, en tout cas, qu'il n'a pas été em-

---

(1) *Voir* mon étude sur *Emmanuel Moschopoulos et Nicolas Rhabdas* dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, 1884.

ployé pour le calcul des approximations héroniennes, en écartant, comme on doit le faire, le premier degré.

Je ne m'arrête pas aux propriétés de ce procédé, si bien étudiées en particulier par M. Günther; je m'occuperai spécialement d'un autre proposé par M. Heilermann et défendu par M. Weissenborn, comme susceptible d'expliquer les approximations d'Archiméde et de Héron.

Dans son plus récent travail (*Zeitschrift für Math. u. naturw. Unterricht,* t. XV, p. 81, suiv.), M. Heilermann borne la question qu'il pose à chercher si une approximation donnée X de $\sqrt{A}$ n'a pas été obtenue par une relation telle que

$$X = a + \frac{r}{2a} \quad \text{(premier degré d'approximation)}$$

ou encore

$$X = a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a}} \quad \text{(deuxième degré)},$$

en supposant d'ailleurs toujours $A = a^2 + r$, toutefois en admettant que a et r ne représentent plus nécessairement des nombres entiers, mais seulement rationnels.

Considérons d'abord le premier degré; on tire des conditions

$$a = X \pm \sqrt{X^2 - A}, \quad r = A - a^2;$$

Il faut donc que $X^2 - A$ soit un carré parfait; or ce cas se présente si X correspond à une solution de l'équation de Pell, ce qui a lieu pour quatre de nos approximations du second degré; elles se présentent alors comme approximation du premier degré en admettant pour a des valeurs rationnelles qui sont doubles. Ainsi, pour la racine (10) $\sqrt{135}$, a peut être soit $11\frac{2}{3}$, soit $11\frac{4}{7}$.

Il est certain que toute la question revient à savoir comment les Grecs ont pu arriver à choisir la valeur de a; en réalité, du moment où elle n'est pas entière, ce ne peut être que par une première approximation; il faudrait donc pouvoir répéter l'opération sur les valeurs trouvées par a, ou bien on ne peut expliquer leur choix que par un autre procédé, et l'on retombe alors inévitablement sur celui que nous avons supposé. Il est clair, en effet, que, eu égard aux conditions posées, a est absolument arbitraire; si

on lui attribue une valeur m, par exemple, on retrouvera seulement comme seconde racine de l'équation en a la valeur $\frac{A}{m}$.

Quant à l'application du procédé de M. Heilermann aux racines héroniennes, en écartant dès lors les solutions médiates de l'équation de Pell et celles que nous avons appelées premier quotient complet développé, on est conduit à admettre pour première approximation (valeur de a la plus simple) dans les racines à premier quotient approché

$$\sqrt{58\frac{7}{16}} \backsim 8\frac{1}{4}, \quad \sqrt{444\frac{4}{9}} \backsim 21\frac{1}{3}, \quad \sqrt{3400} \backsim 60, \quad \sqrt{8\frac{7}{16}} \backsim 3\frac{3}{4},$$

et, dans les racines à second quotient complet développé,

$$\sqrt{43\frac{3}{4}} \backsim 6\frac{1}{2}.$$

Les autres sont réfractaires; or la dernière est donnée par notre procédé; des quatre premières, la troisième peut être seule considérée comme possible; elle reviendrait à considérer $\sqrt{3400}$ comme $10\sqrt{34}$, et à prendre pour $\sqrt{34}$ l'approximation $6 - \frac{2}{12}$, immédiatement donnée.

Abordons maintenant le procédé de M. Heilermann pour le second degré d'approximation.

Il conduit à l'équation en a,

$$a^3 - 3Xa^2 + 3Aa - AX = 0,$$

qui a deux racines imaginaires et une réelle.

Si cette équation a une racine rationnelle m et que d'ailleurs $m^2 - A$ soit un carré (cas qui se présente pour les solutions de l'équation de Pell), il se trouve que l'on obtient également une solution, en supposant que X soit une approximation du premier degré seulement; mais, en la regardant comme du deuxième degré, on aura, pour la première valeur choisie a, un nombre généralement acceptable.

Ainsi

$$\sqrt{135} \backsim 12 - \frac{9}{24 - \frac{9}{24}}, \quad \sqrt{216} \backsim 15 - \frac{9}{30 - \frac{9}{30}};$$

si l'on écarte ce cas particulier, on trouvera encore une racine rationnelle de l'équation en a pour

$$\sqrt{8\frac{7}{16}} \backsim 3\frac{3}{4} - \frac{5\frac{5}{8}}{7\frac{1}{2} - \frac{5\frac{5}{8}}{7\frac{1}{2}}},$$

$$\sqrt{54} \backsim 6 + \frac{18}{12 + \frac{18}{12}}, \quad \sqrt{6300} \backsim 80 - \frac{100}{160 - \frac{100}{160}}.$$

La dernière seule est admissible.

On peut dire, en résumé, que les procédés de M. Heilermann donnent pour les valeurs que le système T fournit rigoureusement une explication aussi satisfaisante que ce système; mais, pour les autres, ces valeurs sont absolument réfractaires à ces procédés, ou bien elles sont en fait expliquées d'une façon beaucoup moins naturelle.

M. Heilermann avait, d'autre part, antérieurement proposé un autre procédé d'approximation dont M. Weissenborn (¹) s'est, pour ainsi dire, approprié l'application aux valeurs héroniennes, en même temps qu'à celles d'Archimède. J'écarterai ces dernières dont le degré d'approximation n'est pas tel qu'il permette d'obtenir des conclusions précises.

Le procédé en question, présenté comme une généralisation de celui qui donnait chez les anciens les nombres *côtés* et *diagonaux* (solutions de l'équation $x^2 - 2y^2 = \pm 1$), consiste à former deux séries récurrentes de nombres S et D, d'après la loi

$$S_n = S_{n-1} + D_{n-1}, \quad D_n = kS_{n-1} + D_{n-1}.$$

On obtient facilement la relation

$$D_n^2 - kS_n^2 = (1-k)(D_{n-1}^2 - kS_{n-1}^2) = (1-k)^n(D^2 - kS^2).$$

Il en résulte que si k est suffisamment voisin de 1, $\frac{D_n}{S_n}$ représentera $\sqrt{k}$ avec une approximation d'autant plus grande que n sera plus élevé.

(¹) *Die irrationalen Quadratwurzeln bei Archimedes und Heron*, von Dr Weissenborn, Berlin, Calvary, 1883.

Soit maintenant à extraire $\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a\sqrt{1 + \frac{r}{a^2}}$; si l'on pose

$$1 + \frac{r}{a^2} = k, \quad S_0 = 1, \quad D_0 = 1,$$

on a

$$S_1 = 2, \quad D_1 = 1 + k,$$

et, comme approximation correspondante du premier degré,

$$\sqrt{A} \backsim a\frac{D_1}{S_1} = a + \frac{r}{2a};$$

puis

$$S_2 = 3 + k, \quad D_2 = 1 + 3k,$$

et comme approximation corrrespondante du second degré,

$$\sqrt{A} \backsim a\frac{D_2}{S_2} = a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a}};$$

On voit la liaison de ce procédé avec celui que nous avons précédemment exposé, et l'on peut en même temps en reconnaître la différence dans l'application.

Il est clair que M. Weissenborn devait immédiatement retrouver, comme premier degré d'approximation, les sept valeurs héroniennes à premier quotient complet (simple ou développé). Comme, d'autre part, si A est accompagné de fractions, il admet la réduction au même dénominateur carré, pour l'extraction approchée de la racine du numérateur ainsi formé; comme enfin il admet que a peut n'être pas la racine du carré entier le plus voisin de A, il obtint, comme données exactement par son procédé, quelques-unes des valeurs héroniennes qui ont paru réfractaires au nôtre.

Ainsi

$$(6) \quad \sqrt{58\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{935} = \frac{1}{4}\sqrt{33^2 - 154} \backsim \frac{1}{4}\left(33 - \frac{154}{66}\right) = 7\frac{2}{3}.$$

$$(7) \quad \sqrt{441\frac{1}{3}\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{4000} = \frac{1}{3}\sqrt{64^2 - 96} \backsim \frac{1}{3}\left(64 - \frac{96}{128}\right) = 21\frac{1}{12}.$$

$$(8) \quad \sqrt{3400} = \sqrt{60^2 - 200} \backsim 60 - \frac{200}{120} = 58\frac{1}{3}.$$

Il est clair qu'en adoptant des modifications correspondantes pour l'application du procédé admis par nous

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} \backsim a + \frac{r}{2a},$$

ces mêmes racines peuvent être obtenues par ce dernier procédé; elles ne peuvent donc pas être regardées comme réellement favorables à l'opinion de M. Weissenborn sur l'existence chez les anciens de la méthode qu'il a étudiée.

De même le second degré d'approximation de cette méthode donne rigoureusement les approximations héroniennes à second quotient complet [1], et, en choisissant a convenablement, deux des racines approchées au premier degré, (21) et (9). A cet égard, les résultats qu'il obtient sont naturellement comparables à ceux de M. Heilermann.

Mais cinq racines se trouvent réfractaires à son procédé, qui lui donne

(16) $18\frac{33}{38}$ au lieu de $18\frac{7}{8}$, (17) $70\frac{5}{6}$ au lieu de $70\frac{3}{4}$,

(15) $18\frac{7}{8}$ au lieu de $18\frac{31}{36}$, (19) $14\frac{26}{61}$ au lieu de $14\frac{5}{12}$,

(20) $6\frac{299}{480}$ au lieu de $6\frac{11}{18}$.

Or, tandis que, dans notre procédé, les simplifications des développements en quantièmes que donnerait l'application rigoureuse de la méthode s'expliquent tout naturellement, il est difficile de rendre compte des substitutions supposées par M. Weissenborn.

Celles qui se rapportent aux racines (17) et (15) me semblent notamment inadmissibles; d'autre part,

(19) $\frac{26}{61}$ est plutôt $\frac{1}{3} + \frac{1}{11}$ que $\frac{1}{3} + \frac{1}{12}$,

(20) $\frac{299}{480}$ est plutôt $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ que $\frac{1}{2} + \frac{1}{9}$.

---

[1] Sauf la racine (11) qui se trouve donnée pour le premier degré, à cause de la forme fractionnaire de A.

Malgré le talent dépensé par M. Weissenborn, il ne me semble donc pas avoir suffisamment établi sa thèse.

Le grave défaut des tentatives faites en partant du principe admis par M. Heilermann, surtout sous la forme que lui donne M. Weissenborn, me paraît être de conduire, pour le premier degré d'approximation, à une conception relativement complexe de la formule si simple et historiquement démontrée

$$\sqrt{a^2+r} \backsim a + \frac{r}{2a},$$

comme aussi de compliquer les calculs relatifs à cette formule.

Quand au second degré d'approximation

$$\sqrt{a^2+r} \backsim \frac{r}{2a + \frac{r}{2a}},$$

on peut sans doute simplifier suffisamment sa conception pour la présenter sous une forme qui puisse la faire regarder comme ayant pu être connue des Grecs; mais si, d'ailleurs, en présence des documents trop peu nombreux que nous possédons, elle semble aussi satisfaisante pour expliquer les valeurs héroniennes que la méthode que nous avons proposée, elle paraîtra sans doute beaucoup moins simple et, partant, moins probable.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME VIII; 1884. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Pages.

Amodeo (F.). — Monografia delle curve tautocrone..... 187-191

Boncompagni (B.). — Atti di nascita e di morte di Pietro Simone marchese di Laplace..... 6-7

— Intorno alla vita ed ai lavori di Antonio Carlo Marcellino Poullet-Delisle..... 118-119

Briot (Ch.). — Théorie mécanique de la chaleur..... 5-6

Brunel. — Étude sur les relations algébriques entre les fonctions hyperelliptiques de genre 3..... 182-184

Cesaro (E.). — Sur diverses questions d'Arithmétique..... 82-89

Crone (C.). — On Fladerne af fjorde Orden med Tilbageganskeglesnit ogderes Konturer, med sorligt Hensyn til Realitetsgegenskaberne..... 313

Despeyrous. — Cours de Mécanique, t. I..... 355-359

Dreyer (J.-L.-E.). — Bidrag til Bestemmelse af Præcessionskonstanten. 314

Fiedler. — Cyclographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis-und Kugel-Systeme..... 209-211

Frenet (F.). — Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal..... 81-82

Pages
Glaisher. — Various papers and notes 261-263
Guichard (C.). — Théorie des points singuliers essentiels 281-284
Gunther (S.). — Lehrbuch der Geophysik und physikalischen Geographie. 345-355
Jordan (C.). — Cours d'Analyse de l'École Polytechnique 225-226
Kronecker (L.). — Festschrift zu Herrn E.-E. Kummer's Doctor-Jubiläum. — Grundzüge einer Arithmetischen theorie der algebraischen Grössen. 145-154
Mathieu (E.). — Théorie de la capillarité 154-159
Noether (M.). — Zur Grundlegung der algebraischen curven 177-181
Petersen (J.). — Lehrbuch der statik fester Körper 53-54
Radau (R.). — Sur les développements de l'expression $(1 - 2\alpha z + \alpha^2)^{-k}$ 284-285
Raffy (L.). — Recherches algébriques sur les intégrales abéliennes..... 184-186
Resal (H.). — Physique mathématique : Électrodynamique, Capillarité, Chaleur, Électricité, Magnétisme, Élasticité 49-52
— Traité élémentaire de Mécanique céleste 257-261
Riccardi (Pietro). — Cenni sulla storia della Geodesia in Italia dalle prime epoche fin' oltre la metà del secolo XIX 115-118
Steinhauser (Anton.). — Hilfstafeln zur präcisen Berechnung zwanzigstelliger Logarithmen zu gegebenen Zahlen und der Zahlen zu zwanzigstelligen Logarithmen 113-114
Valentiner (H.). — Bidrag til Rumkurvernes Theori 314
Vazquez-Illa. — Propiedades elementares relativas à la divisibilidad de los numeros enteros 186
Veronese. — Interprétations géométriques de la théorie des substitutions de n lettres, particulièrement pour $n = 3, 4, 5, 6$ en relation avec les groupes de l'hexagramme mystique 159-162

MÉLANGES.

Académie Royale danoise des Sciences et des Lettres. — Question mise au concours pour l'année 1884 206-208
Association française pour l'avancement des Sciences. — (Session de Rouen) 90-100
Bertrand (J.). — Les Zodiaques et le calendrier égyptien 8-19
— Éloge de Victor Puiseux 227-234
Bougaief. — Extrait d'une Lettre de M. Bougaief 254-256
Cayley. — Discours prononcé par M. Cayley devant les membres de l'Association britannique 30-48, 54-80
Faculté de Paris. — Sujets de composition donnés aux examens de Licence ès sciences mathématiques 298-312
Facultés des départements. — Sujets de composition donnés aux examens de Licence 211-224
Koenigs (G.). — Sur une généralisation du théorème de Fermat et ses rapports avec la théorie des substitutions uniformes 286-288
Rodet (L.). — Un exemple de calcul algébrique en persan 245-254
Schoute. — Sur une certaine courbe du quatrième ordre douée de trois points doubles 278-280
Stieltjes. — Sur le caractère du nombre 2 comme résidu ou non résidu quadratique 175-176

Pages

STEPHANOS (CYPARISSOS). — Sur la décomposition en fractions simples d'une fonction rationnelle homogène 120-144

TANNERY (PAUL). — Notes pour l'histoire des ligne et surfaces courbes dans l'antiquité 19-30, 101-112

— Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide 162-175

— La perte de sept livres de Diophante 192-206

— Manuel Moschopoulos et Nicolas Rhabdas 263-277

— Domninos de Larissa 288-298

— Eutocius et ses contemporains 315-329

— Questions héroniennes 329-344, 359-376

TISSERAND. — Notice sur Victor-Alexandre Puiseux 234-235

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME VIII.

D

9504 Paris. — Imp. de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *J. Hoüel*, Secrétaire de la rédaction, Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux, cours d'Aquitaine, 66.

9494 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

3

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET
ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,
AVEC LA COLLABORATION DE
MM. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAÏEF, BROCARD, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, MANSION, POTOCKI, RADAU, RAYET, WEYR, ETC.,
SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

DEUXIÈME SÉRIE.
TOME VIII. — ANNÉE 1884.
(TOME XIX DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1884

5

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, t. XCVI; 1883 (1).

NOTA. — On a oublié de mettre en tête de la page 221 du numéro de novembre 1883 les mots : *n°* 13; 26 *novembre*.

N° 14; 2 avril.

Séance publique annuelle.

N° 15; 9 avril.

Schwarz. — Sur les surfaces à courbure moyenne nulle sur lesquelles on peut limiter une portion finie de la surface par quatre droites situées sur la surface. (1011).

De telles surfaces sont en général composées d'un nombre infini de parties identiques; il y a exception pour cinq classes de surfaces; pour chacune toutes les lignes droites qu'elles contiennent sont parallèles aux axes de symétrie d'un cube; M. Schwarz a étudié deux de ces surfaces, M. Neovius a étudié la troisième.

Cruls. — Observation du passage de Vénus à Punta-Arenas. (1013).

(1) Voir *Bulletin*, t. VII, p. 187.

Périgaud. — Observations de la comète Swift-Brooks, faites à l'équatorial coudé. (1015).

Appell. — Sur les fonctions uniformes affectées de coupures et sur une classe d'équations différentielles linéaires. (1018).

Si l'on considère une aire limitée par des arcs d'ellipse tournant leur convexité vers l'intérieur de l'aire et ayant pour foyers respectifs les points (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n), une fonction holomorphe dans cette aire $\Phi(x)$ y sera développable en une série de la forme

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} \left(x_k - \sqrt{x_k^2 - 1}\right)^2,$$

$$x_k = \frac{a_k + b_k - 2x}{a_k - b_k},$$

le signe du radical étant déterminé de telle sorte que le module de

$$x_k - \sqrt{x_k^2 - 1}$$

soit moindre que 1.

Si les ellipses s'aplatissent en segments de droites, on aura l'expression la plus générale d'une fonction admettant ces segments de droites pour coupures.

Ces développements sont analogues à ceux relatifs à une aire limitée par des arcs de cercle.

Soit une équation différentielle linéaire

$$\frac{d^m y}{dx^m} = X_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + X_m y,$$

dans laquelle les coefficients X sont des fonctions uniformes avec un nombre fini de points singuliers, et telle que l'intégrale générale soit holomorphe dans le voisinage du point ∞.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ les points singuliers des X, et joignons ces points dans l'ordre des indices par une ligne polygonale commençant en a_1 et finissant en a_{n-1} ; l'intégrale générale, qui admet cette ligne pour coupure, sera représentée par une série telle que la précédente, où l'on suppose

$$b_1 = a_2, \quad b_2 = a_3, \quad \ldots, \quad b_n = a_{n-1}.$$

De Jonquières. — Loi des périodes. (1020).

Dyck (*W.*). — Remarques sur la primitivité des groupes. (1024).

Résumé d'un Mémoire inséré dans les *Mathematische Annalen,* où l'auteur définit la primitivité et la non-primitivité d'un groupe sans représenter les substitutions du groupe par des permutations de lettres.

Lucas (*É.*). — Détermination des progressions arithmétiques dont les termes ne sont connus qu'approximativement. (1026).

On donne une série de n quantités

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

qui représentent approximativement, à des écarts fortuits près, les termes consécutifs d'une progression arithmétique inconnue

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n.$$

Il s'agit de déterminer cette progression de façon qu'elle puisse être substituée le plus avantageusement possible à la série donnée.

Cesáro. — Sur un théorème de M. Stieltjes. (1029).

Démonstration de ce théorème, fondée sur la proposition suivante :
Soient

$$Q_p = \left(\frac{n}{1}\right) + \left(\frac{n}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{n}{p}\right),$$

en sorte que

$$Q_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n);$$

on aura

$$Q_\alpha + Q_\beta - Q_n = n,$$

pourvu que $\alpha\beta = n$.

Léauté. — Sur un perfectionnement applicable à la turbine Jonval. (1031).

N° 16; 16 avril.

Jordan. — Note sur les travaux de M. H.-J.-S. Smith, lauréat du grand prix de Mathématiques, décédé le 9 février 1883. (1095).

Bertrand. — Remarques relatives au sujet du prix du concours de Mathématiques pour 1883. (1097).

Lœwy. — Deux méthodes nouvelles pour la détermination des ascensions droites des étoiles polaires et de l'inclinaison de l'axe d'un méridien au-dessus de l'équateur. (1098).

Voici le principe de la méthode proposée par M. Lœwy : avec tout instrument méridien on peut mesurer la hauteur d'un astre au-dessus de l'équateur, trouver son ascension droite en notant l'heure de son passage au méridien et déterminer la distance de cet astre au plan instrumental au moyen du fil mobile en ascension droite placé dans le micromètre.

En dirigeant la lunette vers le pôle, on voit défiler dans une nuit plusieurs centaines d'étoiles entre la 10e et la 2e grandeur, observables toute la nuit; pour l'une ou l'autre d'entre elles, on peut donc déterminer, à chaque instant, la déclinaison et la distance au plan instrumental.

Or, en comparant la variation de ces coordonnées par suite du mouvement diurne de la Terre, la désorientation de la lunette se fait sentir et fournit le moyen d'évaluer l'inclinaison de l'axe instrumental au-dessus de l'équateur.

Trois rapports, en effet, varient avec le temps écoulé : le rapport entre la distance au plan instrumental et la déclinaison, le rapport entre cette distance et le temps, le rapport entre le temps et la déclinaison instrumentale. M. Lœwy a établi, pour ces trois cas, les équations de condition en examinant les varia-

tions que subissent ces rapports par la désorientation de l'instrument, et l'analyse des formules montre que l'on peut, par l'observation, déterminer au moyen de deux méthodes l'élément cherché.

La première méthode, qui est la plus précise, repose sur ce que, lorsque le chemin parcouru par l'astre dans une direction perpendiculaire au plan instrumental est égal à la distance polaire apparente de l'astre, on peut avec précision déterminer l'inclinaison de l'arc instrumental par les variations qui se manifestent entre la déclinaison apparente et la distance par rapport au plan instrumental.

Dirigeant la lunette vers le pôle, on choisit à un instant quelconque, parmi les astres qui passent entre le pôle et $1^\circ 40'$, celui qui est le plus brillant et se trouve encore à $1^h 46^m$ avant son passage au méridien. On effectue alors simultanément, en ascension droite et en distance polaire, deux séries de dix pointés, séparées par un intervalle de cinq minutes, sans qu'il soit nécessaire de marquer le temps.

Puis, après un intervalle de trois heures et demie, on répète la double série de dix pointés sur la même étoile.

La comparaison des résultats nouveaux avec ceux qu'on a obtenus déjà permet de déterminer l'inclinaison de l'axe instrumental au-dessus de l'équateur; en multipliant le nombre des pointés, on peut porter la précision à $\frac{1}{100}$ de seconde.

Sylvester. — Démonstration graphique d'un théorème d'Euler concernant les partitions des nombres. (1110).

Le nombre de partitions de n en nombres impairs, qui se divisent en i groupes de nombres distincts, est égal au nombre de partitions de n en i suites tout à fait distinctes de nombres consécutifs.

Callandreau. — Calcul d'une intégrale double. (1125).

Quadrature approchée de l'intégrale double

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos ix\cos jy\,dx\,dy}{\sqrt{1+\alpha^2-2\lambda(\mu\cos x+\nu\cos y)}}.$$

Gonnessiat. — Observations de la comète Swift-Brooks, faites avec l'équatorial Brunner de l'Observatoire de Lyon. (1128).

De Jonquières. — Loi des périodes. (1129).

Picard (*É.*). — Sur les groupes de transformation des équations différentielles linéaires. (1131).

L'auteur donne, relativement aux équations différentielles linéaires à coefficients rationnels et à intégrales régulières, un théorème qui correspond au théorème fondamental de Galois sur les équations algébriques : il montre l'existence de substitutions de la forme

$$Y_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{im}y_m,$$

où les y sont un système fondamental d'intégrales, où les a sont des fonctions

rationnelles d'un certain nombre de paramètres arbitraires, substitutions dont l'ensemble constitue, au sens de M. Lie [1], un *groupe* G, et qui jouissent de la propriété suivante :

Toute fonction rationnelle de x et de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ainsi que de leurs dérivées, s'exprimant rationnellement en fonction de x, reste invariable quand on effectue sur $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les substitutions du groupe G; réciproquement, toute fonction rationnelle de x et de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ainsi que de leurs dérivées, qui reste invariable par les substitutions du groupe G, est une fonction rationnelle de x.

Poincaré. — Sur les fonctions à espace lacunaire. (1134).

Considérons le plan des x comme divisé en deux parties par l'axe des quantités réelles. Soit $f(x)$ une fonction n'existant que dans la partie supérieure et étant partout holomorphe dans cette partie; soit $f_1(x)$ une fonction n'existant que dans la partie inférieure et étant partout holomorphe dans cette partie. On peut trouver deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ jouissant des propriétés suivantes : elles existent dans tout le plan; la somme $\varphi + \psi$ est égale à f dans la moitié supérieure, à f_1 dans la moitié inférieure. La fonction φ admettra pour coupure le segment $(-1, +1)$; la fonction ψ admettra les deux coupures $(-\infty, -1)$, $(+1, +\infty)$.

Picquet. — Sur une généralisation du théorème de Fermat. (1137).

Par des considérations de Géométrie, M. Picquet arrive à la proposition suivante :

L'expression

$$\Sigma_n(x) = x^n - \Sigma x^{\overline{a}^n} + \Sigma x^{\overline{ab}^n} - \ldots \pm \Sigma x^{\overline{ab\ldots l}^n},$$

où $a, b, \ldots, l$ sont les facteurs premiers de n, est divisible par n, quels que soient les entiers n et x.

M. Kantor, qui avait établi ce théorème par d'autres considérations de Géométrie (*Annali di Matematica*, t. X, p. 64; *Bulletin*, 2e série, t. VI, 2e Partie, p. 114), adresse, dans une Communication postérieure, une réclamation de priorité.

N° 17; 23 avril.

Tisserand. — Rapport sur les travaux de M. Roche, professeur d'Astronomie à la Faculté des Sciences de Montpellier. (1171).

Lœwy. — Nouvelle méthode pour la détermination des ascensions droites des polaires et de l'inclinaison au-dessus de l'équateur. (Suite). (1179).

Trépied. — Sur une manière de déterminer l'angle de position

---

[1] *Transformationen-Gruppen* (*Math. Annalen*, t. XVI).

d'un point de la surface d'un astre à l'aide d'une lunette horizontale. (1198).

Thollon. — Sur l'emploi de la lunette horizontale pour les observations de spectroscopie solaire. (1200).

Darboux. — Détermination d'une classe particulière de surfaces à lignes de courbures planes dans un système et isothermes. (1202).

Cette question fait l'objet de deux Communications (nos 17 et 18) : l'élément linéaire étant pris sous la forme

$$ds^2 = e^{2h}(du^2 + dv^2),$$

la fonction h devra, d'après la nature de la question, satisfaire à deux équations aux dérivées partielles, auxquelles on peut substituer les deux suivantes :

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \mathrm{U}e^h + \mathrm{U}_1 e^{-h},$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial v_1^2} = 0,$$

où U et U_1 sont des fonctions arbitraires de u, où v_1 est une fonction de v définie par l'équation

$$dv_1 = \frac{dv}{\sqrt{1+\mathrm{V}^2}},$$

V désignant une fonction arbitraire de v.

M. Darboux déduit de là qu'on doit prendre

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(u+\omega)}{2\Theta(\omega)\Theta(u)}\, e^{-u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

$$\mathrm{U}_1 = \frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(u-\omega)}{2\Theta(\omega)\Theta(u)}\, e^{u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

$$e^h = \frac{\Theta\left(\frac{u+iv_1-\omega}{2}\right)\Theta\left(\frac{u-iv_1-\omega}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)\mathrm{H}\left(\frac{u-iv_1+\omega}{2}\right)}\, e^{u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

ω étant une constante arbitraire, ainsi que le module k.

Finalement, il parvient à la génération suivante des surfaces cherchées :

« Déterminons dans un plan P les coordonnées rectangulaires x_1, y_1 d'un point quelconque en fonction de u_1, v_1, au moyen de l'équation complexe

$$x_1 + iy_1 = \frac{\Theta^2(\omega)}{\mathrm{H}(2\omega)\,\mathrm{H}'(0)}\,\frac{\mathrm{H}\left(\frac{u+iv_1+3\omega}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)}\, e^{(u-iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}};$$

alors l'équation $v_1 = \text{const.}$ représente une famille de courbes isothermes.

Faisons correspondre à chaque courbe (v_1) la droite du plan passant par l'origine et définie par l'équation

$$(x_1 + iy_1)e^{-iv_1}\Theta(iv_1 + \omega) \quad (x_1 - iy_1)e^{iv_1}\Theta(\omega - iv_1).$$

Faisons rouler le plan sur un cône quelconque ayant pour sommet l'origine des coordonnées. Les différentes droites du plan passant par l'origine viennent successivement s'appliquer sur les génératrices du cône. *La courbe* (v_1), *correspondant dans chaque position du plan à la droite de contact du plan et du cône, engendrera la surface cherchée.*

Minkowski. — Sur la réduction des formes quadratiques positives ternaires. (1205).

Soit

$$\varphi = \sum_1^n a_{ik}\xi_i\xi_k$$

une forme quadratique positive; pour $n = 1, 2, 3, 4$ cette forme est réduite, et elle ne l'est que si elle satisfait aux inégalités

$$a_{11} \leqq a_{22} \leqq a_{33} \leqq \ldots \leqq a_{nn},$$

et à toutes les inégalités

$$\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \geqq a_{ii},$$

dans lesquelles $\varepsilon_1 = +1$ et où les autres ε sont $+1$, 0, ou -1.

Ce théorème est le suivant :

Une forme quadratique positive $f = \Sigma a_i x_i x_j$ n'admet que pour un nombre fini de systèmes numériques (x_i) une valeur qui ne surpasse pas une quantité positive donnée, montrant que l'on peut, pour chaque forme positive f, déterminer, par un nombre fini d'opérations, toutes les formes réduites de sa classe.

De Jonquières. — Loi des périodes (fin). (1210).

Fouret. — Sur une relation d'involution concernant une figure plane formée de deux courbes algébriques dont l'une a un point multiple d'un ordre de multiplicité inférieur d'une unité à son degré. (1213).

Étant données, sur un même plan, une courbe algébrique quelconque (K_n) de degré n, une seconde courbe algébrique (L_r) de degré r, ayant un point multiple I d'ordre $r-1$, et une droite arbitraire (D), si l'on désigne respectivement par a, b, c les points d'intersection avec (D) : 1° d'une droite joignant le point I à l'un quelconque des nr points d'intersection des deux courbes (K_n) et (L_r); 2° de la courbe (K_n); 3° de l'une quelconque des $r-1$ tangentes en I à (L_r); si l'on désigne en outre par e et f deux quelconques des points d'intersection de (D) avec (L_r), on a la relation d'involution

$$\left(\frac{ac}{af}\right)_{nr} = \left(\frac{be}{bf}\right)_n \left(\frac{ce}{cf}\right)_{r-1}^n,$$

les parenthèses désignant les produits des valeurs multiples des quantités mises entre ces parenthèses.

N° 18; 30 avril.

Faye. — Sur la réduction du baromètre et du pendule au niveau de la mer. (1259).

Sylvester. — Sur un théorème de partitions de nombres complexes contenu dans un théorème de Jacobi. (1276).

Conséquences de l'égalité

$$(1 \mp q^a)(1 \mp q^b)(1 - q^c)(1 \mp q^{a+c})(1 \mp q^{b+c})(1 - q^{2c})\ldots$$
$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} (\mp 1)^i q^{\frac{i^2 c + i(a-b)}{2}}.$$

Baillaud. — Une nouvelle formule pour le développement de la fonction perturbatrice. (1286).

Sur une formule applicable à la théorie de Pallas et pour laquelle l'inclinaison des orbites constitue plutôt un avantage qu'un inconvénient.

Tacchini. — Observations des taches et des facules solaires, faites à l'Observatoire royal du Collège Romain pendant le quatrième trimestre de 1882. (1289).

Tacchini. — Observations des protubérances, facules et taches solaires faites à l'Observatoire du Collège Romain pendant le troisième et le quatrième trimestre de 1882. (1290).

De Teffé. — Observation du passage de Vénus à Saint-Thomas des Antilles. (1291).

Cruls. — Sur l'emploi d'un verre biréfringent dans certaines observations d'analyse spectrale. (1293).

Darboux. — Détermination d'une classe particulière de surfaces à lignes de courbure planes dans un système et isothermes. (1294).

De Jonquières. — Sur les fonctions continues périodiques dont les numérateurs diffèrent de l'unité. (1297).

Lucas (*É.*). — Sur la généralisation du théorème de Fermat. (1300).

Pellet. — Sur une généralisation du théorème de Fermat. (1301).

Il s'agit de la proposition communiquée par M. Picquet.

Poincaré. — Sur les groupes des équations linéaires. (1302).

Goursat. — Sur quelques intégrales doubles. (1304).

Étude des fonctions de z définies par une équation de la forme

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{u_0}^{u_1} du \, \frac{F(u, t, z)}{G(u, t, z)}.$$

On sait les conséquences si importantes que M. Hermite a tirées de l'étude des fonctions analogues où ne figure qu'une intégrale simple.

Bourguet. — Sur la fonction eulérienne. (1307).

L'équation

$$0 = P(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{1.2(x+2)} - \ldots$$

a une infinité de racines réelles.

N° 19; 7 mai.

Lœwy. — Nouvelles méthodes pour la détermination de la portion relative de l'équateur instrumental par rapport à l'équateur réel et des déclinaisons absolues des étoiles et de la latitude absolue. (1329).

D'Abbadie. — Observations relatives à la Communication précédente. (1334).

Schwedoff. — Sur la figure de la grande comète de septembre. (1349).

De Jonquières. — Étude des identités qui se présentent entre les réduites appartenant, respectivement, aux deux modes de fractions continues périodiques. (1351).

Autonne. — Sur la nature des intégrales algébriques de l'équation de Riccati. (1354).

Soit z une solution de l'équation de Riccati

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + Py^2 + Qy + R = 0.$$

Si z satisfait à une équation algébrique Ω de degré m, l'équation Ω jouira des deux propriétés suivantes :

Par l'adjonction de deux intégrales de (1), l'équation Ω se décomposera en facteurs abéliens.

Toutes les m racines de Ω sont fonctions rationnelles de deux quelconques d'entre elles; si donc le degré m est premier, Ω est une équation de Galois.

Léauté. — Études pratiques pour la substitution, à un arc donné, de certaines courbes fermées, engendrées par les points d'une bielle en mouvement. (1356).

N° 20; 14 mai.

Borrelly. — Planète (233), découverte le 11 mai 1883 à l'Observatoire de Marseille. (1415).

Bigourdan. — Observations de la nouvelle planète (233) Borrelly, faites à l'Observatoire de Paris. (1416).

Cruls. — Sur la détermination du méridien dans les basses latitudes, comme celle de Rio-de-Janeiro. (1416).

Duponchel. — Conservation de l'énergie et périodicité des taches du Soleil. (1417).

De Jonquières. — Lois des coïncidences entre les réduites des fractions périodiques des deux modes. (1420).

Kantor (*S.*) — Sur une généralisation du théorème de Fermat.

Picquet. — Sur la généralisation du théorème de Fermat, due à M. Serret. (1424).

N° 21; 21 mai.

Lœwy. — Observations des petites planètes, faites au grand instrument méridien de l'Observatoire de Paris, pendant le premier trimestre de l'année 1883. (1445).

Périgaud. — Observations de la planète (16) Psyché. (1463).

Poincaré. — Sur les fonctions fuchsiennes. (1483).

Détermination, avec une approximation indéfinie, du groupe d'une fonction fuchsienne susceptible de prendre toutes les valeurs possibles, sauf n valeurs données rangées sur un cercle de rayon 1 et dont le centre est à l'origine.

Bourguet. — Sur la théorie des intégrales eulériennes. (1487).

Sur les racines imaginaires de l'équation

$$P(z) = 0.$$

De Jonquières. — Lois des identités entre les réduites des fractions périodiques des deux modes. (1490).

N° 22; 28 mai.

Bigourdan. — Observations de la grande comète de septembre 1882 (II, 1882), faites à l'Observatoire de Paris. (1559).

Vaněček (*J.-S.* et *M.-N.*). — Sur les plans tangents et osculateurs des courbes à double courbure et des surfaces. (1563).

Les auteurs poursuivent l'étude des propriétés des courbes et surfaces engendrées par le mode qu'ils ont défini antérieurement (30 janvier 1882).

Stephanos. — Sur les relations qui existent entre les covariants et invariants de la forme binaire du sixième ordre. (1562).

Application de la méthode exposée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 12 janvier 1882.

Picard (*É.*). — Sur les formes quadratiques binaires à indéterminées conjuguées. (1567).

Étude spéciale de la forme

$$F = axx_0 + bxy_0 + b_0x_0y + cyy_0,$$

où, a, c sont des quantités réelles, où b et b_0 sont des imaginaires conjuguées, ainsi que x, x_0 et y, y_0, dans le cas où $bb_0 - ac = D$ est une quantité positive. — Réduction d'une telle forme; application à la résolution en nombres entiers de l'équation de Pell généralisée

$$xx_0 - Dyy_0 = 1.$$

De Jonquières. — Lois des identités entre les réduites des deux modes. (1571).

N° 23; 4 juin.

Cornu. — Sur la possibilité d'accroître dans une grande proportion la précision des observations des satellites de Jupiter. (1609).

Lalanne. — Note accompagnant la présentation de deux Notes de M. Ed. Collignon relatives à la « Résolution, au moyen de Tableaux graphiques, de certains problèmes de Cosmographie ».

Bigourdan. — Observations de la comète Brooks-Swift (a, 1883), faites à l'Observatoire de Paris. (1639).

Baillaud. — Sur le développement de la fonction perturbatrice. (1641).

Sur l'application de la formule insérée dans le n° 18 des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.*

Appell. — Sur des fonctions uniformes de deux points analytiques qui sont laissées invariables par une infinité de transformations. (1643).

L'auteur montre, sur un exemple, qu'il existe, pour une courbe du premier genre, des fonctions de deux points analytiques (x, y), (x', y') qui ne changent pas de valeur quand on remplace les deux points (x, y), (x', y') par deux autres points (x_1, y_1), $x'_1, y'_1)$ déduits des premiers à l'aide d'une transformation rationnelle réversible, c'est-à-dire que les deux points (x, y), (x', y') étant supposés connus, les coordonnées des deux autres points (x_1, y_1), (x'_1, y'_1) sont déterminées par des équations du second degré ayant pour coefficients des fonctions rationnelles de (x, y), (x', y') et réciproquement.

Farkas. — Sur les fonctions uniformes. (1647).

Si une fonction uniforme n'admet qu'un nombre fini de discontinuités, il n'y a que deux valeurs qu'elle ne puisse pas prendre.

Barbier (*E.*). — Une correction des formules stéréotypées de la Préface de Callet (tirage de 1879). (1648).

Léauté. — Règles pratiques pour la substitution à un arc donné de certaines courbes fermées engendrées par les points d'une bielle en mouvement. Cas des bielles isoscèles et rectangulaires. (1649).

Application des règles indiquées par l'auteur le 7 mai 1883.

N° 24; 11 juin.

Brioschi. — Sur quelques propriétés d'une forme binaire du huitième ordre. (1689).

Étude de la forme binaire du huitième ordre $f(x_1, x_2)$, pour laquelle on a

$$g_2 = \frac{1}{2}(ff)_4 = mf,$$

m étant une constante.

Ledieu. — De l'homogénéité des formules. (1692).

Backlund. — Sur le mouvement de la comète d'Encke dans les années 1871-1881. (1711).

Vaněček (*J.-S.* et *M.-N.*). — Sur un mode de transformation des figures dans l'espace. (1714).

Étude des coïncidences dans le mode général de transformation qui est l'objet des travaux des auteurs.

Perrin. — Sur la théorie de la forme binaire du sixième ordre. (1717).

Dans diverses Communications antérieures (12, 19, 26 février 1883), l'auteur a donné une méthode générale pour calculer les syzygies entre invariants et covariants des formes binaires, et les résultats de l'application de cette méthode à la forme du cinquième ordre. Il donne maintenant un Tableau de formules analogues pour la forme binaire du sixième ordre.

De Jonquières. — Études sur les fractions continues périodiques. (1721).

N° 25; 25 juin.

Lœwy. — Méthode nouvelle pour la détermination des ascensions droites et déclinaisons absolues des étoiles (suite). (1745).

L'auteur apporte un nouveau perfectionnement à la méthode qu'il a communiquée antérieurement à l'Académie, perfectionnement qui repose sur l'usage des observations simultanées de deux polaires ayant même déclinaison.

Faye. — Sur un dessin de la grande comète de 1882 exécuté à l'Observatoire de M. Bischoffsheim, près de Nice. (1756).

Faye. — Sur les mouvements du sol de l'Observatoire de Neuchâtel. (1757).

Kretz. — Sur la détermination des volants des machines-outils. (1769).

Une machine reçoit le mouvement d'un arbre animé d'une vitesse constante; la résistance éprouve, pendant un temps donné, une augmentation connue et reprend ensuite sa valeur normale. On demande de déterminer le moment d'inertie que doit avoir le volant pour que la variation de tension soit une fraction donnée de la résistance agissant à la même distance de l'axe.

Vaněček (*J.-S.* et *M.-N.*). — Sur un mode de transformation des figures dans l'espace. (1773).

Les auteurs donnent divers énoncés généraux relatifs aux degrés de courbes ou de surfaces décrites par le sommet libre d'un triangle ou d'un tétraèdre polaire par rapport à une quadrique dont les autres sommets décrivent des courbes ou des surfaces données.

Perrin. — Sur la théorie des formes binaires du sixième ordre. (1776).

Suite de la Communication du 11 juin.

Picard (*E.*). — Sur la réduction continuelle de certaines formes quadratiques.

Suite de la Communication du 28 mai.

L'auteur avait montré comment l'étude des formes binaires indéfinies à indéterminées conjuguées se ramène à la question de la réduction continuelle d'une forme définie renfermant plusieurs paramètres; il indique une représentation géométrique qui simplifie notablement la solution du problème.

Picart (*A.*). — Sur un nouveau système de bascule. (1782).

Cette bascule repose sur l'extension suivante du principe de Roberval :

Soit un parallélogramme articulé à des sommets et dont deux côtés opposés passent par deux points fixes, divisant ces deux côtés en segments inégaux, respectivement proportionnels, deux forces parallèles aux deux autres côtés, appliquées à des points invariablement liés à ces côtés, se feront équilibre si elles ont des grandeurs inversement proportionnelles aux deux segments.

N° 26; 18 juin.

Lœwy. — Méthodes nouvelles pour la détermination des ascensions droites et des déclinaisons absolues des étoiles. (1813).

Cornu (*A.*) et *Obrecht* (*A.*). — Études expérimentales relatives à l'observation photométrique des éclipses des satellites de Jupiter. (1815).

Ledieu. — Réciproque de l'homogénéité, similitude des formules. (1854).

Callandreau. — Sur le calcul des variations séculaires des éléments des orbites. (1841).

Communication relative à un Mémoire de M. Hill : *On Gauss's method of computing secular perturbations.*

Perrin. — Sur la théorie de la forme binaire du sixième ordre. (1842).

Barbier (*E.*). — Sur une formule de Lagrange déjà généralisée par Cauchy. Nouvelle généralisation. (1845).

Le déterminant du sixième ordre dont les éléments sont les mineurs du second ordre d'un déterminant du quatrième ordre Δ est égal à Δ^3 : extension de cette proposition.

Tome XCVII; 1883.

N° 1; 2 juillet.

Bertrand. — Note sur les travaux de M. de la Gournerie. (6).

Stephanos. — Sur le système complet des combinants de deux formes binaires biquadratiques. (27).

L'auteur donne le tableau complet des combinants de deux formes binaires a_x^4, b_x^4; ce tableau présente une composition semblable à celle du système complet de la forme $\alpha_x^6 = (a_x^4, b_x^4)$, qui est l'un des deux combinants élémentaires des deux formes données : l'auteur indique d'intéressantes relations entre les éléments des deux tableaux.

Goursat. — Sur une classe d'équations linéaires du quatrième ordre. (31).

Si les intégrales d'une équation linéaire du quatrième ordre à coefficients uniformes $F(u) = 0$ vérifient une relation homogène du second degré, et une seule, cette relation pouvant être mise sous la forme $u_1 u_4 = u_2 u_3$, les intégrales de cette équation sont les produits des intégrales de deux équations linéaires du second ordre, dont les coefficients sont uniformes, en racines d'équations quadratiques à coefficients uniformes.

Le Paige. — Sur les surfaces du troisième ordre. (34).

Construction d'une telle surface déterminée par 19 points; le point de départ est la proposition suivante :

« Si, par un point P d'une surface du troisième ordre, on mène trois droites arbitraires ξ, η, ζ, les plans qui joignent tous les points de la surface à trois droites de celle-ci, X, Y, Z, ne se rencontrant pas deux à deux, coupent respectivement ξ, η, ζ en des points ξ_i, η_i, ζ_i dont les jonctions, c'est-à-dire les plans $\overline{\xi_i \eta_i \zeta_i}$, enveloppent une surface de la seconde classe tangente aux faces du trièdre $\xi\eta\zeta$. »

N° 2; 9 juillet.

Foerster. — Sur les conditions du sous-sol de l'Observatoire de Berlin. (78).

Gourier. — Sur une méthode capable de fournir une valeur approchée de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx$. (79).

Cette méthode repose sur la substitution aux polynômes X_n de la méthode de Gauss des polynômes que M. Hermite a déduits de la fonction $e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Barbier (*E.*). — Généralisation du théorème de Jacobi sur les déterminants partiels du système adjoint. (82).

Pellet (*A.*). — Sur la réduction des équations. (85).

Picart (*A.*). — Sur une bascule, nouveau système de romaine à curseur automatique. (86).

N° 3; 16 juillet.

De Saint-Venant et *Flamant*. — Résistance vive ou dynamique des solides. Représentation graphique des lois du choc longitudinal, subi à une de ses extrémités par une tige ou barre prismatique assujettie à l'extrémité opposée. (127).

I. Solutions anciennes et solution nouvelle de la question. — II. Équation différentielle et conditions définies du problème. III. Solution et valeurs successives de la fonction arbitraire qui y entre. — IV. Vérification et justification des expressions trouvées. — V. Temps de la fin du choc.

André (*C.*). — Sur l'observation faite par M. Gonnessiat de la grande comète de 1882. (150).

Gérillot. — Changements produits sur la durée de l'année julienne par les variations des quantités dont dépend cette durée. (151).

La petite différence qui existe entre le moyen mouvement du Soleil adopté par Bessel et celui qu'ont adopté depuis Hansen et Le Verrier n'a, contrairement à l'opinion émise par M. Stone, qu'une influence très faible sur la durée de l'unité de temps employée dans la construction des Tables astronomiques; l'effet en est presque insensible sur le calcul des positions théoriques des corps célestes, dans les limites de temps où les Tables actuelles sont susceptibles de présenter une précision suffisante.

Boussinesq. — Du choc longitudinal d'une barre prismatique, fixée à un bout et heurtée à l'autre. (174).

Extrait d'un Livre actuellement en cours d'impression : *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et des mouvements des solides élastiques, avec Notes étendues sur divers points de Physique mathématique et d'Analyse.*

Radau. — Remarque sur le calcul d'une intégrale définie. (157).

Sur la méthode proposée par M. Gourier. — Cas où les limites sont o et ∞.

Le Paige. — Sur les surfaces du troisième ordre. (159).

N° 4; 25 juillet.

De Saint-Venant et *Flamant*. — Résistance vive ou dynamique des solides. Représentation graphique des lois du choc longi-

tudinal, subi à une de ses extrémités par une tige ou barre prismatique assujettie à l'extrémité opposée (*suite*). (214).

V. Loi des dérivées de la fonction arbitraire. Leurs maxima et minima. — VI. Valeurs de ces dérivées dans l'état de niveau libre. — VII. Loi de la fonction arbitraire elle-même. — VIII. Loi des déplacements des divers points de la barre.

Halphen. — Sur quelques équations différentielles linéaires du quatrième ordre. (247).

Il s'agit des équations signalées précédemment par M. Goursat, et dont les intégrales sont liées par une relation quadratique : l'auteur expose comment on peut reconnaître qu'il en est ainsi et les réduire au second ordre. Pour cela, il fait usage d'une courbe gauche, attachée, pour ainsi dire, à l'équation du quatrième ordre, les coordonnées homogènes d'un point quelconque étant, chacune, une intégrale de l'équation. Il y a identité entre les inconvénients de cette courbe et les inconvénients de l'équation différentielle.

Poincaré. — Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps. (251).

Les masses de deux corps étant supposées très petites, l'auteur déduit d'un théorème de M. Kronecker l'existence d'une infinité de solutions particulières jouissant, entre autres, des propriétés suivantes : le mouvement est périodique, c'est-à-dire que, le temps augmentant d'une période constante, les trois corps reprennent la même position initiale relative. A la fin d'une période, les distances des trois corps reprennent leur valeur initiale, ainsi que les vitesses relatives estimées soit dans la direction du rayon vecteur, soit dans la direction perpendiculaire. Le système entier a seulement tourné d'un certain angle autour du centre de gravité, supposé fixe.

Picart (*A.*). — Nouvelle disposition du segment de bascule romaine à curseur automatique. Troisième Note. (252).

Thollon. — Perturbations solaires nouvellement observées. (252).

N° 5; 30 juillet.

De Saint-Venant et *Flamant.* — Résistance vive ou dynamique des solides. Représentation graphique des lois du choc longitudinal, subi à une de ses extrémités par une tige ou barre prismatique assujettie à l'extrémité opposée (*suite*). (281).

IX. Loi des déplacements des points de la barre dans l'état de détente libre, où la barre et le corps heurtant ont cessé de se toucher. — X. Lois des dilatations ou contractions des divers éléments de la barre rapportées à l'unité de leur longueur. — XI. Plus grands déplacements de l'extrémité heurtée. — XII. Déter-

mination de la plus grande des dilatations ou contractions des divers éléments de la barre, sur l'unité de leurs longueurs. — Conclusion.

Picart (*A*). — Sur l'intégration d'une certaine classe d'équations différentielles partielles du second ordre à deux variables indépendantes. (303).

L'auteur considère le type d'équations aux dérivées partielles du second ordre obtenu en remplaçant R et R', dans l'équation

$$\psi(R, R') = 0,$$

par les racines de l'équation

$$(rt - s^2)R^2 + \sqrt{1 + p^2 + q^2}[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]R + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0.$$

N° 6; 6 août.

Passage de Vénus, du 6 décembre 1882. — *Rapports préliminaires.* (355-443).

Mission de l'île d'Haiti. — *Rapport de M. d'Abbadie, de M. Callandreau, de M. Chappuis. Note de M. de la Beaume-Pluvinel.*

Mission du Mexique. — *Rapport de M. Bouquet de la Grye, de M. Héraud, de M. Arago.*

Mission de la Martinique. — *Rapport de M. Tisserand, de M. Bigourdan, de M. Puiseux; Note de M. Térao.*

Mission de la Floride. — *Rapport de M. Perrier.*

Mission de Santa-Cruz de Patagonie. — *Rapport de M. Fleuriais.*

Mission du Chili. — *Rapport de M. de Bernardières, de M. Barnaud, de M. Favereau.*

Mission de Chubut. — *Rapport de M. Hatt; Notes supplémentaires; observations du passage de Vénus à Montevideo, par M. A. de Penfentenyo.*

Mission du Rio-Negro. — *Rapport de M. Perrotin.*

Mission du Cap Horn. — *Rapport de M. Courcelle-Seneuil.*

Mission de Bragado. — *Lettre de Son Excellence le Dr Dardo-Rocha, gouverneur de la province de Buenos-Ayres, à M. Dumas; Rapport de M. Perrin.*

De Saint-Venant et *Flamant.* — Résistance vive ou dynamique des solides. Représentation graphique des lois du choc longitudinal, subi à une de ses extrémités par une tige ou barre prismatique assujetties à l'extrémité opposée (*suite et fin*). (454.)

N° 7; 13 août.

Stone. — Observations relatives à une Communication précédente de M. Gaillot, sur les changements produits sur la durée de l'année julienne. (484).

L'auteur conteste les résultats obtenus par M. Gaillot et maintient ses propres conclusions.

André (*Ch.*) et *Gonnessiat.* — Sur la détermination des ascensions droites des étoiles circumpolaires. (486).

Sur une méthode analogue à celle que préconise M. Lœwy.

N° 8; 20 août.

Mouchez. — Observation des petites planètes, faites au grand instrument méridien de l'Observatoire de Paris, pendant le deuxième trimestre de l'année 1883. (305).

Faye. — Sur une lettre du général Stebnitski, relative à la figure de la Terre. (308).

N° 9; 27 août.

Gaillot. — Sur la mesure du temps. Réponse aux observations de M. E.-J. Stone. (364).

Lord Rayleigh. — Sur une formule relative à la vitesse des ondes, en réponse à M. Gouy. (365).

Autonne. — Recherches sur les groupes d'ordre fini, contenus dans le groupe des substitutions quadratiques homogènes à trois variables. (367).

L'auteur définit un type de substitutions quadratiques homogènes appartenant à un même groupe; il donne la condition pour que ce groupe soit fini et montre comment l'étude des groupes considérés se ramène à l'étude des groupes linéaires fractionnaires à deux variables.

N° 10; 3 septembre.

Janssen. — Rapport sur la Mission en Océanie, pour l'observation de l'éclipse totale du 9 mai 1883. (586).

Dans le Rapport général sont intercalés des Rapports sommaires, rédigés immédiatement après les observations par MM. Janssen, Tacchini, Palisa et Trouvelot et qui permettent de faire la part de chacun; parmi les importants résultats obtenus par ces éminents observateurs, on notera particulièrement les conclusions négatives auxquelles ils paraissent être arrivés relativement à l'existence de planètes intra-mercurielles.

Bigourdan. — Observations de la planète (234), faites à l'Observatoire de Paris. (610).

N° 11; 10 septembre.

Bigourdan. — Observations de la nouvelle comète découverte par M. Brooks et de la planète (234), faites à l'Observatoire de Paris. (636).

Brassinne. — Proposition sur une question de Mécanique relative à la figure de la Terre. (637).

Si l'on considère un ellipsoïde homogène dont l'équation est

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} - 1 = 0,$$

les composantes de la force exercée sur un point (x', y', z') de la masse intérieure sont de la forme Px', Qy', Rz'; l'auteur en conclut que l'ellipsoïde est, pour une masse fluide, une figure d'équilibre, si l'on a la proportion

$$P : Q : R = \frac{1}{A^2} : \frac{1}{B^2} : \frac{1}{C^2}.$$

N° 12; 17 septembre.

Schulhof et *Bossert.* — Éléments et éphémérides de la comète Pons-Brooks (comète de 1812). (662).

Trouvelot. — Recherche de l'étoile rouge observée pendant l'éclipse totale du 6 mai 1883. (665).

Cette étoile pourrait, d'après l'auteur, être une planète intra-mercurielle.

Perrotin. — Sur l'étoile double Σ2400 du Catalogue de Dorpat. (665).

N° 13; 24 septembre.

Bigourdan. — Observations des petites planètes (159), (199) et (218) et de la comète de Pons-Brooks, faites à l'Observatoire de Paris. (701).

Périgaud. — Observations de la planète (113) Amalthæa. (704).

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE [1].

Tome XI; 1882.

Gorceix. — Étude géologique des gisements de topazes de la province de Minas-Geraes. (10-31).

Sauvage (*L.*). — Sur les propriétés des fonctions définies par un système d'équations différentielles linéaires et homogènes à une ou plusieurs variables indépendantes. (32-78).

L'objet de l'auteur est l'étude des solutions d'un système d'équations aux différentielles totales de la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} dy_i = (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n)\,dx_1 + \ldots \\ + (l_{i1}y_1 + l_{i2}y_2 + \ldots + l_{in}y_n)\,dx_p, \end{aligned}\right.$$

où $i = 1, 2, \ldots, n$, dans les régions du plan où les coefficients $a, b, \ldots, l$ sont des fonctions analytiques des p variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Il résulte tout d'abord du théorème de M. Bouquet sur les systèmes d'équations aux différentielles totales (*Bulletin*, 1re série, t. III, p. 265) que, si les coefficients a sont des fonctions régulières (au sens de M. Weierstrass) au point $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$, il existe n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ satisfaisant aux équations proposées, régulières en ce point $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ et prenant en ce point des valeurs arbitrairement choisies $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$. Cette proposition permet de définir une solution du système (1); en partant, avec des valeurs déterminées, d'un point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on peut, par la continuité, en imposant aux variables indépendantes des *chemins* et des *marches* déterminées, aboutir, avec des va-

---

[1] Voir *Bulletin*, VI_2, 266.

leurs déterminées, à un autre point $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, en supposant, bien entendu, qu'on ne rencontre aucun point singulier des coefficients a, b, ...; mais il est essentiel d'observer qu'on peut, *entre certaines limites*, altérer les *chemins* et les *marches* des variables, sans cesser d'arriver avec les mêmes valeurs au point $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Une *solution* du système (1) est un groupe de n fonctions y définies par le procédé qui vient d'être expliqué.

Quand on considère simultanément plusieurs solutions, on suppose que les variables ont les mêmes marches sur les mêmes chemins.

Un *système* de solutions est l'ensemble de n solutions des équations proposées.

Un tel système

$$\begin{matrix} y_{11}, & y_{21}, & \ldots, & y_{n1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ y_{1n}, & y_{2n}, & \ldots, & y_{nn} \end{matrix}$$

est dit fondamental si le déterminant formé au moyen de ses éléments est différent de zéro; M. Sauvage prouve l'existence de systèmes fondamentaux; toute solution du système (1) peut s'obtenir par des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients constants des éléments d'un système fondamental quelconque de solutions. M. Sauvage poursuit les analogies bien évidentes avec la théorie, due à M. Fuchs, des équations différentielles linéaires et donne, en particulier, un procédé pour construire un système fondamental de solutions, en procédant de proche en proche, par la considération de systèmes contenant un nombre de moins en moins grand d'inconnues.

En supposant ensuite que les variables reviennent au point de départ, on arrive, comme pour les équations différentielles linéaires, à la notion de l'*équation fondamentale*, équation dont les racines sont liées en quelque sorte à un certain système fondamental; l'analogie est complète.

Enfin, dans la dernière partie, l'auteur étudie le cas particulièrement simple où il n'y a qu'une seule variable indépendante.

Elliot. — Propriétés et applications de certaines fonctions analogues à la fonction Θ. (791-118).

Sous ce titre, M. Elliot a publié, dans ce Volume des *Annales*, deux Mémoires dont nous rendons compte simultanément, et dont l'objet essentiel est la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles, analogue à celui qui définit les fonctions abéliennes, mais où figurent des intégrales normales de troisième espèce; cette question avait déjà été traitée, d'une façon toute différente, par MM. Clebsch et Gordan (*Theorie der Abelschen Functionen*, p. 287).

M. Elliot la résout en étudiant directement les fonctions $\Theta^{(q)}$ introduites par ces auteurs, et en faisant entrer dans leur composition des constantes telles qu'on puisse leur appliquer les deux théorèmes de Riemann relatifs à la fonction $\Theta[u^{(i)}(x) - G_i]$; la marche suivie est alors toute pareille à celle que M. Briot a adoptée dans sa *Théorie des fonctions abéliennes*. Ajoutons que MM. Clebsch et Gordan ont seulement considéré le cas où les équations aux dérivées partielles contenaient q intégrales de troisième espèce, tandis que M. Elliot traite le cas où elles contiendraient en outre r intégrales normales de deuxième espèce.

Notations : courbe fondamentale, de genre p, de degré m :

$$F(x, y) = 0.$$

Intégrales normales de première espèce :

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_p.$$

Intégrales normales de troisième et de deuxième espèce :

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_q;$$
$$w_1, \quad w_2, \quad \ldots, \quad w_r.$$

Les périodes normales d'indice pair des intégrales $u^{(i)}$ sont représentées par $2\alpha_{ij}$; quant aux périodes d'ordre pair, l'une est égale à $2\pi\sqrt{-1}$, les autres sont nulles.

Pour les intégrales normales $v^{(k)}$, les périodes normales d'indice impair sont nulles; les périodes normales d'indice pair sont désignées par

$$2A_{ki} = u^{(i)}(\eta^{(k)}) - u^{(i)}(\xi^{(k)});$$

$(\xi^{(k)}, \xi_1^{(k)}), (\eta^{(k)}, \eta_1^{(k)})$ désignent les points analytiques pour lesquels $v^{(k)}$ devient infinie; l'intégrale $u^{(i)}(\xi_k)$ est prise le long du chemin formé par les lacets fondamentaux de deuxième espèce conduisant de la racine initiale y_0 avec laquelle commence le circuit unique qui contient le lacet du point $(\xi^{(k)}, \xi_1^{(k)})$, chemin suivi des lacets relatifs aux points critiques algébriques qui entrent dans ce circuit jusqu'à la droite $O\xi^{(k)}$ décrite une seule fois de O vers $\xi^{(k)}$; l'intégrale $u^{(i)}(\eta^{(k)})$ a un sens analogue.

Pour les intégrales normales de deuxième espèce $w^{(h)}$, les périodes normales d'indice impair sont nulles; les périodes normales d'indice impair sont représentées par

$$\varepsilon l_{hi} = \left(\frac{du^{(i)}}{dx}\right)_{\zeta^{(h)}};$$

on les obtient en remplaçant x et y par les coordonnées $\zeta^{(h)}, \zeta_1^{(h)}$ du pôle de l'intégrale w_h dans les $\frac{du^{(i)}}{dx}$.

Enfin, en considérant les mêmes chemins d'intégration que ci-dessus, on pose

$$v^{(k)}(\eta^{(k')}) - v^{(k)}(\xi^{(k')}) = L_{kk'},$$

et l'on a

$$L_{kk'} = L_{k'k}.$$

Désignant ensuite par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q$, q quantités égales à ± 1, M. Elliot introduit les constantes H définies par les équations

$$4H_s = \varepsilon_1 L_{s1} + \varepsilon_2 L_{s2} + \ldots + \varepsilon_q L_{sq},$$

où

$$s = 1, 2, \ldots, q,$$

et il pose

$$\Theta^{(q)}(u^{(i)}, v^{(k)}) = \sum_{\varepsilon} \Theta\left(u^{(i)} + \sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k A_{ki}\right) e^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k (v^{(k)} + H_k)};$$

chaque terme est le produit d'une fonction Θ ordinaire par une exponentielle; il y a autant de termes que de groupes distincts de quantités ε, c'est-à-dire 2^q; par exemple, pour $q = 1$, on a

$$\Theta^{(1)}(u^{(i)}, v^{(i)}) = \Theta(u^{(i)} + A_{1i})e^{\frac{1}{2}v^{(1)}} + \Theta(u^{(i)} - A_{1i})e^{-\frac{1}{2}v^{(1)}}.$$

Ces fonctions $\Theta^{(q)}$ sont les mêmes fonctions que celles considérées par MM. Clebsch et Gordan. M. Elliot considère en outre les fonctions $\Theta_{(r)}$ et $\Theta^{(q)}_{(r)}$ définies comme il suit :

On a

$$\Theta_{(1)} = w^{(1)}\Theta + D\zeta^{(1)}\Theta,$$

le $D\zeta^{(i)}\Theta$ désignant la dérivée de la fonction Θ par rapport à x, où l'on convient de remplacer les variables x et y par $\zeta^{(1)}, \zeta_1^{(1)}$ *dans les dérivées des intégrales $u^{(i)}$ seulement*, en d'autres termes

$$D\zeta^{(1)}\Theta = \sum_{i=1}^{2=p} a_{1i}\frac{\partial\Theta[u^{(i)}(x)]}{\partial u^{(i)}(x)};$$

de même,

$$\Theta_2 = w^{(2)}\Theta_{(1)} + D\zeta^{(1)}\Theta^{(1)}.$$

Le deuxième terme du deuxième membre est la dérivée de $\Theta_{(1)}$ par rapport à x, avec la convention que l'on remplace x et y par $\zeta^{(2)}$, $\zeta_1^{(2)}$ dans les dérivées des intégrales $u^{(i)}$ et de l'intégrale $w^{(1)}$,

$$\Theta_3 = w^{(3)}\Theta_2 + D\zeta^{(1)}\Theta_{(1)};$$

ici, dans la dérivée, par rapport à x de $\Theta_{(2)}$, on doit remplacer x, y par $\zeta^{(3)}$ $\zeta_1^{(3)}$ dans les dérivées des $u^{(i)}$, de $w^{(1)}$ et $w^{(2)}$, ... : $\Theta_{(r)}$ est symétrique par rapport aux diverses intégrales w.

On a ensuite

$$\Theta^{(q)}_{(1)} = w^{(1)}\Theta^{(q)} - D\zeta^{(3)}\Theta^{(q)}.$$

Le deuxième terme du deuxième membre est la dérivée de $\Theta^{(q)}$ par rapport à x, où l'on remplace x, y par $\zeta^{(1)}$, $\zeta_1^{(1)}$, mais seulement dans les dérivées des intégrales $u^{(i)}$ et dans celles des intégrales $v^{(k)}$:

$$\Theta^{(q)}_{(r)} = w^{(r)}\Theta^{(q)}_{(r-1)} + D\zeta^{(r)}\Theta^{(q)}_{r-1};$$

ici, il faut faire $x = \zeta^{(r)}$, $y = \zeta_1^{(r)}$ dans $\frac{du^{(i)}}{dx}, \frac{dv^{(k)}}{dx}, \frac{dw^h}{dx}$.

L'étude de la fonction

$$\Theta^{(q)}_{(r)}(u^{(i)} - G_i, v^{(k)} - g_k, w^{(h)} - \gamma_h),$$

où les G_i, g_k, γ_h désignent des constantes quelconques qui, d'ailleurs, sont susceptibles de prendre une infinité de valeurs, conduit ensuite aux propriétés suivantes :

Cette fonction admet $p+q+r$ zéros satisfaisant aux équations

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r} u^{(i)}(x_j) - G_i = C_i,$$

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r} v^{(k)}(x_j) - g_k = D_k,$$

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r} w^{(h)}(x_j) - \gamma_h = E_h.$$

Les deuxièmes membres sont des constantes auxquelles on doit ajouter des multiples quelconques des périodes des intégrales qui figurent dans les premiers membres correspondants; les constantes G, g, γ peuvent être choisies de façon que la fonction considérée admette $p+q+r$ zéros donnés arbitrairement.

La considération des courbes *adjointes* conduit ensuite l'auteur aux propositions suivantes :

La fonction $\Theta_{(r)}^{(q)}$, dont les arguments sont

$$u^{(i)}(x) + \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} u^{(i)}(x_j) - u^{(i)}(\alpha) - C_i,$$

$$v^{(k)}(x) + \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} v^{(k)}(x_j) - v^{(k)}(\alpha) - D_k,$$

$$w^{(h)}(x) + \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} w^{(h)}(x_j) - w^{(h)}(\alpha) - E_h,$$

admet le zéro (α, β) et $p+q+r-1$ autres zéros indépendants du premier.

Soient $\Phi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ les équations de deux courbes données de degré n, (a_e, b_e) les mn points d'intersection de la première, (α_e, β_e) les mn points d'intersection de la seconde avec la courbe fondamentale $F(x, y) = 0$, les deux produits

$$V = \prod_{l=1}^{l=m} \frac{\Theta_{(r)}^{(q)}\left[\sum_{j=1}^{j=p+q+r} u^{(i)}(x_j) - u^{(i)}(a_e) - C_i, \ldots\right]}{\Theta_{(r)}^{(q)}\left[\sum_{j=1}^{j=p+q+r} u^{(i)}(x_j) - u^{(i)}(\alpha_e) - C_i, \ldots\right]}$$

et

$$P = \prod_{l=1}^{l=mn} \frac{\Phi(x_e, y_e)}{\Phi(x_e, y_e)}$$

ne diffèrent que par une constante.

M. Elliot se trouve maintenant en mesure de résoudre le problème posé au début de la même façon que M. Briot a résolu le problème de l'inversion

pour les équations abéliennes; d'une façon précise, ce problème, si l'on pose, en employant des notations qui s'expliquent d'elles-mêmes,

$$u^{(i)}(x) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{\varphi_i(x, y)}{F'_y(x, y)}\, dx,$$

$$v^{(k)}(x) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{\psi_k(x, y)}{[\xi^{(k)}, \eta^{(k)}] F'_y(x, y)}\, dx,$$

$$w^{(k)}(x) = \int_{x_0, y_0}^{x, y_h} \frac{\chi_h(x, y)}{[\zeta^{(h)}] F'_y(x, y)}\, dx,$$

consiste dans la résolution par rapport aux x, les u, v, w étant regardés comme donnés, des $p + q + r$ équations différentielles

$$\sum_{n=1}^{n=p+q+r} \frac{\varphi_i(x_n, y_n)}{F'_y(x_n, y_n)}\, dx_n = du_i \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$$\sum_{n=1}^{n=p+q+r} \frac{\psi_k(x_n, y_n)}{[\xi^{(k)}, \eta^{(k)}]_n F'_y(x_n, y_n)}\, dx_n = dv_k \quad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

$$\sum_{n=1}^{n=p+q+r} \frac{\chi_h(x_n, y_n)}{[\zeta^{(h)}]_n F'_y(x_n, y_n)}\, dx_n = dw_h \quad (h = 1, 2, \ldots, r);$$

les indices n dont sont affectés les crochets signifient que, dans les fonctions linéaires de x, y que représentent ces crochets, on a remplacé x par x_n, y par y_n.

Cette question, interprétée géométriquement, revient à la suivante :

Trouver les $p + q + r$ points d'intersection avec $F(x, y) = 0$ d'une courbe adjointe du degré $m + q + r - 2$ passant par $p + q + r + m - 2$ points de $F(x, y) = 0$ et par $q + r$ points situés respectivement sur chacune des droites $[\xi^{(k)}, \eta^{(k)}]$, $[\zeta^{(h)}]$ en dehors de la courbe.

Charve. — De la réduction des formes quadratiques quaternaires positives. (119-133).

M. Selling (*Journal de Borchardt*, t. LXXVII) a donné une méthode de réduction pour les formes ternaires positives que M. Charve a d'ailleurs exposée dans le t. VII des *Annales;* M. Charve applique cette méthode aux formes quaternaires positives.

On commence par remplacer les variables x, y, z, t de la forme quaternaire donnée par les quantités $x - u$, $y - u$, $z - u$, $t - u$, puis on la met par une transformation facile sous la forme

$$\varphi = a(x-y)^2 + b(x-z)^2 + c(x-t)^2 + d(x-u)^2 + e(y-z)^2 + f(y-t)^2 + g(y-u) + h(z-t)^2 + k(z-u)^2 + l(t-u)^2,$$

et c'est cette forme que l'on étudie : il est bien aisé de voir comment on passe des substitutions relatives à la forme donnée (à quatre variables) aux substitutions relatives à la forme φ (à cinq variables) et réciproquement.

La forme φ est dite réduite si elle satisfait à l'*une* des conditions suivantes

1° Ou bien tous les coefficients $a, b, c, \ldots, l$ sont positifs;

2° Ou bien a est seul négatif et il est inférieur en valeur absolue à a, b, c, d, e, f, g;

3° Ou bien a et b sont seuls négatifs, de plus a est inférieur en valeur absolue à b, c, d, e, f, g; en même temps h est inférieur en valeur absolue à b, c, e, f, k, l; enfin $a + h$ est inférieur en valeur absolue à b, c, e, f.

Cette définition est précisée par les propositions suivantes, établies par M. Charve :

1° *Il y a toujours une forme équivalente à la forme donnée et vérifiant les conditions précédentes;*

2° *Il n'y en a qu'une, abstraction faite de celle que l'on peut déduire par la permutation des lettres, c'est-à-dire que si une forme satisfait à quelqu'une des trois conditions, aucune forme équivalente ne satisfera à l'une de ces conditions, quelle que soit cette condition.*

En outre, M. Charve établit que la réduction peut être obtenue par l'emploi répété (un nombre fini de fois) de deux substitutions seulement.

Hioux. — Racines communes à deux équations algébriques entières. (135-136).

Note additionnelle à un Mémoire inséré dans le t. X des *Annales*.

Chappuis. — Étude spectroscopique sur l'ozone. (137-186).

Parmentier. — Sur les silicomolybdates. (187-218).

Kœnigs. — Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé. (219-338).

Le travail de M. Kœnigs a été analysé dans la première partie du *Bulletin*.

Brillouin. — Comparaison des coefficients d'induction. (339-424).

Elliot. — Propriétés et applications de certaines fonctions analogues à la fonction Θ. (425-436).

Voir plus haut.

Nicolas. — Étude sur les fonctions de Fourier. (*Supplément*, 1-90).

Monographie des fonctions connues aussi sous le nom de *fonctions cylindriques* et de *fonctions de Bessel*.

I. Propriétés principales des fonctions de Fourier. — II. De la fonction de deuxième espèce. — III. Autres développements en séries; ces développements sont obtenus en introduisant la fonction exponentielle en facteur. — IV. Représentation des fonctions de Fourier par des intégrales définies. — V. Etude de nouvelles intégrales. — VI. Cas où le paramètre v est de la forme $n + \frac{1}{2}$, n étant un nombre entier et v le paramètre qui entre dans l'équation différentielle du second ordre : ce cas correspond à une équation différentielle intégrée par M. Serret en employant la méthode des différentielles et indices quel-

conques; M Nicolas traite cette équation directement et parvient à quelques propriétés remarquables de la fonction exponentielle, signalées en partie par M. Hermite (*Comptes rendus*, 1873).

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, publié par le Conseil d'instruction de cet établissement [1].

LIIe Cahier. — Tome XXXIII, 1882.

Halphen. — Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques. (1-200.)

Ce Mémoire a été couronné par l'Académie des Sciences de Berlin (Prix Steiner, 1882).

Nous citons en partie le résumé que donne l'auteur des principaux résultats obtenus par lui.

Le problème de la classification des courbes gauches algébriques se pose en ces termes :

Énumérer, définir entre elles les diverses familles de courbes d'un même degré, de telle sorte qu'aucune famille ne puisse jamais être cas particulier d'une autre plus générale.

...Je me borne d'ailleurs, et d'une manière absolue, aux courbes qui n'ont pas de points singuliers.

En premier lieu, il convient d'examiner quelles sont les familles dont on peut obtenir une définition immédiate. A cet égard, on verra dès le début, et de trois manières différentes, le résultat suivant :

Les courbes de degré d, ayant k points doubles apparents, forment une seule famille si le nombre k est compris entre les deux limites H(1) *et* H(2) *ci-après,*

$$H(1) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}, \quad H(2) = \frac{(d-2)(d-3)}{2} + 1.$$

Et voici le caractère distinctif de ces familles :

Toute courbe plane, de degré d, ayant des points doubles en nombre h, compris entre ces deux limites, est la perspective d'une courbe gauche de degré d, ayant h points doubles apparents.

Au contraire, *une courbe plane, de degré d, ayant des points doubles en nombre h inférieur à* H(2), *et d'ailleurs quelconque, n'est pas la perspective d'une courbe gauche de degré d.*

Jusqu'au sixième ordre inclusivement, il n'existe pas d'autres courbes que

---

[1] Voir *Bulletin*, VII_2, 165.

celles dont je viens de parler. Dès le septième degré, il en apparaît d'autres. C'est de là que naît toute la difficulté du problème.

Quoique la caractéristique h ne puisse suffire à distinguer les diverses familles de courbes d'un même degré, elle est cependant très propre à séparer les unes des autres la plupart de ces courbes. Aussi est-il essentiel de connaître d'abord quelles sont les diverses valeurs numériques de cette caractéristique :

Le minimum de h est l'entier contenu dans $\left(\frac{d-1}{2}\right)^2$.

Voici maintenant un autre résultat bien saillant :

La caractéristique h n'est pas susceptible de devenir égale à un quelconque des entiers depuis $\left(\frac{d-1}{2}\right)^2$ *jusqu'à* $\frac{(d-1)(d-2)}{3}$, *mais seulement à quelques-uns d'entre eux.*

Ainsi, pour un même degré d, la suite des nombres h est *discontinue*, elle présente des *lacunes*. Cette circonstance ne s'offre pas avant le neuvième degré.

On a en même temps cette proposition :

Les courbes de degré d qui ont moins de $\frac{(d-1)(d-2)}{3}$ *points doubles apparents sont situées sur des surfaces du second degré. Les nombres h qui s'y rapportent sont donnés par la formule*

$$h = \frac{d(d-1)}{2} - \lambda(d-\lambda),$$

où λ est un entier arbitraire. Le minimum $\left(\frac{d-1}{2}\right)^2$ est atteint pour $\lambda = \left(\frac{d+1}{2}\right)$. Les autres valeurs s'obtiennent quand on fait croître λ.

A chacun de ces nombres h correspond une famille de courbes C_2 situées sur une surface du second degré. Tant que h n'atteint pas la limite $\frac{(d-1)(d-2)}{3}$, *ces familles seules existent. Quand h dépasse cette limite* $H(3)$, *les courbes C_2 composent des familles qui coexistent avec d'autres correspondant aux nombres d, h.*

Le nombre $H(3)$ est donné par une formule générale, comprenant aussi $H(1)$ et $H(2)$, et dont il sera parlé plus loin.

A partir de la limite $\frac{(d-1)(d-2)}{3}$, la suite des nombres h ne présente plus de lacunes.

A chaque nombre entier pris pour h, à partir de $\frac{(d-1)(d-2)}{3}$, *correspond une famille de courbes C_3, situées sur des surfaces du troisième degré. Tant que h n'atteint pas la nouvelle limite* $3\left[\frac{(d-2)^2}{8}\right]$, *ces courbes C_3 existent seules, conjointement avec les courbes C_2. Au delà, elles composent encore des familles distinctes tant que h n'atteint pas une autre limite* $H(4)$. *Au delà, elles ne sont plus que des cas particuliers.*

Cette sélection se poursuit encore :

A chaque nombre entier pris pour h, à partir de $3\left[\frac{(d-2)^2}{8}\right]$, *correspond*

une famille de courbes C_4 *situées sur des surfaces du quatrième ordre (sauf une lacune d'une unité dans les valeurs de* h à partir du minimum, quand le degré est divisible par 4). *Tant que* h *n'atteint pas la limite* $2\left[\frac{(d-2)(d-3)}{5}\right]$ *ou, pour le cas où* d *est divisible par* 5, *la limite* $2\left[\frac{d(d-5)}{5}\right]$, *ces courbes* C_4 *coexistent seules avec les courbes* C_2, C_3. *Au delà, elles composent encore des familles distinctes, tant que* h *n'atteint pas une autre limite* $H(5)$.

La même sélection, qui ne peut être reconnue que sur des exemples où d soit choisi assez grand, se continue, et voici enfin l'énoncé général de la loi qui y préside.

Soit m *un nombre entier égal ou inférieur au plus petit nombre entier* M *pour lequel est satisfaite la condition*

$$\frac{(M+1)(M+2)(M+3)}{3} \geqq M\,d+3.$$

A ce nombre m *correspond une fonction* $\mathfrak{H}(m)$ *jouissant de la propriété suivante :*

I. *Toute courbe du degré* d *qui a moins de* $\mathfrak{H}(m)$ *points doubles apparents est située sur une surface de degré moindre que* m.

La fonction $\mathfrak{H}(m)$ *est toujours croissante avec* m. (On dira dans un instant quelle est cette fonction.)

II. *A tout nombre* h, *égal ou supérieur à* $\mathfrak{H}(m)$, *correspond une famille de courbes* C_m, *du degré* d, *situées sur des surfaces de degré minimum* m (sauf quelques lacunes dans les plus petites valeurs de h et le cas $m=2$). *Tant que* h *reste inférieur à une autre limite* $H(m+1)$, *les courbes* C_m *coexistent conjointement à toutes autres et composent des familles distinctes. Au delà de cette limite, ce ne sont plus que des cas particuliers. La limite* $H(m+1)$ *est donnée par la formule*

$$H(m+1) = \frac{(d-m-1)(d-m-2)}{2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{6}.$$

III. *La courbe* C_m, *qui a le plus grand nombre de points doubles apparents* $h = H(m+1)-1$, *comporte dans sa définition* $4d$ *arbitraires. Chacune des autres en comporte davantage, savoir* $4d+H(m+1)-1-h$ (sauf encore quelques exceptions pour les plus petites valeurs de h).

Si, dans la fonction H, on fait varier l'entier m de toutes les manières possibles (*sans tenir compte d'ailleurs de la condition* $m \leqq M$), on reconnaît que cette fonction H a un minimum. Ce minimum donne lieu à une exception pour la proposition précédente. Voici cette exception : *En général, il existe dans le voisinage de* M *un ou plusieurs entiers* m, *pour lesquels la limite* $\mathfrak{H}(m)$ *est supérieure au minimum de* H ; *ce n'est d'ailleurs pas pour un de ces nombres que* H *atteint un minimum, et, dans tous les cas, comme l'énoncé* II *l'exige,* $H(m+1)$ *est toujours supérieur à* $\mathfrak{H}(m)$.

Pour un tel nombre, la fonction $\mathfrak{H}(m)$ *jouit toujours des propriétés* II *et* III, *mais non plus de la propriété* I ; *à l'égard de cette derniere,* $\mathfrak{H}(m)$ *est remplacé par le minimum de* H.

Pour les nombres m_1 *supérieurs à* M, *il existe une fonction* $H_1(m_1)$ *donnant*

lieu encore à la propriété I. *Cette fonction a la même définition que* H, *mais appliquée à d'autres valeurs de l'argument*

$$\mathfrak{H}_1(m_1) = \frac{(d-m_1)(d-m_1-1)}{2} + m_1(m_1^2-1).$$

L'enoncé II *subsiste si l'on y remplace* $H(m+1)$ *par* $\mathfrak{H}(m_1+1)$.

Quant à la proposition III, elle se change en celle-ci :

IV. *Chaque famille générale de courbes du degré d, échappant à la définition des courbes* C_m, *comporte* $4d$ *arbitraires.*

Il reste enfin, pour compléter cet énoncé, à définir la fonction $H(m)$.

V. *Soit* σ *le plus petit nombre non négatif qui rende* $d+\sigma$ *divisible par* m *et soit* $d+\sigma = m\mu$. *Sous la condition formelle* $m^2 - m < d$, *on a*

$$\mathfrak{H}(m) = \frac{(d-\sigma)(m-1)(\mu-1)}{2}.$$

Mais, pour les nombres m', *donnant* $m'^2 - m' \geqq d$, *il n'y a point de formule simple fournissant l'expression de la fonction* $\mathfrak{H}(m')$. *Je dois me contenter de dire, dans ce résumé, qu'il existe une méthode certaine pour calculer cette fonction.*

Il est assez malaisé de saisir la portée véritable de ces théorèmes autrement que par des exemples. Mais encore faut-il prendre le nombre d assez grand pour que la plus grande partie des propositions se puisse appliquer. C'est pour cette raison qu'après avoir présenté, au Chapitre VI de ce Mémoire, la classification suivie complète des courbes jusqu'au vingtième degré inclusivement, j'ai traité aussi et la classification des courbes de degré 120. On verra, par les résultats de cette classification qui terminent le Mémoire, que les théorèmes précédents résolvent véritablement ces deux parties du problème proposé : *Enumérer et distinguer entre elles les diverses familles de courbes d'un même degré.* Quant à cette autre partie : *définir en courbes,* c'est-à-dire *en donner explicitement une représentation* ou, du moins, le moyen d'y parvenir, la solution n'est pas complète. Mais c'est qu'aussi cette partie du problème ne paraît pas susceptible d'une solution générale, et doit être abordée à part pour chaque cas.

Le problème dont il s'agit se réduit à cet autre, appartenant à la Géométrie plane : *Trouver deux courbes, de degrés donnés, qui se touchent en des points dont le nombre soit égal à un nombre donné.* C'est là un problème dont il ne semble pas qu'on puisse jamais obtenir une solution générale.

Toutefois, et c'est là un des traits principaux du Mémoire actuel, ce problème n'existe, à chaque degré d, que pour une faible minorité des familles de courbes. Effectivement, on a cette proposition :

VI. *Toutes les courbes dénommées tout à l'heure* C_m *sont immédiatement définies et représentées au moyen de courbes de degré moindre.*

Si l'on joint à cette proposition celle que j'ai énoncée au sujet des courbes pour lesquelles h est supérieur à $H(2)$, on n'a plus à traiter de nouveaux problèmes que pour un nombre fort restreint de courbes. Ainsi, dans l'exemple $d = 120$ que j'ai examiné, où le minimum de h est 3540, le maximum 7021, ce sont seulement les nombres h compris entre les limites 6920 et 6963 qui donnent

lieu au problème dont je parle. Il ne se pose pas, d'ailleurs, avant le onzième degré, et jusqu'au treizième degré inclusivement il se résout immédiatement.

Tels sont, en résumé, les principaux résultats de ce Mémoire. Quant à la méthode qui s'y trouve employée et à l'ordonnance des matières, il me reste peu de mots à ajouter. Je me sers principalement, pour représenter les courbes, de deux équations ou coordonnées rectilignes

$$(A) \qquad \psi(x,y) = 0, \quad z = \frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)},$$

où φ, ψ, χ désignent des polynômes entiers. Les lettres x, y, z sont ou bien des coordonnées cartésiennes, ou bien les rapports de coordonnées homogènes. Ce mode de représentation, tout naturel, a été employé par M. Cayley dans quelques courtes études sur les courbes du quatrième et du cinquième degré (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LIV), et par M. Édouard Weyr, dans un Mémoire auquel j'emprunterai un résultat important.

Après avoir exposé, avec tous les développements nécessaires, les premières notions qui se rattachent immédiatement au mode de représentation (A) et y avoir consacré le Chapitre I, je montre, dans le Chapitre II, comment s'offre cette circonstance si curieuse : la suite des nombres h présente des lacunes à partir du minimum.

Le Chapitre III, le plus long du Mémoire, est aussi celui qui contient la théorie la plus abstraite et la plus importante. J'y expose les propriétés de certaines opérations algébriques, analogues à l'élimination, et qui, appliquées aux trois polynômes φ, ψ, χ, conduisent d'une courbe quelconque à une autre courbe que j'appelle *adjointe*. Cette adjointe n'a pas de définition géométrique, elle dépend essentiellement des éléments de la représentation (A) qui peuvent être variés à l'infini. Néanmoins toutes les propriétés de la courbe envisagée, qui ont de l'intérêt pour la classification, se reflètent dans cette adjointe. C'est par l'intervention de cette dernière que je parviens aux résultats énoncés précédemment.

La partie de ces énoncés relative aux courbes situées sur les surfaces du troisième degré est exposée en détail dans le Chapitre IV; l'extension des résultats aux courbes tracées sur les surfaces du quatrième et du cinquième degré et enfin de degré quelconque fait l'objet du Chapitre V, qui se termine par l'exposé des moyens propres à la classification des courbes d'un degré quelconque.

J'ai déjà dit que le Chapitre VI contient les applications numériques nécessaires à la parfaite intelligence des résultats généraux dont la démonstration termine le Mémoire.

Léauté. — Application de la résistance des matériaux au calcul des pièces des machines. (201-210).

Les formules ordinaires de la résistance des matériaux supposent que les composantes et les moments des forces extérieures peuvent être évalués comme s'il n'y avait pas eu de déformation. Cette hypothèse, qui permet de ramener le problème aux quadratures, n'est plus admissible pour les pièces de machines : alors, en effet, les actions principales proviennent souvent d'efforts élastiques exercés par les pièces en relation avec celle que l'on considère, de telle sorte que ces actions dépendent alors essentiellement des déformations qu'éprouvent ces pièces. Ces déformations elles-mêmes dépendent, par suite des liaisons, de la déformation de même ordre qu'éprouve la pièce étudiée, et les forces extérieures

auxquelles cette pièce est soumise se trouvent ainsi fonction de la déformation inconnue qu'elle subit; d'autre part, pour étudier rigoureusement un organe d'une machine, il faut étudier séparément les éléments qui le composent et tenir compte, pour chacun de ces éléments, des forces élastiques qu'exercent sur lui les éléments qui le composent.

Dès lors, le problème change de nature : dans l'hypothèse ordinaire, les forces extérieures que l'on doit considérer sont fonction seulement de l'unique variable qui définit la position de ce point, et l'on est ainsi conduit à de simples quadratures; dans le cas considéré par M. Léauté, les forces qui interviennent dépendent en outre de la déformation au point considéré, les équations contiennent les éléments de la déformation et leurs dérivées : ce sont ces équations différentielles qu'établit M. Léauté, en se bornant toutefois à l'étude des pièces planes à section constante, qui sont les seules employées habituellement.

Baille. — Études sur la résistance de l'air et les mouvements oscillatoires très lents. (211-251).

Ce Mémoire comprend deux Parties : dans la première, l'auteur étudie la résistance que l'air d'une cage plus ou moins grande oppose au mouvement des différents mobiles suspendus au levier de la balance de torsion; la relation des nombreuses expériences et les considérations théoriques développées par M. Baille mettent en évidence l'extrême complication du problème. La seconde Partie contient la critique d'un Mémoire de M. Hirn : « Recherches expérimentales sur la relation qui existe entre la résistance de l'air et sa température. Conséquences physiques et philosophiques qui découlent de ces expériences. » Le Mémoire, dont les conclusions étaient contraires à la théorie des gaz, a eu un grand retentissement. D'après M. Baille, la formule que M. Hirn déduit de cette théorie et les expériences qu'il a faites ne se rapportent pas à la même chose. Enfin l'auteur termine par la relation d'expériences, faites dans la voie ouverte par M. Hirn, et relatives à la variation de la résistance de l'air avec la pression et la température.

LIIIe Cahier. — Tome XXXII, 1883.

Resal. — Solution de quelques questions se rapportant aux ponts suspendus. (1-15).

Formules générales pour déterminer les déformations du tablier produites par les variations de température dans les câbles et les tiges de suspension, et l'élasticité lors de la mise en charge de la construction. — Conditions qui doivent être remplies par l'une des poutres longitudinales auxquelles on peut avoir recours pour donner de la rigidité au tablier du pont ou pour tout autre motif, pour que cette poutre repose dans toute son étendue sur le tablier. — Conditions de résistance des câbles en écheveau.

Resal. — Développement sur un point de la théorie de la rotation des corps solides. (17-30).

Il s'agit du cas où la résultante des forces extérieures passe par un point fixe, le corps étant mobile autour de ce point. M. Resal simplifie et précise l'analyse

par laquelle Poinsot est parvenu à l'équation différentielle du cône lieu de l'axe instantané dans l'espace fixe, ou plutôt de la courbe lieu du point de contact de l'ellipsoïde d'inertie avec plan fixe sur lequel roule cet ellipsoïde.

Moutier. — Sur la loi de Dulong et Petit. (31-57).

Léauté. — Sur une famille de courbes que l'on rencontre dans les transmissions de mouvement et sur leur application dans les machines. (59-78).

Il s'agit de ce problème : « Étudier la forme des courbes engendrées par les différents points d'une figure mobile dont deux des points parcourent des cercles fixes. » M. Léauté considère le cas d'une bielle dont la tête parcourt une circonférence de cercle et dont le pied s'appuie sur un cercle de grand rayon. Il forme l'équation de la trajectoire en négligeant, au delà de la seconde, les puissances du rapport du rayon du cercle décrit par la tête à la longueur de la bielle, le rayon du cercle décrit par le pied étant supposé comparable à la longueur de la bielle; les équations approchées définissent des courbes unicursales du quatrième ordre, qu'on peut regarder comme des réciproques de coniques.

Ces équations peuvent être mises sous la forme

$$x = A_0 + e(A\cos\theta + B\sin\theta) + e^2(A_1\cos 2\theta + B_1\sin 2\theta),$$
$$y = B_0 + e(C\cos\theta + D\sin\theta) + e^2(C_1\cos 2\theta + D_1\sin 2\theta),$$

e étant précisément le petit rapport défini plus haut et dont on néglige le cube.

Ces équations s'interprètent immédiatement; elles permettent de discuter les différentes formes des trajectoires : les courbes qui présentent le plus d'intérêt pratique sont celles que l'on obtient en supposant que l'ellipse à laquelle elles se réduiraient en négligeant e^2 est très aplatie; M. Léauté montre comment on peut les substituer à un arc de courbe donné de petite étendue et le degré de précision que l'on peut obtenir ainsi.

Picquet. — Quelques développements sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants. (79-134).

Quand on connaît un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire d'ordre n sans second membre, on peut, en se servant d'une formule due à Lagrange, trouver l'intégrale générale de la même équation avec second membre. M. Picquet examine ce que devient la formule de Lagrange lorsqu'on suppose constants les coefficients de l'équation linéaire sans second membre : il insiste en particulier sur le cas où l'équation caractéristique a des racines multiples. Malgré son caractère élémentaire, la question prête, comme le montre l'auteur, à d'assez riches développements analytiques, où, naturellement, la théorie de la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples joue un rôle prépondérant. M. Picquet rencontre, chemin faisant, un grand nombre d'identités algébriques, parmi lesquelles nous signalerons en particulier l'expression des fonctions symétriques e' des racines α d'une équation algébrique $f(x) = 0$, de la forme

$$\sum \frac{\alpha^n}{f'(\alpha)},$$

lorsque n est un entier positif supérieur au degré de l'équation proposée.

Lecornu (*L.*). — Mémoire sur les surfaces enveloppes de sphères. (135-173).

L'auteur montre comment, en partant des formules de Codazzi, on peut parvenir à la détermination explicite des éléments d'une surface enveloppe de sphère : son procédé consiste à exprimer les fonctions cherchées au moyen d'une fonction auxiliaire φ qui vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda\,\partial\mu}\left(\log\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right) = -\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\mu},$$

où λ et μ sont les paramètres relatifs aux *parallèles* (cercles de contact avec la sphère) et aux *méridiens* (trajectoires orthogonales des parallèles sur la surface). Cette même équation a été considérée par M. Darboux dans une Communication à l'Académie des Sciences, analysée par le Bulletin, *Sur les surfaces à lignes de courbure planes dans un système et isothermes,* communication faite le 23 avril 1883, à un moment où le travail de M. Lecornu était sous presse. M. Lecornu montre comment cette équation se ramène à une équation différentielle linéaire ordinaire du second ordre et sans second membre. Il interprète aussi la signification géométrique de la fonction φ en introduisant la considération des *lignes d'inflexion,* en chaque point desquelles le méridien présente une inflexion géodésique. Pour un déplacement effectué suivant une ligne d'inflexion, la variation de φ est égale à la torsion de la directrice (lieu des centres des sphères); pour un déplacement effectué suivant un parallèle, cette variation est égale à celle de l'angle au centre. M. Lecornu introduit une fonction α du paramètre λ qui, pour chaque parallèle, mesure la torsion totale correspondante de la directrice à partir d'une valeur initiale : la quantité $\varphi - \alpha$ est ce que l'auteur appelle *longitude* d'un point; la longitude est nulle ou égale à π pour les lignes d'inflexion; M. Lecornu étudie les lignes d'égale longitude. Signalons encore la démonstration de cette proposition : « Lorsqu'une surface est l'enveloppe des sphères osculatrices à une courbe, elle conserve cette propriété pendant le développement de sa directrice considérée comme arête d'une surface développable. »

Cornu (*A.*). — Sur les raies telluriques qu'on observe dans le spectre solaire au voisinage des raies D (175-212).

Brisse. — Exposition analytique de la théorie des surfaces. (213-233).

Ce travail est la Ve Section d'une exposition d'ensemble dont le but a été inséré dans les *Annales de l'École Normale supérieure* (2e série, t. III, p. 87). Il est relatif aux systèmes les plus simples de coordonnées sur une surface : lignes de courbure, lignes asymptotiques, lignes géodésiques avec leurs trajectoires orthogonales.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et CH. BRISSE [1]. — 3e série.

Tome II; 1883, 2e semestre.

Realis (*S.*). — Sur une équation indéterminée. (289-297).

Il s'agit de la résolution, en nombres entiers, de l'équation

$$x^3 + k = y^2,$$

qui a donné lieu à de nombreux travaux de MM. Catalan, Le Besgue, Gerono et de Jonquières. M. Realis l'étudie au point de vue de la résolution, et il établit d'intéressantes identités, d'où découlent, comme conséquences immédiates, plusieurs propriétés des nombres, très dignes de remarque.

Dewulf (*E.*). — Théorème de Cinématique. (297-300).

Propriété du déplacement d'une figure plane, ayant trait aux centres de courbure des trajectoires.

Kœnigs (*G.*). — Sur les cubiques gauches passant par cinq points donnés. (301-306).

Indication de plusieurs propriétés, concernant surtout les complexes formées par les tangentes; cet article tire son origine d'une question proposée par M. Genty.

Genocchi. — Démonstration d'un théorème de Fermat. (306-310).

Le système d'équations $2y^2 - 1 = x$, $2z^2 - 1 = x^2$ n'admet de solution en nombres entiers que pour $x = 7$. Le savant professeur de l'Université de Turin démontre simplement cette proposition, en complétant les travaux du P. Pepin sur le même sujet.

PROPOSITIONS DE M. LIONNET. — (310).

Cinq énoncés concernant les propriétés des nombres.

Levaire (*E.*). — Solution de la question de Géométrie analytique proposée au Concours d'admission à l'École Centrale; première session, 1882. (311-317).

Problème sur un système de coniques passant par des points déterminés.

BIBLIOGRAPHIE. — *P. Miquel:* Les organismes vivants de l'atmosphère; compte rendu par le Dr Harzé. (317-319).

---

[1] Voir *Bulletin*, VII_2, 249.

PUBLICATIONS RÉCENTES. — (319-322).

Moret-Blanc. — Solution de la question 1410. (322-323).

Contour polygonal inscrit dans une parabole.

Fauquembergue (*E.*). — Solution de la question 1413. (324).

Propriété d'une sécante commune à deux coniques homothétiques.

Lez. — Solution de la question 1418. (325-326).

Lieu géométrique relatif à l'ellipse.

De Strékalof (*V.*). — Solution de la question 1421. (326-329).

Propriété du triangle.

Romero. — Solution de la question 1422. (329-330).

Si $N^2 = a^2 + (a+1)^2$, N est égal à la somme des carrés de trois nombres entiers, dont deux au moins sont consécutifs.

Goffart (*N.*). — Solution de la question 1425. (331-332).

Propriété de la normale à la parabole.

Giat. — Solution de la question 1434. (332-333).

L'angle de deux hyperboles équilatères concentriques est double de l'angle de leurs asymptotes.

QUESTIONS PROPOSÉES. — 1451 à 1459. (333-336).

Antomari (*X.*). — Relations entre les distances du foyer d'une conique à quatre points ou à quatre tangentes. (337-347, 385-397).

Suite d'une étude dont nous avons analysé le commencement dans le compte rendu du premier semestre.

Ici, l'auteur étudie spécialement les foyers de l'hyperbole et de la parabole, les propriétés de quatre coniques circonscrites à un quadrilatère, les relations entre les distances d'un foyer à quatre tangentes et les propriétés de quatre coniques inscrites dans un quadrilatère.

Laquière. — Détermination et construction nouvelle du cercle qui coupe trois cercles sous trois angles donnés et de la sphère qui coupe quatre sphères sous des angles donnés. (348-352).

Complément et simplification d'un article précédemment publié dans le même Recueil. Théorème remarquable sur l'enveloppe des sphères coupant trois sphères fixes sous des angles constants.

Goffart. — Théorème de Géométrie. (353-354).

Lieu des points de contact des ellipses ayant même foyers avec les droites parallèles à une direction donnée.

Biehler (*Ch.*). — Sur la construction d'une courbe algébrique autour d'un de ses points. (354-368, 397-412).

Simplification d'une méthode précédemment publiée par l'auteur dans le même Recueil ([1]). On considère l'équation qui donne les coordonnées des points d'intersection de la courbe et d'une transversale passant par le point considéré.

Dans les présents articles, M. Biehler recherche, non plus les expressions des racines infiniment petites de cette équation, mais certaines fonctions symétriques desdites racines.

Le Mémoire se termine par une étude des asymptotes et des branches paraboliques.

Dostor (*G.*). — Distances du centre de gravité aux points remarquables du triangle. (368-370).

Cette Note donne l'expression des distances : aux sommets, au centre du cercle circonscrit; au point de concours des hauteurs; et enfin au centre des cercles inscrit et exinscrit.

Propositions de M. Realis. — (370-371).

Énoncés de cinq propriétés sur les racines entières d'équations du quatrième degré.

Correspondance. — *M. d'Ocagne :* A propos du centre de courbure de l'ellipse. (371-372).

Fauquembergue (*E.*).— Solution de la question 1281. (372-373).

Solution d'une équation exponentielle indéterminée.

Rebuffel. — Solution de la question 1420. (374-375).

Détermination de deux intégrales.

Goffart (*N.*). — Solution de la question 1421. (375-376).

Propriété d'une conique.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1424. (376-377).

Lieu géométrique relatif à l'ellipsoïde.

Chabanel (*Ch.*). — Solution de la question 1427. (378-380).

Détermination d'une intégrale.

Cesáro (*E.*). — Solution de la question 1428. (380-381).

Nombre des solutions entières des équations

$$x + 2y = n - 1, \quad 2x + 3y = n - 3, \quad 3x + 4y = n - 5, \quad \ldots.$$

([1]) Voir *Bulletin*, IV_2, 265; V_2, 134 et VI_2, 157.

QUESTIONS PROPOSÉES. — 1460 à 1468. (382-384).

Fauquembergue (*E.*). — Question d'Astronomie. (413-415).

Connaissant les durées des quatre saisons, trouver l'excentricité de l'orbite terrestre. La question est extraite de la *Nouvelle Correspondance mathématique*.

Barisien (*E.*). — Solution de la question proposée au Concours d'admission à l'École Centrale, 2e session, 1882. (415-420).

Problème sur un système de paraboles.

Cartier (*H.*). — Solution de la question proposée au Concours d'admission à l'École Polytechnique, 1881. (420-422).

Lieu géométrique relatif à l'hyperbole.

PUBLICATIONS RÉCENTES. — (422-424).

D'Ocagne (*M.*). — Solution de la question 1391. (425).

Propriété de l'enveloppe d'une droite de longueur constante.

Borletti (*F.*). — Solution de la question 1396. (426-427).

Intégration d'une équation différentielle.

Chabanel (*Ch.*). — Solution de la question 1417. (427-429).

Propriété de deux systèmes de résidus par rapport à un module premier.

L. B. — Solution de la question 1429 (429-430).

Démonstration de la formule

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^2 = 8\,\frac{9}{8}\,\frac{24}{25}\,\frac{49}{48}\,\frac{80}{81}\,\frac{121}{120}\cdots$$

Fauquembergue (*E.*). — Solution de la question 1459. (430-431).

L'équation indéterminée

$$y^3 = x^2 + (x+1)^2$$

n'admet comme solution que $y = 1$, $x = 0$.

QUESTIONS PROPOSÉES. — 1469 à 1472. (431-432).

Bourget (*J.*). — Note sur les permutations de n objets et sur leur classement. (433-450).

L'auteur a déjà traité le même sujet dans le même Recueil, en 1871, et dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* (1881). Il recherche ici la formule du rang occupé par un élément déterminé dans une permutation de rang donné.

A cet effet, il propose un nouveau mode de classification, qui consiste essentiellement dans le partage des permutations en groupes de permutations circulaires. Cela le conduit à des résultats nouveaux et fort intéressants.

D'Ocagne (*M.*). — Sur un élément du triangle rectiligne; symédiane. (450-464).

La *symédiane* est la symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice issue du même sommet. L'auteur établit plusieurs propriétés relatives à cet élément qu'il croit nouveau, mais qui a déjà été étudié, à plusieurs reprises, par M. E. Lemoine; puis il en fait application à des problèmes divers, notamment sur la parabole, la lemniscate, la spirale d'Archimède et les coniques. L'article se termine par les énoncés d'un certain nombre d'exercices. [*Voir* sur le même sujet une Note de l'auteur *Sur une ligne considérée dans le triangle rectiligne* (*Journ. de Math. élémentaires,* t. IV, p. 539; 1880)].

Moret-Blanc. — Solution de la question proposée au Concours d'admission à l'École spéciale militaire en 1882. (464-469).

Problème sur le cercle-calcul logarithmique.

Dostor (*G.*). — Les moments d'inertie polaires du triangle, par rapport à ses points remarquables. (469-471).

Moments par rapport au centre de gravité; aux sommets; au centre du cercle circonscrit; au point de concours des hauteurs; aux centres des cercles inscrit et exinscrit.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1399. (471-474).

Lieu géométrique relatif aux coniques.

Chabanel (*Ch.*). — Solutions de la question 1401 (474-475).

Proposition d'Arithmétique.

Fauquembergue (*E.*). — Solution de la question 1453. (476).

Le nombre $\frac{(\sqrt{2}+1)^{2n-1}+(\sqrt{2}-1)^{2n-1}}{2\sqrt{2}}$ est la somme de deux carrés entiers.

Chambon (*J.*). — Solution de la question 1463. (477-478).

Propriété de l'ellipse.

Raclot (*M.*). — Solution de la question 1466. (478-479).

Propriété du trapèze.

Questions proposées. — 1473 à 1480. (479-480).

Resal (*H.*). — Sur la théorie des tautochrones. (481-493).

Cet article, extrait du *Cours de Mécanique* de l'auteur, présente l'application et le développement d'une méthode d'Analyse due à M. Puiseux (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* t. IX, 1844). M. Resal considère, après un exposé d'ordre général, le cas de la pesanteur, celui d'une force centrale attrac-

tive ou répulsive, proportionnelle à la distance; il termine enfin en considérant un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse.

Realis (*S.*). — Résolution d'une équation indéterminée. (494-497).

L'équation dont il s'agit est

$$x^2 + nxy - ny^2 = 1.$$

D'Ocagne (*M.*). — Sur les propriétés segmentaires du triangle. Solution du problème général : « Mener par le sommet d'un triangle une droite qui divise le côté opposé en segments proportionnels aux puissances $n^{\text{ièmes}}$ des côtés adjacents ». (497-500).

Cet article se rattache à celui qui a été publié dans le même Recueil, p. 450 (*voir* ci-dessus).

Chambeau (*A.*). — Solution de la composition du Concours d'admission à l'École Centrale en 1881 ; seconde session. (500-504).

Sur les normales menées d'un point à une parabole.

Hilaire (*A.*). — Solution analytique de la composition du Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1882. (504-511).

Sur les coniques passant par les points d'intersection de deux circonférences et tangentes à ces circonférences.

Kien (*L.*). — Solution de la composition du Concours d'admission à l'École Normale en 1852. (511-515).

Roulement d'une tangente mobile sur une conique.

Correspondance. — *M. d'Ocagne :* A propos de la question 1463, concernant le centre de courbure de l'ellipse. (515).

Bibliographie. — Exercices de Géométrie comprenant l'exposé des méthodes géométriques et deux mille questions résolues, par F. I. C; compte rendu par M. H. Faure. (516-518).

Publications récentes. — (518-520).

Goffart (*N.*). — Solution de la question 1462. (521-522).

Sur le triangle isoscèle.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1465. (522-523).

Tangentes à une conique.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1468. (523-525).

Problème relatif aux aiguilles d'une montre.

Lemoine (*E.*). — Solution de la question 1472. (525-526).

Propriété du triangle.

Anonyme. — Solution de la question 1474. (527).

Propriété du triangle rectangle.

Questions proposées. — 1481 à 1483. (528).

Catalan (*E.*). — Sur quelques développements de $\sin nx \cos nx$. (529-535).

La grande simplification obtenue par M. Catalan consiste dans l'introduction de $2 \sin x$, $2 \cos x$ au lieu de $\sin x$, $\cos x$. Il expose la remarquable méthode de M. Yvon Villarceau avec de légères modifications; puis il y ajoute quelques applications et plusieurs remarques très intéressantes. (*Voir*, du même auteur, une Note dans la *Nouv. Corr. Math.*, t. VI, p. 100).

Realis (*S.*). — Résolution d'une équation indéterminée par formules directes. (535-542).

L'équation proposée est

$$(n+4)x^2 - ny = 4,$$

avec n entier > 0 ou < -4. M. Realis donne deux formules très curieuses, un peu analogues à celle du binôme, pour x_a et y_a; il donne ensuite les relations de récurrence, et présente, par de faciles transformations, de curieuses applications de ces résultats.

De Saint-Germain (*A.*). — Étude sur le mouvement d'un point pesant. (542-554).

L'auteur fait une analyse aussi attentive que possible, et très rigoureuse, de cette question : application naturelle de la théorie du mouvement relatif. Il discute un point qui a divisé jadis Bour et M. Resal, sur la forme de la trajectoire apparente. Il étudie enfin la question des déviations en assimilant la Terre à un ellipsoïde homogène, et donne, dans ce cas, les équations différentielles du mouvement.

Saltel (*L.*). — Nouveaux développements sur une méthode d'élimination. (554-566).

Suite du travail publié dans le même Recueil, t. XX, 2e série. La méthode employée permet d'éliminer successivement $k-1$ inconnues entre k équations par la résolution de l'équation $ax^n + b = 0$. Ici l'auteur ajoute à sa précédente étude un certain nombre de remarques et d'applications.

Bibliographie. — Cours de Mathématiques spéciales; Ire Partie, Algèbre, par M. *G. de Longchamps*. (566). A. L.

THE QUARTERLY JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS [1].

Tome XVII; 1881.

Hill (*J.-M.*). — Sur quelques propriétés des équations de l'Hydrodynamique. (1).

Soient u, v, w les composantes de la vitesse d'une particule de matière appartenant à un fluide incompressible, soumis à l'action de forces extérieures admettant un potentiel; soient x, y, z les coordonnées, à l'époque t, de la particule considérée; u, v, w pourront être regardées comme des fonctions de x, y, z, t. Ceci posé, soient P, Q, R trois intégrales indépendantes de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

il existera trois fonctions f_1, f_2, f_3 de P, Q, R, telles que

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz - (f_1\,d\mathrm{P} + f_2\,d\mathrm{Q} + f_3\,d\mathrm{R})$$

soit une différentielle exacte dK, les différentielles dP, dQ, dR, dK étant relatives à dx, dy, dz. Les équations des lignes de vortex seront de la forme

$$\mathrm{F}_1(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}) = \mathrm{C}_1,$$
$$\mathrm{F}_2(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}) = \mathrm{C}_2,$$

C_1, C_2 étant des constantes. Si par la limite d'une aire infiniment petite on mène des lignes obtenues par l'intersection de deux surfaces, telles que les premiers membres de leurs équations satisfassent à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

on formera un filament liquide contenant toujours les mêmes particules, fermé ou limité à la surface du fluide, tel qu'à chaque point corresponde un vecteur tangent au filament, et qui, multiplié par la section normale, donne un produit constant pendant le mouvement.

Cockle (*J.*). — Sur les relations entre certains symboles. (20-37).

L'auteur apprend à effectuer, sur les équations différentielles linéaires, certaines opérations symboliques, analogues à celles qui conduisent à la décomposition du premier membre d'une telle équation en facteurs symboliques : son travail fait suite à un Mémoire antérieur inséré dans le même Recueil, en 1877 : *On linear differential equations of the third order*.

---

(1) Voir *Bulletin*, VI_2, 48.

Forsyth. — Sur quelques intégrales (37-46).

Il s'agit des intégrales

$$\int_{-1}^{+1} P_i \mu^m \, d\mu, \quad \int_{-1}^{+1} P_i \cos m\theta \, d\mu,$$

$$\int_{-1}^{+1} P_i \nu^m \, d\mu, \quad \int_{-1}^{+1} P_i \sin m\theta \, d\mu,$$

P_i est le $i^{\text{ème}}$ polynôme de Legendre où $\mu = \cos\theta$ est la variable.

Prost. — Sur le potentiel et l'attraction sur un point extérieur d'une couche ellipsoïdale. (46-50).

Le calcul est fait d'après une indication de M. Cayley (*Proceedings of the London Mathematical Society*, t. VI, p. 58), en décomposant la couche en petits éléments obtenus au moyen de cônes ayant pour sommet commun le point où la normale à l'ellipsoïde homofocal à l'ellipsoïde qui limite extérieurement la couche, et passant par le point attiré, perce le plan polaire de ce dernier point; la méthode est une conséquence de la démonstration bien connue de Steiner relative à la direction de l'attraction.

Glaisher. — Un chapitre de la théorie des fonctions elliptiques. (50-65).

Allen. — Sur quelques problèmes relatifs à la conductibilité électrique. (65-86).

Le cas qui a été le plus étudié, soit théoriquement, soit expérimentalement, depuis les célèbres travaux de Kirchhoff, est celui d'une surface conductrice plane dont certains points sont mis en communication électrique avec une source au moyen de fils métalliques très fins.

L'auteur traite les problèmes analogues en remplaçant la surface plane par une surface sphérique.

Greenhill. — Sur le mouvement constant d'une toupie ou d'un solide de révolution dans un liquide indéfini. Démonstration élémentaire. (86-89).

Stearn. — Sur quelques cas du mouvement d'un liquide visqueux. (90-104).

L'auteur examine le cas où le mouvement se produit suivant des anneaux circulaires concentriques; il parvient ainsi à l'équation par laquelle Fourier a résolu le problème du mouvement de la chaleur dans un cylindre; M. Stearn examine diverses conditions initiales, par exemple le cas où le liquide est contenu dans un vase cylindrique fixe, en admettant, avec M. Stokes, que le fluide en contact est aussi au repos.

Jeffery. — Sur les courbes sphériques de troisième classe avec trois foyers. (104-129).

Discussion de ces courbes d'après la position des foyers.

Scott. — Note relative à un théorème de M. Glaisher sur les déterminants. (129-132).

La déterminant

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$$

est égal au produit

$$\Pi(a_1 + a_2\omega + \dots + a_n\omega^{n-1}),$$

où ω désigne une racine de l'équation

$$x^n - 1 = 0;$$

le déterminant qu'on déduit du précédent en changeant les signes de tous les termes situés en dessous de la diagonale est égal à un pareil produit, en faisant représenter à ω une racine de l'équation

$$x^n + 1 = 0.$$

La combinaison de ces deux propositions presque évidentes montre que le déterminant analogue à (1), où n est remplacé par $2n$, se décompose en un produit de deux déterminants de l'ordre n ; c'est le produit de ces deux déterminants qui figurait dans le théorème de M. Glaisher.

Sharp. — Sur l'équation de Fourier. (132-133).

Taylor. — Sur les propriétés de l'orthocycle, d'après Gaskin et Plücker. (134-137).

Démonstration géométrique simple de ces propriétés : le cercle circonscrit à un triangle conjugué par rapport à une conique est orthogonal à l'orthocycle de cette conique (lieu des sommes d'un angle droit circonscrit); les cercles décrits sur les diagonales d'un quadrilatère circonscrit à une conique et l'orthocycle de cette dernière ont même axe radical; les orthosphères des quadriques tangentes à huit plans ont même axe radical.

Cayley. — Sur ce théorème : « Le nombre de covariants d'un quantic binaire est fini. » (137-147).

La seule preuve connue de cette proposition a été déduite, par M. Gordan, de la règle de la formation des covariants par dérivation : c'est à un point de vue tout différent que se place M. Cayley : considérant un quantic d'ordre n mis sous la forme $(x-\alpha)(x-\beta), \dots$, la forme *monomiale* générale d'un covariant est

$$(\alpha-\beta)^m(\alpha-\gamma)^n(\beta-\gamma)^p\dots(x-\alpha)^q(x-\beta)^r\dots,$$

où la somme des exposants de tous les facteurs qui contiennent une racine α est constante. Par exemple, les covariants monomiaux de

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

sont

$$(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma),\quad (\beta-\gamma)(x-\alpha),\quad (\alpha-\gamma)(x-\beta),$$
$$(\alpha-\beta)(x-\gamma),\quad (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma).$$

Cela posé, deux théorèmes se présentent :

A. *Le nombre des covariants monomiaux irréductibles d'un quantic décomposé en facteurs linéaires est fini;*

C. *Le nombre des covariants, dans le sens ordinaire, d'un quantic mis sous la forme habituelle est fini.*

Ces deux propositions se trouvent reliées par le lemme suivant :

B. *Le système infini dont les termes* X *sont des fonctions rationnelles entières d'un nombre fini de lettres* $(a, b, c, \ldots)$ *qui restent inaltérées par les substitutions* G $(a, b, c, \ldots)$ *d'un certain groupe, renferme toujours un système fini de termes* P, *tels que tout terme* X *soit une fonction rationnelle entière des termes* P.

M. Cayley donne une démonstration du théorème A et montre comment le lemme B permettrait d'en déduire le théorème C; mais il n'est pas en possession d'une démonstration complète du lemme B, bien évident quand le groupe G est le groupe symétrique ou le groupe alterné des lettres $a, b, c, \ldots$.

Mannheim. — Construction de la normale à la surface de Glaisher. (147-149).

Cette surface est le lieu des milieux des cordes de longueur constante dont les extrémités se déplacent sur un ellipsoïde donné, chacune de ces cordes étant telle que les normales à l'ellipsoïde, tirées de ses extrémités, se rencontrent : en joignant le point de rencontre au milieu de la corde, on obtient la normale.

Roberts (*S.*). — Un théorème utile dans la théorie de l'attraction. (149-153).

Soit V_n le potentiel exprimé en coordonnées cartésiennes relatif à un point (x, y, z) attiré par une plaque située dans le plan des x, y, l'attraction étant en raison inverse de la $n^{\text{ième}}$ puissance de la distance; on a

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2}+\frac{n-2}{z}\frac{\partial V_n}{\partial z}=0.$$

Wargen. — Étude élémentaire du théorème de Legendre concernant l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur. (154-164).

Prost. — Sur le potentiel électrique de deux sphères conductrices chargées situées à une distance donnée. (164-168).

Hill. — Quelques propriétés des équations de l'Hydrodynamique. (168-174)

Mc Alister. — Sur la loi de la moyenne géométrique dans la théorie des erreurs. (175-194).

Greenhill. — Sur l'équation différentielle aux excentricités des couches dans la théorie de la figure de la Terre. (203-207).

Discussion de l'équation

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2}(M\varepsilon) - \left[i(i+1) + \frac{4\pi r^2}{M} \frac{d\rho}{dr} \right] M\varepsilon = 0,$$

où

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi\rho r^2,$$

ρ étant la densité pour la couche de rayon r, dans diverses hypothèses relatives à la loi suivant laquelle ρ varie avec r.

Cockle. — Addition aux relations entre certains symboles. (208-210).

Glaisher. — Démonstration algébrique des développements en somme de fractions pour la cotangente et la cosécante. (211-226).

Les formules sont obtenues en partant des expressions $\cot x$ et $\operatorname{cosec} x$, lorsqu'on remplace $\cos x$ et $\sin x$ par les produits infinis équivalents et en décomposant ces expressions en fractions simples.

Ferrers. — Sur le mouvement de l'eau contenue dans certains vases cylindriques et sur certaines expressions analytiques qui se rencontrent dans cette recherche. (227-244).

L'auteur détermine la fonction de courant pour un liquide contenu dans un vase cylindrique tournant uniformément autour d'un axe, en supposant que la base du cylindre est limitée par des arcs d'ellipse et d'hyperbole homofocales ou des arcs de paraboles confocales.

Cayley. — Sur la méthode de Schubert pour le contact d'une ligne et d'une surface. (244-258).

Analyse de la méthode suivie par M. Schubert dans son *Calcul der abzählenden Geometrie*, faite d'ailleurs à un point de vue différent de celui de M. Schubert; application de cette méthode.

Cayley. — Sur le théorème des deux, quatre, huit et seize carrés. (258-276).

On sait que le produit de la somme de deux carrés par la somme de deux carrés est une somme de deux carrés; le théorème a été étendu par Euler à la somme de quatre carrés, il s'étend aussi à une somme de huit carrés; mais, d'après M. Young (*Trans. R. I. A.*, t. XXI; 1848), l'identité d'Euler ne peut

pas s'étendre à une somme de seize carrés ; M. Roberts a repris la question dans le Volume précédent du *Quarterly Journal;* M. Cayley critique les démonstrations précédentes; l'identité d'Euler relative à la décomposition en trois carrés de l'expression

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2$$

repose en dernière analyse sur l'identité symbolique

$$12.34 - 13.24 + 14.23 = 0,$$

où $12 = x_1y_2 - x_2y_1, \ldots$. On a, pour l'étendre à une somme de huit carrés ou de seize carrés, à considérer des arrangements analogues de couples symboliques formés au moyen des huit ou des seize premiers nombres et à déterminer les signes dont on doit affecter ces couples pour parvenir à l'identité généralisée; or le problème ainsi posé conduit dans le cas de huit quantités à un seul mode de groupement, et, dans le cas de seize quantités, à quatre modes de groupement; d'après M. Cayley, un seul de ces groupements avait été considéré jusqu'ici et l'impossibilité de déterminer les signes n'avait été établie que pour ce cas; la preuve donnée serait donc incomplète; dans son Mémoire, il la poursuit avec détail pour les quatre groupements possibles.

Roberts. — Note additionnelle sur l'impossibilité d'une extension générale du théorème d'Euler. (276-280).

M. Roberts, mis en cause dans le précédent Mémoire, en conteste les assertions. D'après lui, les quatre groupements de M. Cayley peuvent être obtenus par le procédé qu'il a exposé dans son Mémoire antérieur (t. XVI, p. 159-170), en sorte que sa démonstration demeure entière.

Roberts. — Note sur un lieu dans l'espace. (280-283).

La normale au lieu décrit par un point quelconque d'une corde de longueur constante dont les extrémités restent sur un ellipsoïde et qui est perpendiculaire à sa polaire passe par le point d'intersection des normales à ses extrémités. Démonstration analytique.

Greenhill. — Solution au moyen des fonctions elliptiques de quelques problèmes sur la conductibilité électrique ou calorifique pour des surfaces planes. (284-292).

Cockle. — Sur une équation de Schwarz. (293-301).

Il s'agit d'un cas particulier de l'équation à laquelle satisfait la série hypergéométrique et dont les intégrales sont algébriques,

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{7}{6}x\right)\frac{dy}{dx} + \frac{1}{48}y = 0;$$

en désignant par C_1, C_2, C_3 trois constantes liées entre elles par la relation

$$C_3^4 + \alpha^2 C_1^4 + \alpha C_2^4 = 0,$$

où α est une racine cubique imaginaire de l'unité, la solution générale de cette

équation est donnée par la formule

$$y = \sqrt{C_1\left(1 - \alpha x^{\frac{1}{3}}\right)} + \sqrt{C_2\left(1 - \alpha^2 x^{\frac{1}{3}}\right)} + \sqrt{C_3\left(1 - x^{\frac{1}{3}}\right)}.$$

Ce résultat avait été indiqué par M. Cayley (t. XVI, p. 263).

Hirst. — Sur la transformation quadratique. (301-311).

Le Mémoire de M. Hirst, communiqué par l'auteur à l'Association britannique en 1865, contient des résultats qui ont été retrouvés indépendamment par M. Cantor (*Annali di Matematica,* t. X; voir *Bulletin,* 2e série, t. VI, 2e Partie, p. 103).

Ce résultat avait été indiqué par M. Cayley. (T. XVI, p. 263.)

Jeffery. — Sur l'inversion dualistique des coordonnées de Descartes et de Booth. (311-319).

Roberts. — Sur quelques formes de l'équation de la surface des ondes. (319-328).

L'auteur établit analytiquement diverses propositions démontrées par M. Mannheim; il étudie aussi le complexe des cordes d'un ellipsoïde vues du centre sous un angle droit.

Hicks. — Sur les images fonctionnelles dans les ellipses. (327-351).

Illustrations de la méthode de Sir W. Thomson.

Harley. — Note sur une équation différentielle. (352-353).

Glaisher. — Sur la connexion entre les fonctions elliptiques et la Trigonométrie sphérique.

Dans un triangle sphérique dont les angles sont A, B, C, les côtés a, b, c, on peut faire

$$\begin{aligned}
\sin a &= \operatorname{sn} u, & \cos a &= \operatorname{cn} u,\\
\sin b &= \operatorname{sn} v, & \cos b &= \operatorname{cn} v,\\
\sin c &= \operatorname{sn}(u+v); & \cos c &= \operatorname{cn}(u+v);\\
\sin A &= k \operatorname{sn} u, & \cos A &= \operatorname{dn} u,\\
\sin B &= k \operatorname{sn} v, & \cos B &= \operatorname{dn} v,\\
\sin C &= k \operatorname{sn}(u+v); & \cos C &= -\operatorname{dn}(u+v).
\end{aligned}$$

Partant de là, M. Glaisher calcule les éléments des triangles sphériques obtenus en menant par un sommet un grand cercle perpendiculaire au côté opposé et retrouve ainsi plusieurs formules de la théorie élémentaire des fonctions elliptiques.

Tome XVIII; 1882.

Jeffery. — Sur les courbes planes de quatrième classe à foyers quadruples. (1-40).

Harley. — Notes supplémentaires sur une équation différentielle. (41-46).

Les solutions d'une équation algébrique entre y et x satisfont à une équation différentielle linéaire.

Muir. — Sur un théorème du professeur Cayley relatif aux déterminants symétriques gauches bordés. (46-49).

Le théorème a été donné par M. Cayley dans le *Journal de Crelle* (t. LV, p. 277), il concerne le déterminant que l'on déduit d'un déterminant symétrique gauche d'ordre pair en conservant la loi de tous les éléments, sauf des éléments de la première ligne et de la première colonne; toutefois le premier élément est toujours 0; un pareil déterminant n'est plus un carré, mais le produit de deux *pfaffiens,* en entendant par *pfaffien* la racine carrée d'un déterminant symétrique gauche; M. Muir donne une élégante démonstration de ce théorème.

Taylor. — Sur les coniques circonscrites harmoniquement. (50-52).

Cayley. — Sur l'équation du sixième degré de Jacobi. (52-65).

Cette équation se ramène à la forme

$$(a, b, 0, d, 0, f, g)(z, 1)^6 = 0,$$

où

$$ag + 9bf - 20d^2 = 0;$$

sa résolution se ramène à la résolution d'une équation du cinquième degré. Son groupe est le sous-groupe des 60 substitutions positives qui fait partie du groupe de 120 substitutions (découvert par M. Serret) qui laissent invariable une fonction de six lettres. En effectuant sur l'équation la transformation de Tschirnhausen

$$X = -az^3 - 6bz^2 - 10d,$$

on obtient une équation du sixième degré en X qui n'est autre que la résolvante du sixième degré de l'équation du cinquième degré

$$(1, 0, c', 0, e', f')(x, 1)^5,$$

où

$$c' = 2d, \quad e' = -9bf + 36d^2, \quad f' = \sqrt{216h},$$

$$h = -a^2f^3 + b^3g^2 + 60b^2df^2 - 240bd^3f + 256d^5 = \frac{1}{5^2\sqrt{5}}\sqrt{-\Delta},$$

Δ étant le discriminant de l'équation de Jacobi.

Greenhill. — Réduction des intégrales elliptiques

$$\int \frac{dz}{(z^3-1)\sqrt{z^3-b^3}}, \quad \int \frac{z\,dz}{(z^3-1)\sqrt{z^3-b^3}}$$

aux fonctions de Jacobi. (66-72).

Ferrers. — Propriété de courbes du quatrième ordre à trois points doubles. (73-74).

Les tangentes aux six points d'inflexion touchent une conique.

Hudson. — Formules pour la théorie des équations. (74-89).

L'auteur donne, entre autres formules, l'expression du quotient par $(x-a)^m$ d'un polynôme en x de degré $n > m$, et l'expression générale d'une racine d'ordre de multiplicité m d'une équation entière de degré n, m étant un entier satisfaisant aux inégalités

$$n \geqq m \geqq \tfrac{1}{2}(n+1).$$

Prost. — Sur les vingt-sept droites, les quarante-cinq plans tangents triples, les trente-six double-six d'une surface du troisième degré; moyen de construire un modèle où sont figurées les droites supposées réelles. (89-96).

L'équation de la surface est supposée mise sous la forme

$$uvw + u'v'w' = 0,$$

$u, v, \ldots, w'$ étant des fonctions linéaires des coordonnées qui sont supposées satisfaire à des identités de la forme

$$au + bv + cw + a'u' + b'v' + c'w' = 0,$$
$$\alpha u + \beta v + \gamma w + \alpha' u' + \beta' v' + \gamma' w' = 0,$$

à coefficients $a, \ldots, \gamma$ numériques. L'auteur donne des nombres pour la construction du modèle.

Ferrers. — Sur la distribution de l'électricité sur une calotte. (97-109).

Muir. — Liste de travaux sur les déterminants. (110-149).

Genese. — Sur les coordonnées biangulaires. (150-154).

Cayley. — Un cas résoluble de l'équation du cinquième degré. (154-157).

Les cinq racines d'une équation du cinquième degré, où le second terme manque, peuvent être mises sous la forme

$$\alpha_1 B + \alpha_2 C + \alpha_3 D + \alpha_4 E,$$

les α étant des puissances convenables d'une racine cinquième imaginaire de l'unité; M. Cayley montre qu'en supposant nulle une des quantités B, C, D, E, ce qui revient à établir une relation entre les coefficients de l'équation proposée la résolution de celle-ci dépend de la résolution d'une équation du troisième degré.

Jeffery. — Sur les *stapetes-points* des courbes de quatrième classe à foyers singuliers. (158-186).

Muir. — Sur quelques propriétés récemment découvertes de certains déterminants symétriques. (166-177).

Il s'agit principalement dans ce travail des circulants, c'est-à-dire des déterminants de la forme

$$C(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix},$$

et d'autres déterminants dont toutes les ligness ont aussi des permutations d'un même système de lettres, en particulier de tels déterminants d'ordre 2^n, symétriques par rapport à leur centre et décomposables, d'après une proposition due à M. Puchta, en facteurs linéaires; nous noterons aussi les propositions suivantes: *Un pfafien symétrique gauche d'ordre impair est nul, un pfafien symétrique gauche d'ordre pair est une différence de deux carrés.*

Cox. — Coordonnées homogènes dans la Géométrie imaginaire: application aux systèmes de forces. (178-215).

Hudson. — Sur les racines égales des équations. (213-230).

Nouvelle expression d'une racine multiple d'ordre de multiplicité supérieure à la moitié du degré de l'équation. M. Cayley a ajouté une petite Note au travail de M. Hudson.

Greenhill. — Sur le mouvement régulier d'un solide de révolution roulant sur une surface de révolution sous l'influence de la gravité. (229-231).

Greenhill. — Sur les images fonctionnelles dans les ovales de Descartes. (231-245).

Application à ces courbes de la méthode employée par M. Hill pour l'ellipse.

Stuart. — Réduction des intégrales de la forme

$$\int \frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt{(z^n - c^n)}\sqrt{z^n - b^n}}.$$

(245-260).

Cette réduction repose sur la remarque suivante : Si $\varphi(x)$ est une solution de l'équation

$$\frac{dz}{f(z^n)} = dx,$$

cette solution jouit de la propriété

$$\omega\varphi(x) = \varphi(\omega x + C),$$

C étant une constante et ω une racine quelconque de l'équation

$$\omega^n - 1 = 0;$$

il suit de là que les facteurs de $z^n - c^n$ sont de la forme

$$\varphi(x) - \varphi(\omega\alpha + C),$$

en supposant que pour $z = c$ on ait $x = \alpha$; ensuite on a

$$\int \frac{z^{m-1}\,dz}{(z^n - c^n)\,f(z^n)} = \frac{1}{nc^{n-m}} \sum \int \frac{\omega^n\,dx}{z - \omega c} = \frac{1}{nc^{n-m}} \sum \frac{\omega^n\,dx}{\varphi(x) - \varphi(\omega\alpha + C)};$$

pour $n = 1, 2, 3, 4$,

$$f(z^n) = \sqrt{z^n - b^n},$$

la fonction φ se calcule aisément et le calcul s'achève sans peine.

Muir. — Sur les circulants d'ordre impair. (261-265).

Un tel déterminant est divisible par la somme des éléments d'une colonne; M. Muir montre comment on peut obtenir le quotient sous forme d'un déterminant persymétrique d'ordre moindre d'une unité que le circulant proposé.

Niven. — Sur une méthode pour résoudre approximativement les problèmes d'électrostatique. (266-270).

Effet d'une légère courbure sur la distribution de l'électricité sur les deux faces d'un accumulateur presque plan.

Jeffery. — Sur les courbes sphériques de quatrième classe à foyers quadruples. (270-310).

Tucker. — Sur le radial de l'ellipse. (310-312).

Forsyth. — Sur un théorème de Jacobi. (313-327).

Il s'agit de la fonction symétrique

$$\sum \frac{U}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}}$$

des mn solutions des deux équations

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0.$$

Jacobi a démontré que cette somme était nulle quand le degré du polynôme U ne dépassait pas $m + n - 3$; l'auteur évalue cette somme pour un degré non supérieur à $m + n - 1$; il y parvient en généralisant la méthode par laquelle Abel a prouvé le théorème analogue dans le cas d'une seule variable.

Hudson. — Sur les racines égales des équations; résultats additionnels. (327-338).

Sthinthal. — Sur la solution de l'équation

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0.$$

(327-345).

Les solutions de cette équation regardées comme fonctions de n sont discutées en partant d'une intégrale définie qui est un cas particulier de l'intégrale définie (d'Euler) bien connue qui satisfait à l'équation hypergéométrique.

Greenhill. — Images fonctionnelles dans les ovales de Descartes; détermination des images. (346-362).

Hart. — Sur le cercle qui coupe orthogonalement les quatre cercles tangents aux côtés d'un triangle. (363-365).

Équation de ce cercle en coordonnées aréolaires.

Johnson. — Sur la preuve, au moyen du triangle sphérique, du théorème sur l'addition des fonctions elliptiques. (365-370).

Glaisher. — Sur une intégrale définie renfermant l'intégrale exponentielle. (370-377).

Détermination des intégrales

$$\int_0^\infty e^{-ax^n} \mathrm{E}i(ax^n)\,dx, \quad \int_0^\infty e^{ax^n} \mathrm{E}i(ax^n)\,dx,$$

où n est une quantité réelle plus grande que 1 et où

$$\mathrm{E}i(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^u}{u}\,du;$$

ces intégrales sont respectivement égales à

$$-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{a^{\frac{1}{n}}}\,\frac{\frac{\pi}{n}}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}} \quad \text{et} \quad \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{a^{\frac{1}{n}}}\,\frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Thomson (J.). — Note sur $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos sx}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}(2p+1)}}\,dx$. (377-381).

On a

$$\int_0^\infty \frac{\cos sx}{(a^2+x^2)^{p+\frac{1}{2}}}\,\frac{dx}{p+\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{2\pi}\,\frac{s^p}{a^p}\,\frac{1}{1.3\ldots 2p-1}\,\frac{e^{-as}}{(as)^{\frac{1}{2}}}\left[1+\frac{p^2-\frac{1}{2^2}}{2as}+\frac{\left(p^2-\frac{1}{2^2}\right)\left(p^2-\frac{3^2}{2^2}\right)}{(2as)^2}+\cdots\right].$$

Hart. — Sur la développée de la bicirculaire quartique symétrique. (382-384).

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE [1].

Tome XII; 1883. 2e série.

Appell (*P.*). — Sur une classe d'équations différentielles linéaires binômes à coefficients algébriques. (9-46).

Le Mémoire de M. Appell a pour objet l'étude des équations différentielles linéaires de la forme

$$\frac{d^k z}{dx^k} = \psi(x, y) z,$$

où $\psi(x, y)$ est une fonction rationnelle des deux variables x et y, liées par une relation algébrique. L'auteur indique le moyen de reconnaître si une pareille équation admet une intégrale de la forme

$$z = e^{\int \varphi(x, y)\, dx},$$

$\varphi(x, y)$ étant une fonction rationnelle de x et y, et de trouver cette intégrale si elle existe. Il examine plus particulièrement l'équation du second ordre

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \psi(x, y) z,$$

à laquelle se ramène toute équation différentielle du second ordre à coefficients rationnels en x et y.

M. Appell commence par traiter le cas simple où les fonctions ψ et φ ne dépendent que de la variable x. Par un changement de variables il ramène l'équation à une autre de la même forme $\frac{d^2 z}{dt^2} = z f(t)$, dans laquelle le point ∞ est un pôle ou un point ordinaire de l'intégrale. Il est ramené du même coup à chercher les intégrales de la forme $z = e^{\int \varpi(t)\, dt}$, où la fonction rationnelle $\varpi(t)$ s'annule pour $t = \infty$. Voici les conclusions auxquelles il est conduit. Pour qu'il existe de pareilles intégrales, les infinis de $f(t)$ doivent être d'ordre pair, excepté certains d'entre eux qui peuvent être du premier ordre. Les pôles d'ordre pair, au nombre de n, sont pôles d'ordre moitié moindre de la fonction inconnue $\varpi(t)$; ils donnent lieu à des fractions simples dont les numérateurs sont fournis par des équations qui admettent deux systèmes de solutions. Les pôles simples de $f(t)$, au nombre de n', sont aussi pôles simples de $\varpi(t)$; les résidus correspondants sont toujours égaux à l'unité. Enfin $\varpi(t)$ peut devenir infini du premier ordre en n'' points, autres que les infinis de $f(t)$; ces infinis ont tous pour résidu 1. Si l'on appelle A_1 l'un des résidus correspondant aux n pôles dont nous avons parlé en premier lieu, la

[1] Voir *Bulletin*, V_2, 25.

somme $\Sigma A_1 + n'$ doit être égale à $-n''$ ou à $1 - n''$; il faut donc que cette somme compte, parmi les 2^n déterminations dont elle est susceptible, des valeurs entières négatives ou nulles. Si cette condition est réalisée, on formera les fonctions $\varpi(t)$ correspondantes, contenant n'' fractions simples dont les infinis sont encore indéterminés, et l'on essayera chacune de ces fonctions $\varpi(t)$ pour vérifier l'équation $\varpi^2 + \frac{d\varpi}{dt} = f(t)$.

Cette analyse détaillée nous dispense d'insister sur le cas plus général de l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = z\,\psi(x, y),$$

où les variables x et y sont liées par une relation algébrique $F(x, y) = 0$ de degré m et de genre p. Tous les points critiques sont supposés du second ordre : on sait que l'on peut, par une substitution rationnelle, ramener le cas général à ce cas particulier. On trouvera, dans le Mémoire de M. Appell, les résultats d'un calcul analogue à celui du cas précédent, mais nécessairement plus compliqué. La démonstration repose sur l'expression analytique d'une fonction rationnelle de deux variables x et y, dont on connaît les infinis et la valeur en un point, expression que M. Lindemann a déduite de la formule de Roch.

Dans ce qui précède, le genre de la courbe F est supposé plus grand que zéro. Lorsque la courbe est unicursale, on ramène l'équation différentielle à la forme précédemment étudiée $\frac{d^2 z}{dt^2} = z\,f(t)$, en remplaçant x et y par leurs valeurs en fonction rationnelle d'un paramètre. Lorsque le genre est égal à 1, on peut la ramener à une équation différentielle du second ordre à coefficients uniformes doublement périodiques. La méthode de M. Appell conduit dans ce cas à l'intégration d'une classe nouvelle d'équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients doublement périodiques, qui donnent comme cas particulier celles de M. Fuchs (*Journal de Liouville*, 1878), et les équations du second ordre comprises dans la classe étudiée par M. Picard.

L'auteur passe ensuite à l'équation d'ordre quelconque

$$\frac{d^k z}{dx^k} = \psi(x, y)\,z.$$

Après avoir indiqué sommairement la marche à suivre dans le cas général, il applique sa méthode, avec tous les développements qu'elle comporte, à l'équation du troisième ordre $\frac{d^3 y}{dx^3} = y\,\psi(x)$.

Le Mémoire se termine par une remarque générale sur les équations différentielles à coefficients algébriques

$$\Psi(x, y) = \frac{d^n z}{dx^n} + \varphi_1(x, y)\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \varphi_2(x, y)\frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} + \ldots + \varphi_n(x, y)\,z = 0,$$

où les coefficients $\varphi_i(x, y)$ sont des fonctions rationnelles des variables x et y liées par une relation algébrique $F(x, y) = 0$, de degré m et de genre p.

Si p est égal à 1, x et y sont des fonctions elliptiques d'un paramètre θ, et l'on transforme l'équation différentielle en une autre, dont les coefficients sont des fonctions uniformes doublement périodiques de θ. M. Appell montre comment ce résultat peut être étendu au cas où p est plus grand que l'unité. Le

principe de la transformation qu'il effectue consiste à remplacer l'équation différentielle unique $\Psi = 0$ par un système de p équations simultanées définissant z comme fonction des p variables $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_p, y_p)$ liées par les p relations

$$F(x_1, y_1) = 0, \quad F(x_2, y_2) = 0, \quad \ldots, \quad F(x_p, y_p) = 0,$$

puis à prendre comme nouvelles variables indépendantes les intégrales abéliennes $u_1, u_2, \ldots, u_p$ dont sont fonctions les p points analytiques (x_i, y_i), $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

Floquet (*G.*). — Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. (47-88).

Le Mémoire de M. Floquet a pour objet l'intégration des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients uniformes et périodiques, de même période ω. Les idées dont s'inspire l'auteur sont empruntées au célèbre Mémoire de M. Fuchs; la méthode est identique à celle qu'a suivie le géomètre allemand dans l'étude des intégrales autour d'un point singulier.

Soient $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ m solutions distinctes de l'équation considérée

$$P(y) = \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y = 0,$$

dont l'intégrale générale est supposée uniforme. A cause de la périodicité des coefficients, on obtient un nouveau système évidemment fondamental en changeant dans les fonctions susdites x en $x + \omega$. On peut donc poser

$$\begin{aligned}
f_1(x+\omega) &= A_{11} f_1(x) + A_{12} f_2(x) + \ldots + A_{1m} f_m(x),\\
f_2(x+\omega) &= A_{21} f_1(x) + A_{22} f_2(x) + \ldots + A_{2m} f_m(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f_m(x+\omega) &= A_{m1} f_1(x) + A_{m2} f_2(x) + \ldots + A_{mm} f_m(x),
\end{aligned}$$

le déterminant des m^2 quantités A étant différent de zéro. Les coefficients A définis par ces relations figurent dans une équation de degré m par rapport à l'inconnue ε :

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} - \varepsilon & A_{12} & \ldots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} - \varepsilon & \ldots & A_{2m} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mm} - \varepsilon \end{vmatrix} = 0,$$

que, par analogie avec l'équation fondamentale de M. Fuchs, M. Floquet a nommée l'*équation fondamentale relative à la période* ω. Les racines de cette équation sont indépendantes du choix du système fondamental.

Afin de simplifier les énoncés, l'auteur reprend la dénomination de *fonctions périodiques de seconde espèce,* pour désigner des fonctions qui se reproduisent multipliées par un facteur constant, lorsqu'on augmente la variable d'une certaine quantité.

Il s'agit de reconnaître si l'équation $P = 0$ admet pour intégrales des fonctions périodiques de seconde espèce et de période ω, et de déterminer dans ce cas les multiplicateurs ε correspondant à ces fonctions. Voici les conclusions de la première Partie du Mémoire.

Le multiplicateur ε doit être racine de l'équation fondamentale. Lorsque cette équation n'a que des racines simples, $P = 0$ admet comme intégrales distinctes m fonctions périodiques de seconde espèce et de période ω. Lorsque l'équation fondamentale a des racines multiples, n étant le nombre des racines distinctes, $P = 0$ admet comme intégrales indépendantes au moins n fonctions périodiques de seconde espèce, ayant pour multiplicateurs ces racines. Ces intégrales concourent à former un système fondamental, que M. Floquet nous apprend à compléter : les autres éléments de ce système ne sont plus des fonctions périodiques; mais chacun d'eux affecte la forme d'un polynôme en x, ayant pour coefficients des fonctions périodiques de seconde espèce de même multiplicateur; les multiplicateurs sont les racines de l'équation fondamentale. Chaque racine distincte donne ainsi naissance à un groupe comprenant autant d'intégrales qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité.

Dans la dernière partie de son travail, l'auteur s'attache à préciser le nombre des intégrales périodiques de seconde espèce : il utilise le procédé qui a servi à M. Hamburger pour compléter l'étude de M. Fuchs, relativement aux intégrales des équations linéaires homogènes, à coefficients uniformes, autour d'un point singulier. L'application de ce procédé, qui permet à M. Floquet de distinguer les groupes d'intégrales dont nous venons de parler en sous-groupes indépendants les uns des autres, le conduit à des résultats très nets que nous allons faire connaître. Le nombre exact des fonctions périodiques de seconde espèce, linéairement indépendantes, qui satisfont à l'équation $P = 0$, est égal à la somme des ordres des premiers déterminants mineurs de Δ qui ne s'annulent pas, lorsqu'on y remplace ε, successivement par chaque racine de l'équation fondamentale. La condition nécessaire et suffisante pour que $P = 0$ admette comme intégrales distinctes m fonctions périodiques de seconde espèce est que chaque racine de l'équation fondamentale annule tous les mineurs de Δ, jusqu'à l'ordre égal au degré de multiplicité de cette racine exclusivement.

Dans le type $P = 0$ rentrent les équations linéaires à coefficients constants, dont la méthode de M. Floquet permet de retrouver les intégrales bien connues, l'équation de Lamé, et les équations à coefficients doublement périodiques récemment étudiées par M. Picard.

Méray. — Solution du problème général de l'Analyse indéterminée du premier degré. (89-104).

Les problèmes les plus simples de l'analyse indéterminée du premier degré sont résolus depuis longtemps : M. Méray est le premier qui ait traité le cas général.

Il s'agit de trouver toutes les solutions en nombres entiers d'un système de m équations du premier degré à n inconnues et à coefficients entiers. On doit supposer le système algébriquement indéterminé; car, s'il était indéterminé, l'application des formules de Cramer révélerait immédiatement sa possibilité ou son impossibilité arithmétique.

Considérant un système de m formes linéaires à n indéterminées ($n \geq m$), l'auteur appelle *déterminant* de ce système par rapport à m de ces indéterminées le déterminant des m^2 coefficients qui leur correspondent. Cela posé, voici la condition nécessaire et suffisante pour que m équations linéaires à coefficients entiers admettent des solutions entières. Les déterminants des formes linéaires, auxquelles les premiers membres de ces équations se réduisent par la suppression des termes connus, doivent admettre pour plus grand

commun diviseur un nombre d, divisant tous les déterminants d'ordre m, obtenus en remplaçant dans les premiers une colonne quelconque par la suite des termes connus.

Reste à trouver les solutions entières, une fois leur existence reconnue; elles sont comprises dans des formules générales, pour lesquelles nous renvoyons au Mémoire de M. Méray.

Raffy (*L.*). — Recherches algébriques sur les intégrales abéliennes. (105-190).

Ce travail a été analysé dans une autre Partie du Bulletin.

André (*D.*). — Troisième Mémoire sur la sommation des séries. (191-198).

Ce travail contient la suite des recherches de M. André sur la sommation de toutes les séries convergentes dont le terme général affecte une forme donnée. Il concerne celles pour lesquelles ce terme U_n est de la forme

$$U_n = \frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}{1.2.3\ldots n} u_n x^n,$$

n étant un entier quelconque non négatif, p un nombre quelconque positif ou négatif, mais non pas entier; u_n représente le terme général d'une série récurrente proprement dite quelconque.

L'auteur montre que toutes ces séries peuvent se sommer à l'aide de fonctions algébriques rationnelles et d'irrationnelles de la forme $(1-ax)^p$.

Il commence par donner à l'expression de u_n une forme nouvelle appropriée à son objet et qui s'obtient en partant d'une identité due à J.-F.-W. Herschel. Grâce à cette transformation, il arrive à l'expression suivante de la somme cherchée :

$$S = \sum \sum_{h=0}^{h=\alpha-1} Q_{a,h} a^h x^h (1-ax)^{-p-h}.$$

Dans cette formule, la première sommation s'étend à toutes les racines a, b, ... d'ordre de multiplicité α, β, ... de l'équation génératrice de la série récurrente proprement dite dont u_n est le terme général; $Q_{a,h}$ est un polynôme dont M. André a donné la formation. Ainsi le problème se trouve résolu de la manière annoncée.

L'auteur montre ensuite que beaucoup de séries différentes de celles qu'il vient d'étudier peuvent ou s'y ramener ou s'en déduire. Le Mémoire se termine par une application à la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)(\frac{1}{3}+2)\ldots(\frac{1}{3}+n-1)}{1.2.3\ldots n} n^3 x^n,$$

dont la somme est

$$S = \frac{x(9+18x+x^2)}{27(1-x^3)\sqrt[3]{1-x}}.$$

Brunel (*G.*). — Étude sur les relations algébriques entre les fonctions hyperelliptiques de genre 3. (199-260).

Ce travail a été analysé dans une autre partie du *Bulletin*.

Goursat. — Mémoire sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur. (261-286).

Le Mémoire de M. Goursat a pour objet les séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et positives d'une variable, dans lesquelles le rapport de deux coefficients consécutifs est une fonction rationnelle du rang de l'un d'eux. Il commence par la démonstration d'un théorème général sur les intégrales régulières de l'équation différentielle linéaire à coefficients uniformes. Pour qu'une équation linéaire admette une intégrale holomorphe dans le domaine du point singulier $x = a$, et que cette intégrale ainsi que ses $p - 1$ premières dérivées puissent être prises arbitrairement pour $x = a$, il faut que cette équation soit de la forme

$$(x-a)^{m-p}\frac{d^m y}{dx^m} = Q_1(x)(x-a)^{m-p-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots$$
$$+ (x-a)Q_{m-p-1}(x)\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} + Q_{m-p}(x)\frac{d^p y}{dx^p} + \ldots + Q_m(x)y.$$

Réciproquement, toute équation de cette forme admettra une intégrale holomorphe dans le domaine du point a, et les valeurs de cette intégrale, ainsi que de ses $p - 1$ premières dérivées pourront être prises arbitrairement pour $x = a$, si l'équation

$$\varphi(s) = (r-p)\ldots(r-m+1)$$
$$- Q_1(a)(r-p)\ldots(r-m+2) - \ldots - Q_{m-p}(a) = 0$$

n'a aucune racine entière supérieure à $p - 1$. Si dans le théorème de M. Goursat on fait successivement $p = m$ et $p = 1$, on trouve les deux propositions sur lesquelles M. Fuchs a fondé la théorie des équations différentielles linéaires. Ce théorème donne en outre un moyen de reconnaître dans quels cas tous les logarithmiques disparaissent des intégrales, bien que l'équation déterminante relative à un point critique admette un groupe de racines telles que les différences de deux d'entre elles soient des nombres entiers.

Dans la seconde partie de son travail, l'auteur prouve que, étant données $2n - 1$ quantités constantes $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$, telles qu'aucune des quantités b_i, $b_i - b_h$, $a_i - a_h$, $\sum_{i=1}^{n-1} b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i$ ne soit un nombre entier, il existe une fonction multiforme de la variable x, jouissant des propriétés suivantes. Entre $n + 1$ déterminations de la fonction il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants. Chaque branche de la fonction est holomorphe pour toute valeur de x différente de $0, 1, \infty$. Dans le voisinage du point $x = 0$, on a les n déterminations linéairement indépendantes

$$P_1(x),\ x^{1-b_1}P_2(x),\ \ldots,\ x^{1-b_{n-1}}P_n(x),$$

$P_1, P_2, \ldots, P_n$ étant holomorphes pour $x = 0$. Dans le domaine du point $x = 1$,

2ud Part

on a les n déterminations linéairement indépendantes

$$Q_1(x),\ Q_2(x),\ \ldots,\ Q_{n-1}(x),\ (1-x)^{b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}-a_1-a_2-\ldots-a_n}Q_n(x),$$

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ étant holomorphes dans le domaine de ce point. Enfin, pour $x = \frac{1}{x'} = \infty$, on a les n déterminations linéairement indépendantes

$$x'^{a_1}R_1(x'),\ x'^{a_2}R_2(x'),\ \ldots,\ x'^{a_n}R(x'),$$

$R_1, R_2, \ldots, R_n$ désignant des fonctions holomorphes dans le voisinage du point critique $x' = 0$. Cette proposition revient à dire que toute fonction jouissant des propriétés énoncées satisfait à une équation différentielle qui est complètement déterminée, savoir

$$x^{n-1}(x-1)\frac{d^n y}{dx^n} + (Ax - B)x^{n-2}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + (Cx - D)x^{n-3}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots$$
$$+ (Hx - K)x\frac{d^2y}{dx^2} + (Lx - M)\frac{dy}{dx} + Ny = 0,$$

A, B, C, D, ..., L, M, N étant $m-1$ constantes, dont les valeurs sont toujours données effectivement par un système d'équations du premier degré. Ces constantes étant en même nombre que les paramètres a et b, l'équation précédente est la plus générale de son espèce. Mais, pour qu'une équation de cette forme admette un système d'intégrales jouissant des propriétés énoncées, il faut que ses coefficients vérifient les conditions d'inégalité imposées précédemment aux paramètres a et b.

M. Goursat signale ensuite les analogies de l'équation qu'il vient d'obtenir avec l'équation différentielle d'Euler que vérifie la série hypergéométrique. Ces analogies résident dans la forme de la nouvelle équation qui, pour $n = 2$, se réduit à l'équation d'Euler, et dans la forme de ses intégrales qui sont les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur. Dans la série entière qui représente aux environs de l'origine l'intégrale holomorphe, le rapport du terme en x^{m+1} au terme en x^m est, comme dans la série de Gauss, une fraction rationnelle dont les deux termes sont du même degré en m. De plus, par les transformations bien connues qu'admet l'équation d'Euler, on déduit ici encore l'intégrale générale de la connaissance d'une seule intégrale particulière. Enfin les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur satisfont à des relations analogues à celles que Gauss et Kummer ont données pour la série hypergéométrique ordinaire, et elles peuvent s'exprimer par des intégrales définies multiples.

Comme application de ce qui précède, on retrouve les résultats obtenus par Clausen (*Journal de Crelle*, t. 3) relativement à la série hypergéométrique. Le Mémoire de M. Goursat se termine par quelques indications sur une classe de fonctions qui se rattachent aux fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur de la même manière que la fonction exponentielle à la série du binôme, et les transcendantes de Bessel et de Fourier aux fonctions de Gauss.

André (*D.*). — Sur les séries ordonnées suivant les puissances croissantes d'une variable. (287-300).

Connaissant la somme $f(x)$ de la série

$$u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \ldots,$$

il s'agit d'en déduire la somme $G(x)$ de la série

$$u_0 v_0 x + u_1 v_1 x + u_2 v_2 x^2 + u_3 v_3 x^3 + \ldots,$$

obtenue en multipliant les termes successifs de la première par les termes de même rang d'une série récurrente proprement dite. M. André avait déjà résolu ce problème dans trois cas particuliers par des moyens plus ou moins compliqués. Un procédé plus simple et plus puissant à la fois lui permet aujourd'hui de le résoudre dans sa pleine généralité.

Si l'on désigne par r l'une quelconque des racines de l'équation génératrice de la série réccurente, par ρ son degré de multiplicité, $G(x)$ sera la somme de plusieurs séries $G_r(x)$, en nombre égal à celui des racines distinctes, et définies par la formule générale

$$G_r(x) = Q_{r,0} f(rx) + Q_{r,1} rx f'(rx) + \ldots + Q_{r,\rho-1} r^{\rho-1} x^{\rho-1} f^{(\rho-1)}(rx).$$

Les coefficients Q_r se déterminent de la manière suivante : le terme général v_n de la série récurrrente est un polynôme entièrement connu, du degré $\rho - 1$ par rapport à n. En appliquant une remarquable formule du calcul des différences finies, qui est due à J.-F.-W. Herschel, on peut mettre ce polynôme sous la forme

$$v_n = Q_{r,0} + Q_{r,1} n + Q_{r,2} n(n-1) + \ldots + Q_{r,\rho-1} n(n-1)(n-2)\ldots(n-\rho+2).$$

Ce développement fait connaître les coefficients Q_r.

Cette ingénieuse solution ramène l'étude générale des séries ordonnées suivant les puissances croissantes d'une variable à celle d'un nombre relativement restreint de séries particulières.

Guichard (*C.*). — Théorie des points singuliers essentiels. (300-394).

Ce travail a été analysé dans une autre Partie du *Bulletin*.

Goursat. — Mémoire sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur; 2e Partie. (395-430).

Ce travail fait suite au Mémoire que l'auteur a publié sous le même titre dans le même Volume des *Annales* (p. 261-286) et contient la généralisation de ses premières recherches. Il débute par quelques principes relatifs à la théorie des équations linéaires. Après avoir défini les équations différentielles linéaires *ramifiées de la même manière*, M. Goursat démontre que, si deux équations sont ramifiées de la même manière, l'intégrale de la seconde est

$$z = P_0 y + P_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + P_{m-1} \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}},$$

y désignant l'intégrale générale de la première et $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}$ des fonctions uniformes de la variable. A cet énoncé, il ajoute quelques remarques sur les systèmes fondamentaux de deux équations ramifiées de la même manière (ou *de même classe*), et il fait connaître le moyen de décider si deux équations données sont ou non de même classe. Si ces deux équations ont leurs coefficients rationnels et toutes leurs intégrales régulières, la réponse à cette ques-

tion dépend d'opérations en nombre limité, compliquées sans doute, mais qui reviennent dans tous les cas à des calculs algébriques.

Deux équations linéaires à coefficients uniformes et de même ordre sont dites *transformées* l'une de l'autre si le quotient de leurs intégales générales est une fonction de la seule variable indépendante. On reconnaît facilement si deux équations linéaires sont transformées l'une de l'autre. Les équations de même classe et les équations transformées rentrent dans la catégorie plus générale des équations de même *famille*, établie par M. Poincaré.

Ces principes posés, l'auteur définit les nouvelles fonctions hypergéométriques dont il va s'occuper. Ce sont des fonctions multiformes de la variable x jouissant des propriétés suivantes. Entre $n+1$ branches de la fonction il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants. Chaque branche de la fonction est uniforme pour toute valeur de x différente de $0, 1, \infty$; dans le voisinage du point $x = 0$, on a les n déterminations linéairement indépendantes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, dont la première est uniforme pour $x = 0$ et dont les autres sont multipliées respectivement par les $n-1$ facteurs constants différents $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n$, lorsque x décrit un lacet dans le sens direct autour du point $x = 0$. Dans le voisinage du point $x = 1$, on a les n branches linéairement indépendantes $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ dont la première ψ_1 est multipliée par le facteur constant ω_1, lorsque x décrit un lacet dans le sens direct autour du point $x = 1$, et dont les $n-1$ autres sont uniformes dans le voisinage de ce point. Enfin, dans le domaine du point $x = \frac{1}{x'} = \infty$, on a n déterminations linéairement indépendantes $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, qui sont respectivement multipliées par n facteurs constants différents $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n$, lorsque la variable x décrit sur la sphère un petit lacet dans le sens inverse autour du point $x' = 0$. De cette définition résulte que toutes les fonctions de cette nature admettant les mêmes multiplicateurs ω et ω' sont, en général, ramifiées de la même manière. Ces nouvelles fonctions comprennent, comme cas particulier, les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur que M. Goursat a définies dans son premier Mémoire. On peut généraliser la propriété de ces fonctions hypergéométriques. Soit, comme plus haut, z une fonction multiforme de x jouissant des propriétés déjà énoncées. Dans le voisinage des points critiques, on a n branches qui ont respectivement les formes suivantes :

$$\begin{array}{llllll}
\text{Pour } x = 0, & \varphi_1(x), & x^{r_1}\varphi_2(x), & \ldots, & & x^{r_{n-1}}\varphi_n(x), \\
\text{Pour } x = 1, & \psi_1(x), & \psi_2(x), & \ldots, & \psi_{n-1}(x) & (1-x)^{R}\psi_n(x), \\
\text{Pour } x = \frac{1}{x'} = \infty, & x'^{r'_1}\pi'_1(x'), & x'^{r'_2}\pi(x'), & \ldots, & & x'^{r'_n}\pi_n(x'),
\end{array}$$

les fonctions, φ_i, ψ_i, π_i étant holomorphes dans le domaine du point correspondant. Supposons, de plus, qu'aucun des nombres R, $r_i - r_h$, $r'_i - r'_h$ ne soit entier. L'équation hypergéométrique correspond au cas où les nombres R, r, r' vérifient la relation

$$\Sigma r + \Sigma r' + R = n - 1.$$

M. Goursat démontre que l'intégrale générale d'une pareille équation s'exprime toujours au moyen de séries hypergéométriques d'ordre supérieur.

Il applique ensuite ces résultats aux séries hypergéométriques de Gauss dont le carré est une série hypergéométrique d'ordre supérieur et arrive à ce théorème : « Pour que le carré d'une série hypergéométrique ordinaire $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$

soit une série hypergéométrique d'ordre supérieur, il faut et il suffit que $2(\gamma - \alpha - \beta)$ soit un nombre entier positif impair ».

Le problème qui vient d'être traité n'est qu'un cas particulier de celui-ci : « Dans quels cas le produit de deux séries hypergéométriques de Gauss est-il une série hypergéométrique d'ordre supérieur ». M. Goursat aborde cette question générale et en donne la solution complète : le produit

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) \times F(\alpha', \beta', \gamma', x)$$

est une série hypergéométrique d'ordre supérieur dans les deux cas suivants et dans ces cas seulement :

1° Lorsque l'on a les relations

$$\alpha' = \alpha + 1 - \gamma, \quad \beta' = \beta + 1 - \gamma, \quad \gamma' = 2 - \gamma, \quad \gamma - \alpha - \beta = \frac{2n+1}{2},$$

n étant nul ou égal à un nombre entier positif;

2° Lorsque les différences $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$, $\gamma' - \gamma$ sont des nombres entiers et lorsque l'on a

$$\gamma + \gamma' - \alpha - \alpha' - \beta - \beta' = n,$$

n étant nul ou égal à un nombre entier positif.

Pour terminer, l'auteur signale une nouvelle généralisation qu'on peut donner au théorème de Riemann : étant données deux équations linéaires d'ordre m ayant un même point singulier $x = a$, on dira que les équations *sont de même forme* dans le voisinage de ce point lorsqu'on pourra trouver deux systèmes fondamentaux d'intégrales des deux équations appartenant aux mêmes exposants et se comportant de la même manière dans le domaine de ce point. Deux équations ayant les mêmes points critiques et la même forme dans le voisinage de chacun de ces points, ainsi que pour le point $x = \infty$, auront un certain nombre de coefficients identiques, et, en général, elles auront en outre un certain nombre de coefficients tout à fait arbitraires. Ces derniers ne pourront intervenir que dans les relations linéaires entre les divers groupes d'intégrales. M. Goursat montre que ces relations ne peuvent être les mêmes pour les deux équations à moins que ces équations se confondent.

ANNALES DES MINES (1).

8e série. — Tome II; 2e semestre 1882.

Olry. — Note sur une soupape de sûreté imaginée par M. Codron, de Lille. (107-114, 1 pl.).

Dans la pratique, les soupapes des divers types employés jusqu'ici ne se soulèvent guère que de 1mm; mais, aussitôt que la vapeur a trouvé une issue, la pression décroît rapidement, la charge de la soupape redevient prédominante,

(1) Voir *Bulletin*, I_2, 317; II_2, 105; IV_2, 204, et VII_2, 83.

et, pour obtenir une sensibilité suffisante, il faudrait donner à la soupape un diamètre énorme et généralement irréalisable.

Le nouveau règlement sur les appareils à vapeur spécifie que, pour être complètement efficaces, les soupapes doivent être manœuvrées artificiellement.

Dans le type de soupape imaginé par M. Adams, de Manchester, la levée est augmentée par l'action de la vapeur qui, en s'échappant, vient frapper contre un rebord disposé autour de l'obturateur.

Le système présenté par M. Codron paraît plus satisfaisant encore; il donne une solution tout à fait complète du problème, en permettant d'obtenir des levées aussi grandes qu'on le juge utile.

Vicaire. — Rapport de la Commission chargée d'examiner le frein à air comprimé de M. Wenger. (115-134, 1 pl.).

Ce rapport est suivi d'une Note complémentaire indiquant les conditions du fonctionnement du nouveau frein.

Seguela. — Étude sur l'action des freins. (361-392, 1 pl.).

L'auteur examine successivement l'influence d'une action tangentielle motrice et d'un effet de traction résistant, puis d'un effort de traction moteur et d'un effet tangentiel résistant; puis il discute les résultats des expériences entreprises en Angleterre par M. le capitaine Galton.

Cas particuliers. Arrêt d'une voiture non soumise à toute la puissance de frein. Freins continus. Examen d'un attirail de frein. Examen du moteur. Systèmes automatiques et non automatiques. Considérations générales sur l'arrêt d'un train soumis à l'action d'un frein continu.

Tome III; 1er semestre 1883.

Sartiaux et *Banderali.* — Matériel des chemins de fer de la Corse. (307-396, 10 pl.).

Description du matériel, présentée sous forme de rapport au Comité de l'exploitation technique des chemins de fer.

Ce document est accompagné d'annexes dans lesquelles on a indiqué, entre autres particularités, les conditions de résistance du type de rail et d'éclisse, des traverses, les charges que les machines peuvent remorquer sur des rampes continues de différentes inclinaisons; enfin, les données d'expérience pour le fonctionnement des locomotives du type adopté.

Thiré. — Note complémentaire sur le planimètre d'Amsler. (401-484, 1 pl.).

Dans une précédente Notice (t. I, p. 487-500; 1882), l'auteur a donné la théorie du planimètre d'Amsler, en décomposant la surface plane à mesurer au moyen d'un double réseau de lignes qu'il a appelées *cercles de roulement* et *courbes de glissement*.

Le même principe de démonstration pourrait être conservé avec d'autres

modes de décomposition de la surface à mesurer. Par exemple, on pourrait avoir recours à des cercles concentriques au pôle et à des rayons passant par le pôle. Ce mode de décomposition a l'avantage de ne donner lieu qu'à un calcul très élémentaire.

Haton de la Goupillière. — Formules analytiques relatives aux lois de la richesse des filons. (405-421, 1 pl.).

Certaines de ces lois, d'un ordre purement géométrique, se rapportent à la disposition relative de la stratification du terrain et des fractures qui l'ont affecté. Dans les variations d'allure de ces dernières, il y a lieu de distinguer leur direction, leur inclinaison et l'orientation de leur intersection par le plan des strates. Ces trois éléments ont donné lieu à d'importantes remarques énoncées par divers ingénieurs et minéralogistes, R. Thomas, Hellot, R. Tregaskis et M. Moissenet.

Ces lois ne sont pas, du reste, isolées les unes des autres. Elles se trouvent, au contraire, étroitement reliées par une coordination rationnelle qui a été développée avec beaucoup de jugement, de prudence et de sagacité par M. Moissenet.

On peut suivre, pour cette recherche, une marche graphique ou la voie du calcul. Les procédés de la Géométrie descriptive ont été déjà employés par M. Moissenet dans ses études sur le Cornwall, et, d'après sa méthode, par M. Burthe pour les filons aurifères de Gondo (Valais). C'est, au contraire, à la méthode analytique que se rapporte le présent travail. Jusqu'à présent, les relations qui font connaître les variations de direction et d'inclinaison n'ont été données que pour le cas particulier du plan vertical; celle qui exprime la puissance en fonction du glissement du toit ne l'a été que pour le cas spécial du mouvement, suivant la ligne de la plus grande pente, et seulement d'une manière approximative; enfin, celle qui détermine le sens des colonnes métallifères n'a pas encore été formulée. « Je me propose », dit l'auteur, « de traiter ces trois problèmes d'une manière à la fois générale et rigoureuse. Si les calculs qui m'en ont fourni les solutions restent un peu compliqués, malgré les simplifications que j'ai réussi à y apporter, il est nécessaire de remarquer que, les formules finales étant maintenant établies, leur application numérique à chaque cas particulier sera, au contraire, simple et rapide. »

Voici la subdivision du travail : orientation des colonnes métallifères; déviation de la direction; déviation de l'inclinaison; relation de la puissance au glissement.

Haton de la Goupillière. — Note sur le profil d'équilibre des tractions mécaniques en rampe. (422-428, 1 pl.).

Quand on envisage une traction mécanique destinée à remonter sur une rampe, par l'action d'un moteur, les matières fournies par une exploitation en vallée, la perturbation apportée dans le jeu du moteur par la variation du poids du câble devient trop importante pour que l'on ne cherche pas à en atténuer l'effet.

On peut se proposer d'adopter une voie en courbe, et d'un profil d'équilibre tellement choisi, que les variations de poids du câble soient compensées par des variations correspondantes dans la pente, et, par suite, dans les composantes tangentielles du poids mort et du poids utile à chaque instant.

M. J. von Hauer a donné de ce problème une solution complète, et est arrivé à ce résultat remarquable, que la courbe cherchée n'est autre que la cycloïde.

L'auteur du présent travail s'est proposé de donner une démonstration simple et directe de cette propriété. H. B.

ANNALES DES PONTS ET CHAUSSÉES (1).

5e série. — Tome XX; 2e semestre 1880.

Lévy-Lambert. — Tableaux graphiques pour le calcul des ressorts. (59-65, 1 pl.).

Le calcul des ressorts, au moyen des formules établies par M. Phillips, exige un certain nombre de tâtonnements de la part du constructeur. Il paraît donc utile et commode d'appliquer à ces calculs les méthodes d'anamorphose créées par M. Léon Lalanne.

Bloch (*R.*). — Note sur la recherche des dépenses d'eau par infiltration et imbibition dans un canal après un changement de sa section mouillée. (66-70, 1 fig.).

Mocquery (*C.*). — Largeur à donner aux canaux dans les courbes. (118-124, 1 pl.).

Lorsque deux bateaux ont à se croiser dans une courbe, un bateau stationnant peut se trouver, tantôt sur la rive convexe, tantôt sur la rive concave. On démontre aisément que toute largeur qui conviendra à l'un de ces cas conviendra nécessairement à l'autre.

Désignant par x la largeur cherchée, R le rayon de la courbe convexe, l la largeur des bateaux, L leur longueur, j le jeu, on trouve

$$(x+\mathrm{R})^2 = \frac{\mathrm{L}^2}{4} + \left[l + j + \sqrt{(\mathrm{R}+l)^2 + \frac{\mathrm{L}^2}{4}}\right]^2.$$

La discussion de cette formule fait l'objet de la présente Notice.

Cunq. — Vérification de la stabilité des voûtes. (145-156, 2 pl.).

Dans un travail paru aux *Annales*, en 1867 et 1868, M. A. Durand-Claye a précisé le rôle des courbes des pressions, et indiqué, par des constructions géométriques, quelles sont toutes les courbes des pressions compatibles avec l'équilibre et avec la résistance d'une voûte donnée.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XI, 259, II_2, 106 et IV_2, 211.

L'auteur de ce Mémoire s'est proposé d'indiquer des constructions extrêmement simples et d'une exécution très rapide, pour la pratique de la méthode de M. Durand-Claye, et de faire connaître une autre méthode de vérification, dans laquelle les conditions d'équilibre sont nettement accusées par les positions relatives de lignes droites et de courbes-contours déduites de la voûte à étudier au moyen d'une très simple transformation.

Willotte (*H.*). — Note sur la détermination, à l'aide de tableaux graphiques, des surfaces des profils de terrassements. (303-311, 1 pl.).

L'emploi des méthodes graphiques pour résoudre les problèmes de construction tend à se généraliser de plus en plus. Chaque jour les méthodes nouvelles se créent ou se perfectionnent, et les progrès accomplis ne font qu'appeler plus vivement sur ce sujet l'attention des ingénieurs.

L'auteur se propose d'examiner deux problèmes particuliers que l'on peut avoir à résoudre quand il s'agit d'évaluer, d'une manière expéditive, la surface d'un profil en travers.

Boulangier. — Méthode de calcul des terrasses par réduction à l'horizontale. (312-316, 1 pl.).

Exposé d'une méthode très rapide et très exacte, qui s'applique aux avant-projets comme aux projets définitifs de routes, de canaux et de chemins de fer, et dont l'auteur a fait usage dans l'avant-projet du canal direct de Dunkerque à Lille, qui comporte 16 millions de mètres cubes de déblais.

Dupuy (*C.*). — Note sur les raccordements des courbes avec les alignements droits dans le tracé des chemins de fer. (544-552. 4 fig.).

Discussion en faveur de l'adoption de la courbe de raccordement due à M. Nordling

$$y = m x^3,$$

tangente à l'alignement droit et au cercle, de manière à avoir un rayon de courbure infini au contact avec la droite, et un rayon de courbure égal à celui du cercle au contact avec cette dernière courbe.

La courbe proposée par M. Michel, et qui a pour équation

$$y = m x^3 - n x,$$

présente le défaut de ne pas se raccorder avec l'alignement droit, et de ne pas différer essentiellement de la courbe de Nordling. Il paraît donc avantageux de s'en tenir à celle-ci.

6e série. — Tome I; 1er semestre 1881.

Flamant. — Remplissage des écluses. (81-91).

Note sur l'économie d'eau à réaliser par l'emploi d'une colonne liquide pour

le remplissage et la vidange des écluses de navigation. Influence du frottement de l'eau contre les parois de l'aqueduc. Évaluation plus approchée des pertes dues à quelques autres causes.

Siegler. — Procédé rapide de détermination des surfaces de profils en travers. (98-108, 1 pl.).

Question qui préoccupe à juste titre un grand nombre d'ingénieurs dans la préparation des projets de routes et le calcul des cubatures des terrasses.

Le procédé exposé ici n'exige pas le dessin des profils en travers, et ne demande que la construction d'un graphique ou de quelques graduations métriques qu'un dessinateur peut exécuter en deux ou trois heures de travail.

Ce procédé permet, avec le même graphique, de passer rapidement d'un gabarit de voie à un autre. Il donne en même temps les surfaces d'emprise et de talus.

L'emploi du graphique est très simple et peu fatigant, de sorte que les erreurs matérielles se produisent rarement.

Crépin (*A.*). — Étude sur le desséchement des pays watringués du nord de la France pour l'écoulement des eaux nuisibles à la mer. (137-196, 4 pl.).

Jusqu'à présent, l'empirisme et le tâtonnement ont régné en maîtres dans les rédactions des projets de watringues. On procède par à peu près et l'on déduit les conclusions de prémisses contestables.

L'État va exécuter des projets et faire des dépenses considérables pour des travaux d'ouvrages à la mer devant servir aux desséchements. Quand ces travaux seront finis, ou ces dépenses seront absolument inutiles, ou il faudra que les watringues procurent des améliorations à leurs canaux en rapport avec les ouvrages de débouché.

Or avec les formules ordinaires de l'hydraulique, le problème est des plus complexes et on ne sait quelquefois par quel bout l'aborder.

L'auteur a pensé qu'il ne serait pas inutile d'étudier un instrument de calcul qui apporte la clarté dans cette étude d'un abord si épineux.

L'emploi des méthodes se prête avec avantage à cette recherche; les tableaux ainsi construits ne gardent rien de la complication relative des calculs qu'il est nécessaire de développer pour justifier leur tracé.

Yvon Villarceau. — Sur l'emploi des fonctions hyperboliques dans les calculs de résistance des matériaux. (207-212).

Cette courte Note, rédigée à la demande de M. Lalanne, a pour objet de faire bien nettement ressortir l'avantage que présente l'emploi des fonctions hyperboliques dans la solution de certains problèmes de la pratique industrielle, par exemple, les calculs de résistance des matériaux.

Appliquant ces formules à l'étude de trois questions traitées par Navier, l'auteur montre qu'elles conduisent à des réductions nouvelles, que les notations de la Trigonométrie ordinaire ne permettaient pas d'apercevoir facilement.

Flamant. — Calcul de l'effort nécessaire pour mouvoir un bateau dans un canal courbe. (213-224, 2 fig.).

Si l'effort nécessaire pour faire mouvoir un bateau (rectangulaire de longueur a et de largeur b) dans un canal rectiligne, avec une certaine vitesse, est représenté par l'unité, celui qu'il faudra exercer pour donner au bateau la même vitesse dans une courbe de rayon R sera

$$1 + \frac{a^4}{8b^2R^2}.$$

Établissement et discussion de cette formule.

Decœur (*P.*). — Emploi de bassins d'épargne pour réduire la dépense d'eau dans les canaux éclusés. (428-454, 1 fig.)

La circulation sur les voies navigables devenant de plus en plus active, il arrivera un moment où l'alimentation des canaux éclusés sera à la fois très difficile et dispendieuse.

L'auteur se propose d'établir qu'en abandonnant complètement l'idée de l'utilisation de la force vive de l'eau par les mouvements intermittents ou le système des coups de bélier, on peut obtenir, au moyen de plusieurs bassins d'épargne, une économie d'eau aussi grande qu'on voudra, et arriver facilement à un rendement de plus de 60 pour 100 en n'employant qu'un seul bassin d'épargne, relié au sas par un conduit de peu de longueur, mais de grande section.

Blum. — Calcul rapide des terrassements. (455-461, 2 pl.).

Description d'un instrument destiné à faciliter ce calcul. Antérieurement, M. Toulon avait eu l'idée d'ajouter une règle glissant le long d'une règle fixe, toutes deux étant convenablement graduées, au lieu d'un tableau graphique à double entrée.

L'auteur a ainsi mis en évidence l'équivalence des propriétés de la règle logarithmique ou règle à calcul et de l'abaque.

Cornaglia (*P.-A.*). — Du flot de fond dans les liquides en état d'ondulation. (587-695, 1 pl.).

Préliminaires et question. Détermination du flot de fond. Particularités du flot. Effets du flot. Applications et conclusions. Réfutation de la théorie d'Emy sur le flot de fond.

Tome II; 2e semestre 1881.

Fontaine et *Desmur*. — Durée de l'éclusage au canal du centre des bateaux chargés à 300 tonnes. (139-161, 1 pl.).

La loi a fixé à 2^m la profondeur d'eau minimum, et une circulaire ministérielle a prescrit de fixer, d'après cette donnée, la position des seuils des écluses. Il semblerait donc que les seuils devraient être placés simplement à 2^m en contrebas de la tenue d'eau normale des biefs.

L'auteur se propose de montrer que, si on les établissait ainsi, sans se préoccuper sérieusement de donner beaucoup plus de facilité au dégagement de l'eau

dans les écluses, on irait au-devant de graves mécomptes et qu'on serait loin de permettre pratiquement le passage de bateaux chargés à 300 tonnes.

Les résultats auxquels il parvient trouvent une vérification très satisfaisante.

Mocquery (*C.*). — Courbes de raccordement des canaux. (198-219, 5 fig.).

Suite et complément à une Note antérieure. La formule donnée dans le premier travail peut se réduire très simplement à

$$x = 10^{m} + \frac{380^{m}}{R},$$

qui a été consacrée par une circulaire ministérielle.

Il reste à examiner les conditions du raccordement des parties courbes élargies suivant la formule, avec les parties droites contiguës dont la largeur est normale.

C'est là l'objet de la présente Note où l'on étudie successivement trois cas : 1° l'élargissement symétrique; 2° l'élargissement total par la rive concave; 3° l'élargissement total par la rive convexe.

Dans la suite de ses recherches, l'auteur est conduit à étudier l'enveloppe d'une droite de longueur constante L dont les extrémités s'appuient sur une circonférence (de rayon R) et l'une de ses tangentes OY.

Il faudrait, pour en avoir l'équation, éliminer α entre l'équation

$$[L^2 + (\alpha x - y)^2]\sqrt{1 + \alpha^2} = 2L(\alpha^2 x - \alpha y + R)$$

et sa dérivée par rapport à α. Il est plus simple de recourir à la détermination graphique des principales singularités de cette enveloppe, qui présente 1 point double, 2 points d'inflexion et 4 points de rebroussement.

Enfin, dans le cas particulier du raccordement de deux courbes contiguës et de rayons différents, on aurait à chercher l'enveloppe d'une droite de longueur constante L dont les extrémités s'appuieraient sur deux circonférences (de rayons R et R′) tangentes entre elles.

Si l'on se décide, toujours dans le même cas, à porter tout l'excédent de largeur du côté convexe, les rives circulaires convexes seront seules à raccorder. La courbe de raccordement à employer sera alors une parabole du second degré, tangente aux deux cercles.

De Lagrené (*H.*). — Sur la poussée des terres avec ou sans surcharges. (441-471, 11 fig.).

Les nombreux travaux insérés dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, sur la poussée des terres et sur le calcul des murs de soutènement, semblent montrer que les solutions indiquées n'ont pas encore atteint le degré de clarté qui permet de les graver dans la mémoire et de les appliquer sans hésitation.

Dans plus d'une circonstance, l'auteur de ce travail a dû recommencer des recherches assez longues pour calculer un bajoyer d'écluse ou un mur de quai, et il aurait été heureux d'avoir sous la main un résumé des principes utiles dans la pratique et une indication claire et simple des calculs ou des épures nécessaires.

De 1773 à 1820, Coulomb, de Prony et Français ont produit divers Mémoires sur la question, en négligeant le frottement de la terre contre la paroi du mur de soutènement. Ce nouvel élément, introduit par Poncelet en 1840, est venu compliquer le problème, mais Rankine indique comment on peut l'éluder, quand l'angle de frottement de la terre sur la maçonnerie n'est pas moindre que celui de la terre sur elle-même, ce que l'on peut généralement admettre. (*Annales*, 1874, et *Bulletin*, t. XI, p. 264.)

Le problème peut être ramené à trouver en grandeur et en position la poussée exercée sur le plan vertical passant par l'arête intérieure de la base du mur.

On simplifie en ne tenant pas compte de la cohésion des terres et en supposant que le remblai est limité à sa partie supérieure par un plan unique faisant un angle θ avec l'horizon.

En désignant par φ le talus naturel des terres coulantes, ρ leur densité, h la hauteur de la section verticale définie précédemment, on trouve que la poussée a pour expression

$$\frac{1}{2}\rho h^2 \cos\theta \frac{\cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\varphi}}{\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\varphi}}.$$

Pour $\theta = 0$, elle devient

$$\frac{1}{2}\rho h^2 \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi},$$

et la direction de cette poussée est horizontale.

Le Mémoire se termine par une comparaison entre la poussée de la terre et la poussée de l'eau; une étude de la poussée d'un terre-plein uniformément surchargé et une application numérique à un bajoyer de l'écluse de Saint-Aubin.

Tome III; 1er semestre 1882.

Dubret. — Généralisation des tableaux construits d'après la méthode de M. Willotte. (90-100, 1 pl.).

La méthode précitée repose sur la construction de courbes d'égales surfaces, formant un système d'hyperboles homothétiques faciles à tracer, dès que l'une d'elles a été bien exactement construite au moyen de quelques-unes de ses tangentes.

Il a paru avantageux de pouvoir opérer au moyen d'un tableau unique, ou de deux tableaux au plus, dressés l'un pour les déblais, l'autre pour les remblais. Préparés sur carton fort, ces tableaux ne seraient pas soumis aux causes d'altération (retrait du papier, etc.), qui agissent sur les feuilles gravées et nuisent à l'exactitude des résultats. On pourrait construire les épures à grande échelle, multiplier par suite le nombre des hyperboles, donner enfin au procédé une précision des plus grandes.

L'auteur propose l'emploi d'un rapporteur transparent, formé d'un cadre trapézoïdal, en bois ou plus simplement en carton, dans l'évidement duquel on tend une toile à calquer, où l'on a au préalable représenté toutes les inclinaisons du terrain naturel.

Perron. — Instrument pour tracer par points les courbes de niveau sur un plan coté. (103-105, 2 fig.).

La détermination d'un point d'une courbe de niveau revient par le fait à la construction de deux triangles semblables, dont les côtés sont proportionnels aux différences entre la cote du point cherché et celle des deux points qui servent à le déterminer.

Pour éviter la surcharge du dessin par un nombre considérable de triangles, l'auteur propose d'effectuer mécaniquement les constructions dont nous venons de parler.

D'après l'inventeur, cet instrument permet de faire en deux jours un travail auquel il faut consacrer cinq jours quand on emploie la méthode ordinaire.

Huléwicz (*M.*). — Calcul de résistance des poutres droites à plusieurs travées. (141-218, 12 fig.).

Ce travail est divisé en deux parties.

Dans la première partie, l'auteur rappelle d'une manière succincte les équations générales servant de base aux développements ultérieurs, dans le cas où le nombre et l'ouverture des travées sont quelconques. Cette partie est basée sur les formules générales de MM. Collignon et Bresse.

La deuxième partie donne les expressions des moments fléchissants maximum sur les appuis et les équations de la courbe enveloppe définitive de ces moments dans les principaux tronçons de chaque travée. Toutes ces quantités sont exprimées en fonction des charges, de l'ouverture de la première travée l et du rapport des ouvertures δ. Elle contient, en outre, les expressions en fonction de ces mêmes quantités, des abscisses qui limitent les tronçons de chaque travée, et enfin les équations de la courbe enveloppe des efforts tranchants.

Le nombre des travées considéré s'étend de trois à huit, appartenant à une poutre symétrique, c'est-à-dire ayant ses travées intermédiaires égales entre elles, et les travées de rive présentent également la même longueur, mais différente de celle des travées intermédiaires.

Lévy (*M.*). — Mémoire sur le transport électrique de l'énergie. (225-242).

Le problème du transport d'une quantité donnée d'énergie, à une distance quelconque, avec un rendement donné, ne trouve aucune solution dans les lois qu'on pourrait appeler les lois de similitude énoncées jusqu'ici. Ces lois, scientifiquement exactes, sont illusoires dans la pratique, parce que leur application exigerait ou un accroissement sans limite de la force électromotrice, ce qui rendrait tout isolement impossible, ou le décroissement indéfini de la quantité d'énergie transportée, ce qui rendrait l'opération inutile.

Le problème peut être résolu par l'emploi de machines de dimensions courantes établies de façon à pouvoir fournir, sans vitesse exagérée de leurs anneaux, la tension maximum que peut subir, en toute saison, une ligne aérienne ou souterraine.

Du Bois (*P.*). — De l'effet des endiguements sur le profil en long d'une rivière à fond mobile. (324-337).

Quand on endigue une rivière à fond mobile, on modifie les conditions de l'écoulement. Il peut donc arriver qu'on détruise l'équilibre préexistant entre la

force du courant et la résistance du fond. De là, des changements dans le profil en long, dont on néglige ordinairement de tenir compte dans les prévisions, et dont les effets peuvent surprendre d'une façon funeste.

Les formules ordinaires de l'hydraulique sont impuissantes pour les calculer, car elles supposent que le fond reste fixe, ou bien, si l'on prévoit une modification du fond, on la détermine arbitrairement.

L'auteur a pensé que ses formules établies dans son Mémoire sur le Rhône et les rivières à lit affouillable (*Annales*, 1879, et *Bulletin*, IV_2, p. 213) pourraient trouver un utile emploi dans ce genre de recherche.

Jacquier. — Détermination graphique de la poussée des terres. (463-472, 5 fig.).

Le but de la présente Note est de faire connaître, pour l'application de la théorie exposée par M. Considère, un autre procédé graphique, qui paraît beaucoup plus simple et qui a l'avantage d'éviter toute ambiguïté pour le tracé des réactions, lorsque celles-ci ne sont pas normales aux plans auxquels elles s'appliquent. Ce procédé est en outre plus général, car on peut opérer sur un plan quelconque, au lieu d'être obligé de s'en tenir au plan à frottement nul ou maximum mené par la base de la paroi.

M. Considère fait observer que sa théorie est, sinon identique, au moins parfaitement conforme à celle que M. Maurice Lévy a présentée à l'Institut en juin 1869; mais il n'est peut-être pas sans intérêt de faire remarquer que cette même théorie est au fond identique à celle qui a été donnée par M. Rankine, dès 1856, dans les *Philosophical Transactions*. L'autorité du célèbre ingénieur anglais contribuera sans doute à rassurer les ingénieurs qui voudront faire usage de cette théorie.

Curie (*J.*). — Note sur la brochure de M. B. Baker, relative à la poussée latérale réelle des remblais. (558-592, 9 fig.).

L'auteur s'élève contre une assertion formulée par M. Baker, qui affirme le manque de données expérimentales précises et l'indifférence des constructeurs sur ce sujet. Il estime que M. Baker aurait pu vérifier, d'une façon plus attentive, l'accord de l'expérience avec la théorie qu'il a exposée dans un Ouvrage publié en 1870, puis dans des Communications à l'Académie des Sciences en 1873, et enfin dans le *Mémorial de l'Officier du Génie* en 1875 (Voir *Bulletin*, II, p. 212; VI, p. 87; XI, p. 254).

La théorie de la poussée des terres, en tenant compte du frottement des terres sur la paroi postérieure du mur, a été donnée en dernier lieu par M. Boussinesq, dans un *Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérisants*, publié en 1876 par l'Académie royale de Belgique. A la suite de la discussion du Mémoire de M. Baker, M. Boussinesq, sur la demande de M. J. Forrest, secrétaire de la Société des ingénieurs civils, a adressé à cette Société une Note dans laquelle il établit, d'une manière élémentaire et simple, les résultats principaux de cet *Essai*, pour le cas assez ordinaire d'un massif horizontal soutenu par un mur vertical, et où il donne des formules susceptibles d'une application pratique immédiate. Dans cette Note, M. Boussinesq montre que le rapport de l'épaisseur du mur à la hauteur est un minimum lorsqu'on s'en tient aux résultats du calcul, mais que l'on peut lui assigner aussi une limite supérieure, de

manière qu'en réalité les expériences décrites par M. Baker conduiraient à un accord constant de cette théorie et des faits observés. M. Baker ne s'est peut-être pas assez préoccupé des causes de la divergence qu'il avait constatée entre les résultats de la théorie et ceux de ses observations pratiques. Il eût pu ainsi se montrer moins sévère à l'égard de la plupart des auteurs qui ont écrit sur la poussée des terres.

Flamant (*A.*). — Note sur la poussée des terres. (616-624).

Réflexions et remarques au sujet du Mémoire précité de M. Baker. Objections qui infirment quelques conclusions de la théorie de Rankine.

Boussinesq (*J.*).— Note sur la poussée des terres (625-643, 1 fig.).

Cette Note, indiquée à propos des deux articles précédents, a pour objet la détermination de l'épaisseur minimum que doit avoir un mur vertical, d'une hauteur et d'une densité données, pour contenir un massif terreux, sans cohésion, dont la surface supérieure est horizontale.

Lavollée. — Notice sur les portes de l'écluse d'Ablon. (644-658, 2 fig., 2 pl.).

Les notes annexées à ce travail renferment le calcul de la force qui fait équilibre à la pression de l'eau en un point du vantail et les calculs de résistance d'un vantail.

H. B.

REVUE D'ARTILLERIE (¹).

Tome XXII; avril-septembre 1883.

Duguet. — Résistance des corps solides. (132-153; 185-221; 411-441, 25 fig.).

Mémoire circonstancié dans lequel l'auteur n'a fait intervenir que les notions

---

(¹) Voir *Bulletin*, XI, 74; II_2, 127; IV_2, 206; V_2, 231 et VII_2, 86.

Errata. — T. VIII_2, 2e Partie, p. 5, *au lieu de* 26 novembre, *lisez* 26 mars. T. VII_2, 2e Partie, p. 14, ligne 11 en remontant, *au lieu de* n° 3, *lisez* n° 13; p. 79, lignes 12, 13, 14 et 15 en remontant, les titres énoncés doivent être en grands caractères; p. 84, ligne 11 en remontant, *au lieu de* septembre, *lisez* semestre. T. VIII_2, 1re Partie, p. 21, *au lieu de* $\mu^2 b^2$, *lisez* $\mu^2 - b^2$; p. 29, ligne 1, *ajouter* Juillet, 1877; ligne 2, *au lieu de* coordonnées, par, *lisez* coordonnées polaires, par; p. 51, ligne 10 en remontant, *au lieu de* génératrice, *lisez* génération; p. 55 et 56, les énoncés de la p. 52 ont été reproduits par erreur; p. 185, ligne 6, on a omis l'indication qui correspond à (*). T. VI_2, 2e Partie, p. 110, ligne 7 en remontant, *au lieu de* on peut regarder, dans, *lisez* on peut dans, etc.; p. 157, *au lieu de* huit racines, *lisez* huit veines; p. 211-212, les titres des travaux cités de Cayley, Spottiswoode, Harley et Russel doivent être indiqués en petits caractères; p. 235, ligne 13 en remontant, *au lieu de* par, *lisez* pour.

analytiques les plus indispensables, de manière à laisser aux faits d'observations toute leur importance et à donner, autant que possible, des interprétations fondées sur des considérations géométriques.

Voici les subdivisions des articles publiés dans ce Volume :

Chapitre I. *Théorie mathématique de l'élasticité.* — Forces élastiques. Ellipsoïde d'élasticité. Composantes normales et tangentielles des forces élastiques. Coefficient d'élasticité. Considérations sur les hypothèses ou principes des théories mathématiques de l'élasticité.

Chapitre II. *Résistance à la rupture. Cassure. Cohésion.* — Position de la question. Torsion simple. Compression simple. Hypothèse fondamentale et ses conséquences immédiates. Résistance au glissement, à la traction et à la compression simples. Relations générales entre les forces principales de rupture. Traces des cassures sur la surface libre. Cassures en général. Cohésion. Cristaux. Fibres. Grains. Talus.

Chapitre III. *Limite d'élasticité. Écrouissage.* — Limite d'élasticité. Efforts simultanés. Forces principales limites. Limite d'élasticité d'un corps primitivement déformé. Efforts successifs. Écrouissage.

Chapitre IV. *Énervement.* — Efforts agissant successivement en sens contraires. Énervement.

Chapitre V. *Déformations. Densité. Stabilité.* — Déformations et déplacements des éléments. Forces et couples intérieurs. Déformations élémentaires. Glissement et densité. Équation d'équilibre et coefficient d'élasticité, dans l'hypothèse de l'indépendance des petits effets des forces élastiques. Stabilité des déformations. Considérations sur les recherches expérimentales relatives au développement des forces élastiques.

Canet (*G.*). — Étude d'un frein hydraulique pour affût de 155^{mm}, modèle 1877. (289-298, 1 pl.).

L'auteur décrit un système de frein hydraulique dont l'adoption présenterait, d'après lui, les avantages suivants :

1° Protection mieux assurée des servants et du matériel, par suite de la modération du recul;

2° Rapidité du tir, par suite de la remise automatique de la pièce en batterie;

3° Facilité de manœuvre;

4° Diminution du nombre des servants.

Or, il a établi, dans un travail précédent (*Revue*, 1879; *Bulletin*, IV$_2$, p. 208), que le seul frein qu'on puisse disposer pour obtenir ces résultats est le frein hydraulique à orifices d'écoulement variable.

Dans ces conditions, le problème paraît pouvoir être résolu d'une manière satisfaisante par l'emploi d'un frein hydraulique limitant le recul à 0^m,75 et calculé pour une pression totale de 13 tonnes.

L'aire variable y des orifices d'écoulement, lorsque l'affût a reculé d'une longueur x, est représentée, pour la pièce en question, par l'expression

$$y = 0^m,0068\sqrt{1 - \frac{x}{l}},$$

l étant le recul total.

Siacci. — Sur les axes des groupements. (521-544).

Discussion de plusieurs passages d'un précédent Mémoire de M. P. Bréger au sujet des ellipses d'égale probabilité (*Revue*, 1877; *Bulletin* II_2, p. 130).

La fonction qui représente la probabilité simple d'une erreur donnée est étroitement liée à la règle d'après laquelle on détermine le centre d'un groupement, de sorte que, si ce point est le centre de gravité ou le point par rapport auquel la somme des carrés des écarts est un minimum, cette adoption renferme nécessairement la formule de la probabilité simple, c'est-à-dire celle de Laplace, ainsi que Gauss l'a démontré. Gauss, en effet, a établi que, si l'on admet comme valeur la plus probable d'une quantité la moyenne arithmétique de toutes les quantités observées, la fonction qui exprime la probabilité d'une erreur donnée est celle de Laplace. Et la démonstration est rigoureuse, au moins si l'on admet que la fonction cherchée a une dérivée.

D'accord avec le principe à l'aide duquel on détermine le centre du groupement, l'auteur adopte la formule connue de Laplace et, sur cette base, il se propose d'établir le théorème suivant :

Quels que soient le nombre et la direction des causes déviatrices, elles peuvent toujours être réduites à deux causes indépendantes et perpendiculaires entre elles; et les directions de ces dernières coïncident avec les deux axes principaux d'inertie passant par le centre du groupement.

Ce théorème étant démontré, il n'y a plus à douter que les groupements admettent des axes. Ces axes existent, quels que soient les projectiles; il y en a deux, et leurs directions sont celles indiquées ci-dessus; le théorème lui-même permet de les trouver, puisqu'il donne le moyen de les déterminer par l'expérience.

Pour les projectiles sphériques, où tout est symétrique par rapport au plan vertical passant par l'axe de la bouche à feu, l'expérience n'est pas nécessaire; l'un des deux axes est certainement vertical, l'autre est, par conséquent, horizontal; par suite, cette proposition, qui auparavant était une simple hypothèse, s'élève désormais au rang de théorème.

Pour les canons rayés, des expériences faites avec soin pourront, en s'appuyant sur ce théorème, déterminer les directions des deux axes. Il est vraisemblable que l'un d'eux se trouve dans le plan osculateur de la trajectoire, et si cela se vérifie, comme ce plan est vertical, on aura une justification de la méthode actuellement en usage pour déterminer la probabilité d'atteindre une surface donnée. Sinon, non.

Telle est la base du présent article, dont voici maintenant les subdivisions : composition de plusieurs causes agissant suivant une même direction. Transformation de deux causes agissant dans deux directions quelconques en deux autres agissant dans des directions perpendiculaires. Composition de trois causes agissant dans un plan suivant des directions quelconques. Composition de n causes agissant dans un plan. Axes d'inertie. Groupements dans l'espace. Sur la composition des écarts. Sur le mode d'agir des causes déviatrices.

H. B.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, t. XCVII (suite); 1883 [1].

N° 14; 1er octobre.

Coggia. — Observations de la planète (234) et de la comète Brooks, faites à l'Observatoire de Marseille. (738).

Stieltjes. — Sur l'évaluation approchée des intégrales. (740).

Évaluation approchée d'une intégrale $S_b^a f(x), G(x)\,dx$, où $f(x)$ est une fonction positive et $G(x)$ une fonction continue à nombre fini de maxima et minima, sous la forme approchée $\sum_i^n A_k G(x_k)$, où les A sont des constantes positives et les x_k des racines d'une équation algébrique.

Dutordoir. — Démonstration nouvelle du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques. (742).

Picard (E.). — Sur les formes binaires indéfinies à indéterminées conjuguées. (745).

N° 15; 8 octobre.

Bigourdan. — Observations de la comète Pons-Brooks et des planètes (142), (185), (221) et (234), faites à l'Observatoire de Paris. Remarquable changement d'éclat de la comète Pons-Brooks. (794).

Cruls. — Sur une particularité remarquable présentée par la queue de la grande comète australe de 1882. (797).

Stieltjes. — Sur l'évaluation approchée des intégrales. (798).

N° 16; 15 octobre.

Tisserand. — Note sur une formule de Hansen. Première Partie. (816).

---

[1] Voir *Bulletin*, VI_2, 51 et 19.

Partant des formules

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\cos V}} = \sum_0^\infty \frac{r^n}{r'^{n+1}} P^{(n)}(z),$$

où $P^{(n)}$ est le polynôme de Legendre, si l'on remplace $z = \cos V$ par

$$\cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos J,$$

et que l'on ordonne les résultats suivant les cosinus des multiples de u et de u', on obtient une formule due à Hansen, que M. Tisserand obtient fort simplement, comme il suit.

Posant

$$P^n(z) = 4\Sigma \mu^i \nu^j A_{i,j}^{(n)} \cos ix \cos jy,$$

où $u' - u = x$, $u' + u = y$, $\cos^2 \frac{J}{2} = \mu$, $\sin^2 \frac{J}{2} = \nu$, il déduit de l'équation différentielle auxquelles satisfont les P la relation

$$\frac{d^2 A_{i,j}^{(n)}}{dJ^2} + \frac{1}{\sin J}[(2j + 2i + 1)\cos J + 2j + 2i]\frac{dA_{i,j}^{(n)}}{dJ}$$
$$+ (n - i - j)(n + i + j + 1)A_{i,j}^{(n)} = 0;$$

en remplaçant ensuite la variable J par la variable ν, on retombe sur l'équation hypergéométrique; on en déduit

$$A_{i,j}^{(n)} = k_{i,j}^{(n)} F(i + j - n,\ i + j + n + 1,\ 2j + 1,\ \nu),$$

F se réduisant ici à un polynôme; quant à $k_{i,j}^{(n)}$, c'est une constante, pour laquelle l'auteur trouve la valeur

$$k_{i,j}^{(n)} = \frac{1}{2^{2n}\Pi(2j)} \frac{\Pi(n + i + j)\Pi(n - i + j)}{\Pi\left(\frac{n - i - j}{2}\right)\Pi\left(\frac{n - i + j}{2}\right)\Pi\left(\frac{n + i - j}{2}\right)}.$$

Liouville (*R.*). — Sur une transformation des équations aux dérivées partielles du second ordre, à deux variables indépendantes, et sur quelques intégrations qui s'en déduisent. (838).

L'auteur signale, comme l'un des résultats de son travail, la définition de la classe des équations du type

$$F(r, s, t) = 0$$

qui, transformées par ces méthodes, admettent des intégrales intermédiaires.

Boussinesq. — Résistance d'un anneau à la flexion, quand sa surface extérieure supporte une pression normale, constante par unité de la longueur de sa fibre moyenne. (843).

Solution pratique d'une question posée par M. M. Lévy : « Étant donné un

manchon cylindrique ou plutôt un anneau mince de rayon moyen R, à section rectangulaire, soumis extérieurement à une pression normale et constante p, par unité de longueur, on demande de désigner les valeurs de la pression p qui seront capables de le faire fléchir ou, autrement dit, de lui faire perdre la forme circulaire. »

Picard (*E.*). — Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies à indéterminées conjuguées et sur les groupes discontinus correspondants. (845).

Darboux. — Sur les surfaces dont la courbure totale est constante. (848).

N° 17; 22 octobre.

Tisserand. — Note sur une formule de Hansen. Deuxième Partie. (880).

On conserve ci-dessous les notations qui ont été expliquées en rendant compte de la première Partie de la Communication de M. Tisserand.

On déduit aisément d'un résultat établi par l'auteur, dans le t. XV des *Annales de l'Observatoire* et de la Communication précédemment analysée, que le coefficient de $\cos 2ix \cos 2jy$ dans la fonction

$$\frac{\sin(2n+1)V}{\sin V}$$

est à un facteur près le carré du coefficient de $\cos ix \cos jy$, dans la fonction $P_{(z)}^{(n)}$ quand on y remplace z par $\mu \cos x + \nu \cos y$.

La raison de cette analogie se trouve dans ce fait que, en posant

$$Z^{(n)} = \frac{\sin(n+1)V}{\sin V},$$

où $\cos V = z$, on a, pour $\theta < 1$,

$$\frac{1}{1 - 2\theta z + \theta^2} = \sum_0^\infty \theta^n Z^{(n)},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\theta z + \theta^2}} = \sum_0^\infty \theta^2 P^{(n)}.$$

On est ensuite conduit à la question suivante :

Posant

$$\frac{1}{(1 - 2\theta z + \theta^2)^{\frac{p-1}{2}}} = \sum_0^\infty \theta^n P^{(n)}(p, z),$$

où $p \geqq 2$, trouver une formule générale qui donne le développement du poly-

nôme $P^n(p, z)$, quand on y remplace z par $\mu \cos x + \nu \cos y$. Ces polynômes P sont les fonctions sphériques d'ordre supérieur de M. Heine.

Ce qui précède résout la question pour $p = 2, 3$. M. Tisserand indique comment on peut, pour $p = 2q + 3$, q étant un entier positif, trouver le coefficient $B_{i,i_1}^{(2n,q)}$ de $4 \cos ix \cos iy$ dans le développement de $P^{2n}(2q + 3, z)$; on a alors

$$B_{i,i}^{(2n,q)} = \frac{\Pi(n+q)\,\Pi(n+q+i)\,(\mu\nu)^i}{\Pi(n)\,\Pi(q)\,\Pi(q+i)\,\Pi(i)\,\Pi(n-i)}\,F_i,$$

où

$$F_i = F(\alpha, \beta, \gamma; \delta, \varepsilon, \sin^2 J)$$

est un polynôme hypergéométrique du second ordre, défini par les éléments

$$\alpha = i - n, \qquad \delta = 2i + 1,$$
$$\beta = i + \tfrac{1}{2}, \qquad \varepsilon = i + q + 1.$$
$$\gamma = i + n + q + 1,$$

Stieltjes. — Sur quelques théorèmes arithmétiques. (889).

Si $f(n)$ désigne le nombre des solutions entières de l'équation

$$n = x^2 + y^2,$$

on a, pour $n = 4t + 1$,

$$f(2.1) + f(2.5) + \ldots + f(2.n)$$
$$= 8\left[E\left(\frac{n-1}{4}\right) + \left(\frac{n-3^2}{3.4}\right) + E\left(\frac{n-5^2}{5.4}\right) - \ldots\right] + 4\cos^2\left(\frac{\mu-1}{4}\right)\Pi,$$

μ étant l'entier impair immédiatement au-dessus de $\sqrt{n}$ ou égal à $\sqrt{n}$.

L'auteur donne des théorèmes analogues pour diverses formes de l'entier n, ou relatives à la somme des diviseurs impairs de n, ou encore à la fonction numérique qui désigne le nombre de solutions de l'équation $n = x^2 + 2y^2$.

Darboux. — Sur les surfaces à courbure constante. (892).

Après avoir rappelé, dans une Communication antérieure, divers travaux (Bonnet, Lie, Bäcklund) relatifs à ces surfaces, M. Darboux établit, comme il suit, une importante proposition due à M. Bianchi.

Soit (C) un système de courbes parallèles sur une surface (Σ); soit (g) le système des lignes géodésiques trajectoires orthogonales des courbes (C). Les tangentes aux lignes (g) sont normales à une certaine surface (S) et touchent une seconde surface (Σ'); (Σ) et (Σ') sont les deux nappes de la surface des centres de courbure de (S). En outre, (Σ') est le lieu des centres de courbure géodésique des courbes parallèles (C) tracées sur (Σ). La relation est d'ailleurs réciproque.

Cherchons s'il existe une surface (Σ) sur laquelle on puisse tracer des courbes parallèles (C) ayant en chacun de leurs points un rayon de courbure géodésique égal à 1. En rapportant (E) aux courbes (C) et aux lignes (g), l'élément linéaire prendra la forme

$$ds^2 = du^2 + C^2 dv^2,$$

où $C = e^{-u}$; la courbure totale de la surface sera donc constamment égale à

-1. Si maintenant on considère la surface (Σ') associée à (Σ), comme il a été expliqué, à cause de la réciprocité, les lignes géodésiques (g') de (Σ') tangentes aux normales de (S) auront pour trajectoires orthogonales des courbes parallèles (C') dont les centres de courbure géodésique seront sur Σ et dont les rayons de courbure géodésique sont égaux à 1; par conséquent, (Σ') sera comme (Σ) une surface à courbure constante -1, et les éléments linéaires, sur les surfaces (Σ) et (Σ'), sont donnés par les formules

$$ds^2 = du^2 + e^{2u}\,dv^2, \tag{1}$$

$$ds'^2 = du^2 + e^{-2u}\,dv^2. \tag{2}$$

Tel est le théorème de M. Bianchi; il en déduit la méthode suivante : considérons une surface (Σ) à courbure -1; on obtiendra, comme il suit, un système simplement infini de systèmes coordonnés donnant à l'élément linéaire la forme (1); il suffit d'associer, en effet, aux lignes géodésiques passant par un point à l'infini de la surface leurs trajectoires orthogonales. Ainsi on déduira de (Σ) une surface (Σ') contenant dans son équation une constante arbitraire; de même de (Σ') on déduira une équation contenant deux constantes arbitraires, etc.; l'application de ce procédé n'exigera, comme M. Lie en a fait la remarque, que des quadratures.

D'un autre côté, M. Darboux établit une élégante proposition due à M. Ribaucour, et qui comprend la proposition de M. Bianchi : elle consiste en ce que, étant donnée une surface (Σ) à courbure -1, si l'on trace dans chaque plan tangent un cercle de rayon 1 ayant son centre au point de contact, tous les cercles ainsi obtenus sont orthogonaux à une famille de surfaces toutes à courbure constante de -1, et, en outre, ces surfaces font partie d'un système orthogonal triple, dont les deux autres familles sont composées de surfaces enveloppes de sphères.

Si, en effet, on rapporte la surface (Σ) à ses lignes de courbure, l'élément linéaire prendra la forme

$$ds^2 = \cos^2\omega\,du^2 + \sin^2\omega\,dv^2, \tag{3}$$

où ω vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \sin\omega\cos\omega = 0. \tag{4}$$

Si, dans le plan tangent en M, on mène une ligne MM′ de longueur 1 faisant avec la courbe $u = \text{const.}$ l'angle θ et si l'on écrit que M′ décrit une surface dont le plan tangent passe en M et est normal au plan tangent à Σ, on obtient les équations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{\partial\omega}{\partial v} &= \sin\theta\cos\omega, \\ \frac{\partial\theta}{\partial v} + \frac{\partial\omega}{\partial u} &= -\cos\theta\sin\omega, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

compatibles sous la condition (u), comme on le voit, en éliminant θ; inversement elles donnent une valeur de θ contenant, outre u, v, une constante arbitraire α, lorsqu'on se donne la fonction ω vérifiant l'équation (u).

On en déduit, si u, v, α sont les coordonnées curvilignes du point M′, l'ex-

pression du déplacement dS de ce point, savoir,

$$dS^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \sin^2\theta\, dv^2 + \left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)^2 d\alpha^2,$$

qui met en évidence le système triple orthogonal. Dans une Communication postérieure, M. Darboux discute le système (5). La valeur de θ trouvée comme il a été expliqué plus haut est aussi une solution de l'équation (u); donc, de toute solution de l'équation (u) on peut déduire une solution nouvelle contenant une constante arbitraire : c'est la valeur de θ la plus générale satisfaisant aux équations (5).

D'une solution particulière quelconque θ des équations (5), on peut déduire cette solution θ' la plus générale; pour cela, on effectue les quadratures définies par les formules

$$(6)\qquad \begin{cases} d\alpha = \cos\theta\cos\omega\, du + \sin\omega\sin\theta\, dv, \\ e^{-\alpha} d\beta = \cos\omega\sin\theta\, du - \sin\omega\cos\theta\, dv, \\ e^{\alpha} dy = \cos\theta\sin\omega\, du + \sin\omega\cos\theta\, dv; \end{cases}$$

la solution θ' est alors donnée par la formule

$$(7)\qquad \cot\frac{\theta'-\theta}{2} = \beta e^{-\alpha}.$$

En remplaçant dans (6) θ par θ', on obtient immédiatement les nouvelles valeurs α' et β' de α, β; γ' s'obtient par une quadrature. On arrive à des résultats analogues en regardant θ comme donné et cherchant la solution la plus générale de ω qui vérifie les équations (5).

En appliquant successivement ces deux opérations, on déduit de tout système de solutions des équations (5) un nombre illimité de systèmes nouveaux contenant autant de constantes qu'on le voudra et la détermination de chaque système nouveau n'exige qu'une nouvelle quadrature. Enfin l'auteur établit la curieuse proposition que voici, qui forme la conclusion de ses recherches : « Il suffira d'effectuer au début, en dehors de α, β, γ, un certain nombre de quadratures (inférieur d'une unité au nombre de solutions nouvelles que l'on veut obtenir), portant sur des fonctions parfaitement déterminées u et de v, et, ces quadratures une fois effectuées, l'application de la méthode n'exigera plus que des calculs algébriques les plus élémentaires.

Léauté. — Sur la loi de répartition des tensions dans une lame élastique de forme primitive arbitraire, enroulée sur un cylindre de section droite quelconque, lorsque le glissement est uniforme. (894).

Cette loi est donnée par la formule

$$L = e^{f\int\frac{ds}{\rho}}\left[e - \int\left(\frac{1}{\rho}\frac{dM}{ds} + f\frac{d^2M}{ds^2}\right)e^{-f\int\frac{ds}{\rho}}\,ds\right],$$

L et M étant les efforts élastiques, résultant de l'allongement et de la flexion, ρ étant le rayon de courbure en un point de l'élément ds et f le coefficient de frottement.

L'auteur en déduit la proposition suivante : « Dans un frein à lame métallique, lorsque la lame est circulaire ou rectiligne avant l'enroulement, la loi de répartition des tensions pendant le glissement uniforme est la même, que l'on tienne compte de l'élasticité ou que l'on n'en tienne pas compte. »

Boussinesq. — Sur le mouvement d'une charge roulante, le long d'une barre élastique horizontale appuyée à ses deux bouts et dont la masse est beaucoup plus petite que la sienne. (897).

Cette question a été traitée par MM. Willis et Stokes; M. Boussinesq montre comment la solution donnée par ce dernier peut être considérablement simplifiée.

N° 18; 29 octobre.

Tresca. — Étude sur les déformations géométriques déterminées par l'écrasement d'un parallélépipède rectangle, avec allongement dans une seule direction. (928).

Darboux. — Sur l'équation aux dérivées partielles des surfaces à courbure constante. (946).

Voir plus haut.

Poincaré. — Sur la reproduction des formes. (949).

Il s'agit de trouver toutes les formes qui sont reproductibles par deux ou plusieurs substitutions linéaires infinitésimales *non permutables* : ce problème a été résolu par l'auteur pour quatre variables et deux substitutions (L° Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*); depuis, M. Lie a étendu la solution au cas de trois substitutions et de quatre variables; M. Poincaré l'étend aux cas de deux substitutions et de n variables.

N° 19; 5 novembre.

Gonnessiat. — Sur l'une des méthodes données par M. Lœwy, pour déterminer les ascensions droites des étoiles circumpolaires. (977).

Lévy (M.). — Sur une Communication de M. Boussinesq, relative à l'équilibre d'un anneau circulaire. (979).

Stieltjes. — Sur la décomposition d'un nombre en cinq carrés. (981).

Soit $N \equiv f \pmod 8$; le nombre de décompositions de N en cinq carrés impairs

positifs est égal à

$$\varphi\left(\frac{N-1^2}{4}\right)+\varphi\left(\frac{N-3^2}{4}\right)+\varphi\left(\frac{N-5^2}{4}\right)+\ldots,$$

ou à

$$f(N)+2f(N-8\times 1^2)+2f(N-8\times 2^2)+2f(N-8\times 3^2)+\ldots,$$

$\varphi(m)$ désignant, en général, la somme des diviseurs du nombre m et $f(m)$ étant égal à

$$-\tfrac{1}{4}\Sigma(-1)^{\frac{d^2-1}{2}}d,$$

d représentant successivement tous les diviseurs de m. M. Hermite indique en note une proposition aussi relative à la décomposition en cinq carrés impairs et positifs et fournie par la théorie des fonctions elliptiques. Soit $n \equiv 1 \pmod 4$; que l'on pose de toutes les manières possibles $n = dd'$ sous la condition $d' > 3d$; la fonction

$$\chi(n) = \Sigma\tfrac{1}{4}(3d+d')$$

peut être définie par le développement

$$\chi(sq)+\ldots+\chi(4m+1)q^m+\ldots$$
$$=\frac{q}{1-q}+\ldots+\frac{(3m-2)q^{m(3m-2)}}{1-q^{2m-1}}+\ldots+\frac{q}{(1-q^2}+\ldots+\frac{q^{m(3m-2)}}{(1-q^{2m-1})^2}+\ldots.$$

Si maintenant on a $N \equiv f \pmod 8$, le nombre de décomposition sera

$$\tfrac{1}{2}\chi(N)+\chi(N-2^2)+\chi(N-4^2)+\chi(N-6^2)+\ldots.$$

André (*D.*). — Probabilité pour qu'une permutation donnée de n lettres soit une permutation alternée. (983).

Une permutation des n lettres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est alternée, lorsque les $n-1$ différences qu'on obtient, en y retranchant chaque indice du suivant, sont alternativement positives et négatives : cette probabilité est le double du coefficient de x^n dans le développement de sécx ou de tang$x$: une expression asymptotique de cette probabilité est $4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1}$.

Poincaré. — Sur l'intégration algébrique des équations linéaires. (984).

M. Jordan a montré (*Journal de Crelle*, t. LXXXIV) comment on peut former les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire. M. Poincaré a démontré qu'à tout groupe fini Γ on peut faire correspondre d'une infinité de manières un groupe G auquel Γ est mériédriquement isomorphe, qu'à ces deux groupes correspond toujours une équation linéaire à intégrales algébriques et que, si l'on pose $x = f(z)$, $f(z)$ étant une fonction fuchsienne engendrée par le groupe G, les intégrales de cette équation sont des fonctions fuchsiennes engendrées par un sous-groupe g de G. Ainsi à un groupe d'ordre fini correspond une infinité d'équations à intégrales algébriques dont on peut choisir arbitrairement les points singuliers. Les fonctions fuchsiennes engendrées par g

sont des fonctions rationnelles de x et de y, x et y étant liés par la relation algébrique

$$(1) \qquad \theta(x, y) = 0,$$

de degré m, de genre p_0; le groupe γ de cette équation algébrique est une seule fois transitif; tous les sous-groupes g de genre p rentrent dans un nombre fini de types.

Relativement aux intégrales abéliennes de première espèce engendrées par la relation (1), on a cette proposition : « On peut choisir un système fondamental de p intégrales telles que leurs périodes normales soient des combinaisons linéaires à coefficients entiers des périodes normales de l'une d'entre elles. » Enfin, voici la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction $F(x, y)$, rationnelle en x et en y et satisfaisant à une équation linéaire d'ordre k : il faut qu'on puisse trouver m quantités

$$a_1, a_2, \ldots, a_m,$$

telles que, si l'on permute ces m lettres d'après les m substitutions du groupe γ et qu'on forme avec ces m permutations un déterminant Δ, tous les mineurs d'ordre $m - k - 1$ soient nuls à la fois.

Lévy (*L.*). — Sur une famille de surfaces développables passant par une courbe gauche donnée. (986).

Ces surfaces sont telles que leurs génératrices coupent une courbe gauche donnée suivant un angle qui ne dépend que des coordonnées du point d'intersection. La détermination de ces surfaces dépend d'une équation de Riccati.

Humbert. — Sur les courbes de genre 1. (989).

Les coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3 d'une courbe de genre 1 et de degré n s'expriment de la façon suivante :

$$x_i = A_i P_1(t) + B_i P_2(t) + \ldots + L_i P_n(t),$$

$$P_{j+1}(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} e^{\mu^2 i \pi \frac{\omega'}{\omega} + 2\mu \frac{t\pi}{\omega}\left(i + j\frac{\omega}{n}\right)}.$$

Les A, B, ... sont des constantes; M. Humbert montre comment, inversement, une courbe étant donnée par une telle représentation, on peut déterminer son degré, son genre et former son équation.

Quet. — Sur le potentiel de la force d'induction due à un solénoïde fermé, dont le courant varie d'intensité. Analogie avec un théorème d'électromagnétisme. (992).

N° 20; 12 novembre.

De Saint-Venant et *Flamant.* — Des vitesses que prennent

dans l'intérieur d'un vase les divers éléments d'un liquide pendant son écoulement par un orifice inférieur, et des moyens simples qui peuvent être employés pour déterminer très approximativement les restes numériques de séries doubles peu convergentes. (1027).

Perrotin. — Observations de la comète Pons-Brooks, faites à l'observatoire de Nice. (1035).

Appell. — Sur certaines formules de Hansen et de M. Tisserand. (1036).

Soient

$$z = \mu \cos x + \nu \cos y,$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{(1 - 2\theta z + \theta^2)^{\frac{p-1}{2}}} \sum_0^\infty \theta^N P^{(N)}(p, z);$$

si l'on fait

$$\varphi(z) = 4 \sum_0^\infty \lambda_{ij} \cos ix \cos jy,$$

on aura

$$\lambda_{ij} = \frac{\mu^i \nu^j (k, i+j) \theta^{i+j}}{(1, i)(1, j)(1+\theta^2)^q} \sum_0^\infty \frac{(q, 2m+2n)}{(i+1, m)(j+1, n)} \frac{\theta^{2m+2n}}{(1+\theta^2)^{2m+2n}} \frac{\mu^{2m} \nu^{2n}}{(1, m)(1, n)},$$

où la sommation est relative aux nombres m, n, où $k = \frac{p-1}{2}$, $q = k + i + j$, et où enfin le symbole (α, m) est mis à la place de $\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)$, $(\alpha, 0)$ étant égal à 1.

Si l'on fait

$$P^N(z, p) = 4 \sum_{i,j} B_{i,j}^{N,p} \cos ix \cos jy,$$

on a

$$B_{i,j}^{N,p} = (-1)^{N'} \frac{\mu^i \nu^j (k, N'+i+j)}{(1, N')(1, i)(1, j)} F_4(q+N', -N', i+1, j+1, \mu^2, \nu^2).$$

N' est égal à $\frac{N-i-j}{2}$; F_4 est un polynôme hypergéométrique de deux variables, formé avec la fonction que M. Appell désigne par F_n et dont, ici, le développement est limité, puisque le second élément $-N'$ est un entier négatif.

Darboux. — Sur les lignes asymptotiques de la surface des ondes. (1039).

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque M d'une surface, p, q, r des quantités proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale et telles que l'on ait

$$px + qy + rz = 1.$$

soient enfin

$$p' = qz - ry, \quad q' = rx - pz, \quad r' = py - qx,$$

les équations des lignes asymptotiques et des lignes de courbure sont respectivement

$$dp\,dx + dq\,dy + dr\,dz = 0,$$
$$dp\,dp' + dq\,dq' + dr\,dr' = 0.$$

Supposons qu'on ait affaire à une surface des ondes. Le rayon qui joint le point M au centre O de la surface coupe celle-ci en un second point M'.

Soient $\overline{OM}^2 = \beta$, $\overline{OM'}^2 = \alpha'$; soient α et β' les carrés des distances du centre aux plans tangents aux points M et M'. Ces quatre variables seront liées par les deux relations contenues dans l'identité

$$x(x-\beta)(x-\beta') - (x-a)(x-b)(x-c) = \frac{abc}{\alpha\alpha'}(x-\alpha)(x-\alpha'),$$

qui doit avoir lieu, quel que soit x.

Dès lors les formules

$$x = C\left(\frac{a-\alpha}{\alpha}\right)^{m_1}\left(\frac{a-\alpha'}{\alpha'}\right)^{m_2}(a-\beta)^{n_1}(a-\beta')^{n_2},$$
$$y = C'\left(\frac{b-\alpha}{\alpha}\right)^{m_1}\left(\frac{b-\alpha'}{\alpha'}\right)^{m_2}(b-\beta)^{n_1}(b-\beta')^{n_2},$$
$$z = C''\left(\frac{c-\alpha}{\alpha}\right)^{m_1}\left(\frac{c-\alpha'}{\alpha'}\right)^{m_2}(c-\beta)^{n_1}(c-\beta')^{n_2},$$

pour des valeurs convenables des constantes C, m_1, m_2, n_1, n_2, représentent la surface des ondes. Pour toutes les surfaces représentées par de telles équations, l'équation différentielle des lignes asymptotiques sera

$$\frac{d\beta^2}{(\beta-a)(\beta-b)(\beta-c)} = \frac{d\beta'^2}{(\beta'-a)(\beta'-b)(\beta'-c)}.$$

On en déduit le théorème suivant : « Considérons chacun des complexes de Chasles, qui sont formés des droites coupant les trois plans coordonnés et le plan de l'infini en quatre points de rapport anharmonique constant. Le lieu des points de la surface où le cône du complexe est tangent à cette surface est une ligne asymptotique. Quand on fera varier la valeur du rapport anharmonique constant, on aura une infinité de complexes qui donneront toutes les lignes asymptotiques. » Les surfaces jouissant de la propriété exprimée par ce théorème sont, d'une part, les surfaces x de Lamé

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1,$$

de l'autre les surfaces satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$xyz(rt - s^2) + pq(z - px - qy) = 0.$$

Quant aux lignes de courbure de la surface des ondes, M. Darboux, après avoir signalé un important résultat relatif à la forme des lignes de courbures sur une surface quelconque, dans le voisinage d'un ombilic, résultat d'où l'on

peut tirer des conditions nécessaires pour que les lignes de courbure d'une surface soient algébriques, montre que ces conditions sont vérifiées pour la surface des ondes et que, au voisinage d'un ombilic, les lignes de courbure d'une telle surface sont semblables à des courbes algébriques du dixième ordre; la suite de ses recherches prouve toutefois que ces lignes de courbure ne peuvent être des courbes algébriques d'un degré déterminé. L'équation différentielle de ces lignes, déjà donnée par M. Combescure, est

$$f(\alpha)\,d\beta^2 + f(\beta)\,d\alpha^2 - d\alpha\,d\beta\left\{2f(\alpha) + (\beta-\alpha)\left[f'(\alpha) - \frac{f(\alpha)}{\alpha}\right]\right\} = 0,$$

en posant

$$f(\alpha) = (\alpha - a)(\alpha - b)(\alpha - c);$$

l'auteur montre que cette équation s'intégrerait si $f(\alpha)$ n'était que du second degré en α. Il en conclut que les lignes de courbure de la surface des ondes peuvent être regardées comme connues dans certains cas limites, en particulier dans le cas où cette surface est très voisine d'une sphère.

Humbert. — Sur les courbes de genre 1. (1042).

Voir plus haut.

Picard (*E.*). — Sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables par les substitutions d'un groupe discontinu. (1045).

Dans une Communication antérieure, M. Picard a considéré une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires entre les deux variables indépendantes ξ, η. Soit

$$\left(\xi, \eta, \frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''}\right)$$

une substitution d'un de ces groupes G. On peut obtenir des fonctions uniformes et continues des variables complexes ξ, η, $\Theta(\xi, \eta)$ définies dans le domaine S que détermine l'inégalité $\xi\xi_0 + \eta\eta_0 < 1$, où ξ_0, η_0 sont les conjuguées de ξ, η, et telles que la substitution précédente du groupe change $\Theta(\xi, \eta)$ en $(C\xi + C'\eta + C'')^{2m}\Theta(\xi, \eta)$, m étant un entier plus grand que 1. Au groupe G correspond dans S un domaine δ, tel qu'à tout point de S corresponde dans δ un point et un seul par une substitution du groupe. Le domaine δ a un ou plusieurs points communs avec la limite de S.

M. Picard étudie la forme de la fonction Θ dans le voisinage d'un tel point.

Dans la seconde Partie de sa Communication, il donne, pour tous les groupes discontinus de deux variables indépendantes, analogues à G, l'extension de la notion de *genre*, donnée par M. Poincaré pour les groupes fuchsiens; pour les groupes de M. Picard, cette notion comprend *trois* nombres.

Goursat. — Sur le genre d'une relation algébrique entre deux fonctions uniformes d'un point analytique (x, y). (1048).

Cette Communication est relative à un Mémoire de M. Picard, inséré dans le *Bulletin* (1883). M. Goursat remarque d'abord que le théorème de M. Picard

peut être généralisé dans les termes suivants : Étant données deux fonctions $u = P(z)$, $v = Q(z)$ uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel $z = a$, telles qu'elles n'aient pas une infinité d'autres points singuliers essentiels dans le voisinage de ce point, si ces fonctions sont liées par une relation algébrique, le genre de cette relation doit être 0 ou 1. Il s'occupe ensuite de ce problème : Étant données une relation algébrique $f(x, y) = 0$ de degré m et de genre p, deux fonctions uniformes u, v du point analytique (x, y) liées par une relation algébrique $F(u, v)$ de genre q, dans quel cas le nombre q peut-il être supérieur à p? Sous certaines restrictions, M. Goursat montre que le genre ne peut s'élever que si $p = 0$; il indique ensuite comment on pourra obtenir les expressions générales de deux fonctions uniformes du point analytique (x, y), ayant n points singuliers essentiels, et liées par la relation algébrique

$$F(u, v) = 0,$$

de genre 0 ou de genre 1.

Stéphanos (*C.*). — Sur un problème de la théorie de l'élimination. (1051).

Étant données trois formes binaires α, β, γ dont les ordres l, m, n ont pour somme un nombre impair $2p+1$ et sont, de plus, tels qu'aucune des différences

$$l' = p - l, \quad m' = p - m, \quad n' = p - n$$

ne soit négative, déterminer trois autres formes binaires L, M, N, dont les ordres soient respectivement égaux à l', m', n', de telle manière qu'on ait

$$L\alpha + M\beta + N\gamma = 0.$$

N° 21; 19 novembre.

De Saint-Venant et *Flamant*. — Des vitesses que prennent, dans l'intérieur d'un vase, les divers éléments d'un liquide pendant son écoulement par un orifice inférieur. (1105).

Cette Communication se rapporte à des séries doubles rencontrées par les auteurs dans leurs recherches et qui convergeraient, mais très lentement; M. Boussinesq leur a communiqué des expressions pour le reste de ces séries, obtenues au moyen de raisonnements très « hardis », mais qui se sont trouvées justifiées par les vérifications numériques des savants auteurs.

Liouville (*R.*). — Sur certaines transformations que peuvent subir les équations aux différences partielles du second ordre. (1122).

Bigourdan. — Observations de la comète Pons-Brooks, faites à l'observatoire de Paris. (1126).

Coggia. — Observation de la comète Pons-Brooks et de la planète (234), Barbara, faites à l'observatoire de Marseille. (1128).

Obrecht. — Observation photométrique d'une éclipse du premier satellite de Jupiter. (1129).

Radau. — Remarque sur une formule de M. Tisserand. (1130).

Boussinesq. — Sur la résistance d'un anneau à la flexion. (1131).

Darboux. — Sur les lignes de courbure de la surface des ondes. (1133).

Voir plus haut.

Humbert. — Sur les courbes de genre 1. (1136).

Brassinne. — Application d'une proposition de Mécanique à un problème relatif à la surface de la Terre. (1139).

N° 22; 26 novembre.

De Jonquières. — Considérations théoriques sur les flotteurs remorqués en divergence. (1175).

Bigourdan. — Observations des planètes (233) et (234), faites à l'observatoire de Paris. (1185).

Callandreau. — Sur une formule de M. Tisserand. (1187).

Si l'on fait

$$P^n(p\,z) = 4\,\Sigma\mu^i\nu^j A_{ij} \cos ix \cos jy$$

(*voir* le compte rendu de la Communication de M. Appell sur le même sujet), le coefficient A_{ij} considéré comme fonction de ν seulement vérifie une équation différentielle linéaire de troisième ordre.

Poincaré. — Sur l'intégration algébrique des équations linéaires. (1189).

Lorsqu'il y a, entre la variable et l'intégrale générale d'une équation linéaire à coefficients rationnels, une relation algébrique et que l'on forme, à l'aide de cette relation, des intégrales abéliennes de première espèce, les périodes de ces intégrales satisfont à certaines équations algébriques. M. Poincaré étudie ces relations dans un cas particulier, relatif à la résolvante de Gallois de l'équation modulaire que l'on rencontre dans la transformation du septième ordre des fonctions elliptiques; il rencontre, chemin faisant, un système d'intégrales abéliennes où il existe une infinité d'intégrales réductibles aux intégrales abéliennes. M. Picard avait déjà donné deux exemples de pareils systèmes.

N° 23; 3 décembre.

Faye. — Sur l'heure universelle proposée par la Conférence de Rome. (1234).

Resal. — Remarques relatives au problème dit des deux chaînes, proposé par M. Piarron de Mondésir. (1239).

Ce problème ne peut être résolu sans faire d'hypothèse sur le mouvement du système qu'on étudie. M. Resal retrouve la conclusion de M. de Mondésir, en partant d'une hypothèse différente.

Radau (*R.*). — Addition à une Note précédente sur une formule de M. Tisserand. (1275).

Les fonctions $P^{n,k}$ sont définies par l'équation

$$(1 - 2\theta z - \theta^2)^{-k} = \Sigma \theta^n P^{n,k},$$

où k est un nombre quelconque. Si l'on pose, avec M. Tisserand,

$$z = \mu \cos x + \nu \cos y, \quad \mu + \nu = 1,$$

on introduit de nouvelles fonctions $A_{i,j}^{n,k}$, définies par l'équation

$$P^{n,k} = \Sigma A_{i,j}^{n,k} \mu^i \nu^j \cos ix \cos jy.$$

M. Radau, dans une Note précédente (p. 1130), avait exprimé les coefficients $A_{i,j}^{n,k}$ au moyen des séries hypergéométriques à deux variables de M. Appell : les deux arguments étaient μ et ν. Ayant reconnu depuis qu'il est possible de les exprimer par des fonctions hypergéométriques de la seule variable ν, il donne sans démonstration ses nouveaux résultats.

Lindstedt (*A.*). — Sur la forme des expressions des distances mutuelles dans le problème des trois corps. (1276 et 1353).

Dans son célèbre *Essai sur le problème des trois corps*, Lagrange a fait dépendre les distances r, r', Δ de trois masses M, m, m' de l'intégration de quatre équations linéaires. Partant des formules de Lagrange, M. Lindstedt introduit, outre la quatrième inconnue qu'elles contiennent, trois nouvelles inconnues auxiliaires,

$$u = \frac{dr^2}{dt}, \quad u' = \frac{dr'^2}{dt}, \quad v = \frac{d\Delta^2}{dt}.$$

Il est ainsi ramené à effectuer trois quadratures et à intégrer quatre équations linéaires formant un système de huitième ordre. Les huit constantes provenant de cette dernière intégration se partagent en deux groupes de quatre, η, η', ζ, $\varkappa$ et π, π', ω, ω'. L'auteur se propose de développer ses sept inconnues suivant les puissances des constantes η, η', ζ, $\varkappa$, en se restreignant au cas (seul important)

où les excentricités des orbites de m et m' autour de M sont petites, et où le rapport $\frac{r}{r'}$ reste constamment supérieur ou constamment inférieur à l'unité.

A cet effet, il opère par approximations successives : chaque opération consiste alors à intégrer un système d'équations linéaires à coefficients constants. Mais, en appliquant sans les modifier les méthodes connues, on obtiendrait dans les intégrales des termes contenant en facteur des puissances du temps. Cet inconvénient n'étant plus inhérent à la nature du problème, on doit pouvoir l'éviter; et c'est ce que M. Lindstedt réussit à faire, grâce à un artifice dont il a déjà usé antérieurement. On introduit dans les deux membres des équations à intégrer des constantes indéterminées, en nombre convenable, et l'on peut ensuite choisir leurs valeurs de manière à faire disparaître des seconds membres les termes qui donneraient naissance aux termes affectés du temps.

L'auteur arrive à ce résultat remarquable que le nombre des arguments dans les intégrales demandées est de *quatre*. Il fait connaître, en outre, l'ordre de chaque terme de ses développements.

Supposant ensuite m et m' petits par rapport à M, il a pu s'assurer que des deux groupes de termes qui, dans le développement de r, par exemple, ont leurs arguments proportionnels au temps, les uns sont au moins du premier ordre, et les autres au moins du second ordre par rapport aux excentricités et à l'inclinaison mutuelle.

En terminant, il indique les deux relations qui lient les onze constantes d'intégration introduites dans son analyse et ajoute que ses résultats s'étendent au cas d'une loi quelconque d'attraction fonction de la distance. M. Lindstedt a démontré aussi que le nombre des arguments dans les expressions analytiques des distances mutuelles de n corps est égal à $(n-1)^2$.

De Jonquières. — Sur le ricochet des projectiles sphériques à la surface de l'eau. (1278).

Goursat (*E.*). — Sur la théorie des intégrales abéliennes. (1281).

L'auteur se propose d'obtenir l'expression analytique des intégrales abéliennes de seconde espèce dont un point de discontinuité est en même temps point de ramification. Les fonctions qu'il est conduit à prendre comme éléments essentiels de ces intégrales jouissent de propriétés qu'on déduit de leur expression au moyen des fonctions Θ. Elles jouent absolument le même rôle que les intégrales normales où le pôle est un point ordinaire, soit dans le théorème de Riemann-Roch, soit dans la théorie générale des fonctions uniformes d'un point analytique; en particulier, elles interviennent dans l'expression des fonctions rationnelles qui sont les dérivées des intégrales de première espèce.

Poincaré et *Picard.* — Sur un théorème de Riemann relatif aux fonctions de n variables indépendantes admettant $2n$ systèmes de périodes. (1284).

Ce théorème, que M. Hermite a énoncé, d'après Riemann, dans une Note faisant suite à la sixième édition du *Traité* de Lacroix, est le suivant : « Les $2n$ systèmes de périodes de *toute* fonction uniforme de n variables, $2n$ fois périodique, vérifient, tout au moins après une transformation convenable,

les $\frac{n(n-1)}{2}$ relations bien connues qui existent entre les périodes des fonctions analogues formées au moyen des fonctions Θ de n variables indépendantes. » Il n'a été jusqu'ici publié aucune démonstration de ce théorème. La Note de MM. Poincaré et Picard comble cette lacune. On y trouve, en outre, signalée cette conséquence importante de la proposition de Riemann : toute fonction $2n$ fois périodique de n variables indépendantes peut être exprimée au moyen des fonctions Θ.

Humbert. — Sur la courbe du quatrième degré à deux points doubles. (1287).

Les coordonnées des points d'une courbe S du quatrième degré, de genre 1, peuvent se mettre sous la forme

$$X_i = A_i P_1(t) + B_i P_2(t) + C_i P_3(t) + D_i P_4(t) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

en posant

$$P_{i+1}(t) = \theta_3\left(t + j\frac{\omega}{n}, \omega, \omega'\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{m^2 i\pi\frac{\omega'}{\omega} + 2mi\frac{\pi t}{\omega}} e^{mi\frac{\pi}{2}} \quad (j = 0, 1, 2, 3).$$

Les arguments t, $t+\omega$, $t+4\omega'$ donnent le même point de la courbe.

Appelons *points conjugués* dans un système σ deux points de la courbe S, dont les arguments ont pour somme σ, *systèmes principaux* les quatre systèmes $0, \frac{\omega}{2}, 2\omega', 2\omega'+\frac{\omega}{2}$; *systèmes semi-principaux* les douze systèmes obtenus en ajoutant à l'une des quantités $\frac{\omega}{4}, \omega', \omega'+\frac{\omega}{4}$ l'une des quantités $0, \frac{\omega}{2}, 2\omega', 2\omega'+\frac{\omega}{2}$. Les droites joignant deux points conjugués dans le système σ enveloppent une conique tangente à S en quatre points situés sur une conique passant par les deux points doubles. Les droites joignant deux points conjugués dans un des systèmes principaux passant par un point fixe qui sera dit un centre. A chaque système semi-principal correspond un point O, tel que les quatre conjugués dans ce système des points où S est coupée par une droite quelconque A, issue de O, sont sur une droite B, passant par O (O sera dit un semi-centre). Les droites A et B sont en involution. Le segment déterminé par deux points conjugués dans un système semi-principal est partagé harmoniquement par deux droites fixes, concourant au semi-centre correspondant. Les coordonnées des centres et semi-centres ne dépendent nullement de la quantité $q = e^{i\pi\frac{\omega'}{\omega}}$ qui figure dans les formules posées au début : par suite, toutes les courbes représentées par ces équations ont mêmes centres et semi-centres, si $A_i, \ldots, D_i$ ont toujours les mêmes valeurs, q étant quelconque. La même conclusion subsiste pour les courbes du quatrième degré représentées par les équations

$$X_i = \text{fonction rationnelle}\left[t, \sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}\right] \quad (i = 1, 2, 3),$$

où le module k varie d'une courbe à l'autre. La proposition inverse est également vraie.

Stephanos (*C.*). — Sur l'intégration d'une fonction rationnelle homogène. (1290).

L'auteur commence par résoudre les deux problèmes suivants :

1° Étant données deux formes binaires $\varphi = \varphi_x^{m_1+m-1}$ et $f = f_x^{m+1}$ (où $m_1 \geq m$), dont la seconde a son discriminant D différent de zéro, trouver l'expression générale des formes binaires $s = s_x^{m_1}$ et $t = t_x^{m_1-2}$ satisfaisant à la relation

$$D\varphi = (f, s)_1 + ft.$$

2° Étant données deux formes binaires φ et f, dont les ordres $m_1 + m - 1$ et $m + 1$ soient tels que

$$(m_1 + m - 1) \geq (m + 1)(n + 1) - 3,$$

trouver l'expression générale des formes S et T, d'ordres respectifs m_1 et $m_1 - (n + 1)$, satisfaisant à la relation

$$D^n\varphi = (f, S)_1 + f^n T,$$

où D désigne le discriminant f, supposé différent de zéro.

Ce dernier problème, une fois traité, permet d'obtenir la solution de cette question : étant données deux formes binaires φ et f, dont les ordres k et $m + 1$ sont tels que $k + 2 = (m + 1)(n + 1)$, et dont la seconde f n'admet que des facteurs linéaires simples, calculer directement la partie algébrique et la partie transcendante de l'intégrale

$$\int \frac{\varphi}{f^{n+1}}(x_1 dx_2 - x_2 dx_1),$$

sans recourir à la décomposition en fractions simples de $\frac{\varphi}{f^{n+1}}$.

On trouve

$$D^n \int \frac{\varphi}{f^{n+1}}(x_1 dx_2 - x_2 dx_1) = \frac{1}{(m+1)n^2}\frac{S}{f^n} + \int \frac{T}{f}(x_1 dx_2 - x_2 dx_1),$$

S et T étant deux covariants simultanés des formes φ et f que l'auteur enseigne à calculer.

N° 24; 10 décembre.

Sylvester (*J.*). — Sur les quantités formant un groupe de nonions analogues aux quaternions de Hamilton. (1336).

Bigourdan (*G.*). — Observations de la nouvelle planète (225) faites à l'Observatoire de Paris. (1351).

Henry (*MM.*). — Observations de la comète de Pons-Brooks faites à l'équatorial ouest du jardin. (1352).

Rayet (*G.*). — Observations du spectre de la comète Pons 1812-Brooks, faites à l'Observatoire de Bordeaux. (1352).

Lindstedt (*A.*). — Sur la forme des expressions des distances mutuelles dans le problème des trois corps. (1353).

André (*D.*). — Sur le nombre des permutations de n éléments qui présentent s séquences. (1356).

En désignant ce nombre par $P_{n,s}$, l'auteur établit la relation

$$P_{n,s} = sP_{n-1,s} + 2P_{n-1,s-1} + (n-s)P_{n-1,s-2},$$

qui, associée aux identités évidentes,

$$P_{n,1} = 2, \quad P_{n,2} = 2P_{n-1,2} + P_{n-1,1},$$

permet de calculer de proche en proche, d'une manière régulière les diverses valeurs de $P_{n,s}$. On est conduit à disposer les valeurs trouvées en un triangle, analogue à celui de Pascal, et dans lequel le nombre $P_{n,s}$ est à l'intersection de la colonne de rang s et de la ligne de rang $n-1$. On peut démontrer que le nombre des permutations de n éléments qui présentent s séquences est toujours pair, et que, parmi les permutations de n éléments ($n > 3$), il y a autant de permutations ayant un nombre pair de séquences que de permutations en ayant un nombre impair.

Stieltjes. — Sur un théorème de Liouville. (1358 et 1415).

Dans sa première Note, l'auteur indique trois théorèmes nouveaux, analogues au théorème de Liouville sur les nombres de classes de formes quadratiques. Dans sa seconde Note, il montre comment ce théorème se déduit du développement des intégrales elliptiques complètes de première et de seconde espèce, et il énonce trois autres propositions similaires.

Bonnet (*G.-Ossian.*). — Démonstration nouvelle de deux théorèmes de M. Bertrand. (1360).

Si d'un point A d'une surface donnée S on trace sur celle-ci des lignes géodésiques dans toutes les directions, et si l'on porte sur chacune de celles à partir de A un arc AM de longueur constante r, le lieu de M sera appelé circonférence géodésique, et la portion de surface qu'il enferme sera dite géodésique. En considérant r comme un infiniment petit principal, on a pour la circonférence et le cercle géodésiques les expressions suivantes :

$$C = 2\pi r - \frac{\pi r^3}{3R_0R_0'}, \quad A = \pi r^2 - \frac{\pi r^4}{12R_0R_0'},$$

où R_0 et R_0' désignent les rayons de courbure principaux de la surface C au point A.

N° 25; 17 décembre.

Fontaneau (*E.*). — Sur la détermination des forces élastiques. (1402).

Périgaud. — Observations de la comète Pons-Brooks, faites à l'Observatoire de Paris (1407).

Henry (*MM.*). — Observations de la planète (25) Carolina et de la comète Pons-Brooks, faites à l'Observatoire de Paris (1408).

Halphen. — Sur les multiplicateurs des équations différentielles linéaires (1408 et 1541).

Si, entre diverses solutions inconnues d'une même équation différentielle linéaire, il existe une relation connue, quel parti peut-on en tirer pour l'intégration? Telle est la question dont s'occupe l'auteur. Il examine le cas où cette relation est algébrique et donne pour valeur d'un polynôme entier et homogène par rapport aux solutions inconnues une fonction connue de la variable indépendante. Dans une première Note, M. Halphen démontre la proposition suivante : Si, en fonction de la variable indépendante, on connaît l'expression d'un polynôme à coefficients constants, homogène et du degré m par rapport aux solutions d'une équation différentielle linéaire, cette équation s'intègre complètement, pourvu que : 1° le polynôme ait une forme réduite déterminée contenant des variables effectives en nombre égal à l'ordre de l'équation; et que 2° entre les solutions, il n'existe aucune relation homogène, à coefficients constants, d'un degré égal à celui du polynôme.

Les applications se simplifient beaucoup quand on considère, au lieu des intégrales, les multiplicateurs qui les fournissent. L'auteur enseigne à calculer ces multiplicateurs; et, dans une seconde Note, il applique les principes précédents à l'intégration effective d'une équation du troisième ordre pour laquelle on connaît, en fonction de la variable indépendante, l'expression d'un polynôme homogène du troisième degré, composé avec les solutions inconnues. La méthode de M. Halphen fournit explicitement les solutions cherchées par des calculs algébriques.

Lipschitz. — Sur un point de la théorie des fonctions elliptiques. (1411).

De la formule bien connue de Jacobi (*Fundamenta*)

$$\vartheta_3^4(0) = 1 + 8\left(\frac{q}{1-q} + \frac{2q^2}{1+q^2} + \frac{3q^3}{1-q^3} + \frac{4q^4}{1+q^4} + \cdots\right),$$

qui conduit à la représentation d'un nombre quelconque par une somme de quatre carrés, l'auteur déduit les trois équations différentielles

$$\vartheta_3^4(0) = -4\frac{d\log}{d\log q}\left[\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_2(0)}\right],$$

$$\vartheta_0^4(0) = 4\frac{d\log}{d\log q}\left[\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}\right], \quad \vartheta_2^4(0) = 4\frac{d\log}{d\log q}\left[\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_0(0)}\right].$$

obtenues par Jacobi dans un Mémoire inséré au *Journal de Crelle*, t. 36, p. 97.

A la suite de la Note de M. Lipschitz, se trouvent quelques lignes dans lesquelles M. Hermite montre que ces trois équations différentielles résultent aussi

de la formule fondamentale

$$\int_0^x k^2 \sin^2 x \, dx = \frac{Jx}{K} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},$$

due également à Jacobi.

Stieltjes. — Sur un théorème de M. Liouville. (1415).

Poincaré (H.). — Sur les équations algébriques. (1418).

Démonstration de ce théorème :

Si $F(x) = 0$ *est une equation algébrique admettant p racines positives, on peut toujours trouver un polynôme* $\Phi(x)$, *tel que le produit* $F(x)$, $\Phi(x)$ *n'ait que p variations.*

Appell. — Décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques de troisième espèce. (1419).

Les fonctions que M. Hermite a appelées *fonctions doublement périodiques* de troisième espèce sont définies par deux relations qu'on peut mettre sous la forme

$$F(x + 2K) = F(x), \quad F(x + 2iK') = e^{-\frac{mi\pi x}{K}} F(x),$$

m désignant un entier positif ou négatif, mais différent de zéro.

M. Appell suppose que la fonction $F(x)$ n'a d'autres points singuliers à distance finie que des pôles du premier ordre; et il exprime $F(x)$ par une somme d'éléments simples n'ayant chacun qu'un seul pôle dans un parallélogramme des périodes $2K$, $2iK'$, plus une partie entière s'il y a lieu. D'ailleurs, ses méthodes s'appliquent encore quand la fonction $F(x)$ admet des pôles d'ordre quelconque ou des points essentiels isolés.

Soit d'abord $m > 0$: l'élément de décomposition choisi est la fonction

$$\psi_m(x, \alpha) = e^{mi\pi \frac{x-\alpha}{2K}} \frac{H'(0)}{H(x-\alpha)} \frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\ldots H(x-a_{m+1})}{H(\alpha-a_1)H(x-\alpha_2)\ldots H(\alpha-\alpha_{m+1})},$$

où les lettres $a_1, a_2, \ldots, a_m$ désignent des constantes arbitraires, et a_{m+1} est définie par la relation

$$a_{m+1} = \alpha + mK - (a_1 + a_2 + \ldots + a_m).$$

La décomposition cherchée est fournie par la formule

$$F(x) = R_1\psi_m(x, \alpha_1) + R_2\psi_m(x, \alpha_2) + \ldots + R_p\psi_m(x, \alpha_p) + G(x),$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont les p pôles simples de $F(x)$ dans un parallélogramme des périodes, et $R_1, R_2, \ldots, R_p$ les résidus correspondants. Enfin, $G(x)$ est une *fonction entière* vérifiant les équations qui définissent $F(x)$: elle est composée linéairement à l'aide de m fonctions entières connues.

Pour m négatif, l'auteur s'en tient au cas où $m = -1$. Il convient alors de

prendre pour élément de décomposition la fonction

$$\chi(x, \alpha) = \frac{\pi i}{2K} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{\frac{i\pi(x-\alpha)}{K}} + q^{2n}}{e^{\frac{i\pi(x-\alpha)}{K}} - q^{2n}} e^{\frac{ni\pi\alpha}{K}} q^{n(n-1)} \quad \left(q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}\right).$$

Soient dans un parallélogramme des périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ les pôles supposés simples de la fonction $F(x)$, et $R_1, R_2, \ldots, R_p$ les résidus correspondants. La formule de décomposition est

$$F(x) = R_1\chi(x, \alpha_1) + R_2\chi(x, \alpha_2) + \ldots + R_p\chi(x, \alpha_p).$$

Bonnet (*G.-Ossian*). — Démonstration des propriétés fondamentales du système de coordonnées polaires géodésiques. (1424).

Démonstration de ces deux théorèmes de Gauss :

1° Les deux systèmes de lignes coordonnées se coupent partout à angles droit.

2° Si l'on désigne par c l'axe de la circonférence géodésique de rayon r, compris entre la ligne géodésique initiale $\omega = 0$ à la ligne geodésique quelconque qui coupe la première sous l'angle ω, on a

$$\frac{\partial^3 c}{\partial r^2 \partial \omega} = -\frac{1}{RR'}\frac{\partial c}{\partial \omega},$$

R et R′ étant les rayons de courbure principaux de la surface au point pris pour origine des coordonnées.

D'Ocagne (*M.*). — Sur un mode de génération des ovales de Descartes, proposé par Chasles. (1424).

Une transformation indiquée par Chasles pour obtenir les ovales de Descartes donne seulement des limaçons de Pascal. La remarque est juste, mais M. Cayley l'avait déjà publiée en 1850 dans le *Journal de Liouville*. M. Genocchi est revenu sur ce sujet dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (année 1855, p. 206).

N° 26; 24 décembre.

Trépied et *Rambaud*. — Observations de la comète Pons-Brooks, faites à l'observatoire d'Alger. (1466).

Périgaud. — Observations de la comète Pons-Brooks, faites à l'observatoire de Paris. (1468).

Gonnessiat. — Observations de la comète Pons-Brooks, faites à l'observatoire de Lyon. (1469).

Backlund (*O.*). — Sur un développement particulier de la fonction perturbatrice. (1470).

Poincaré (*H.*). — Sur les séries trigonométriques. (1471).

Dans cette Note, l'auteur applique une proposition qu'il a antérieurement démontrée à l'étude des développements en série par lesquels M. Lindstedt a récemment exprimé les distances mutuelles dans le problème des trois corps. Il fait voir : 1° que si les séries de M. Lindstedt convergent pendant un intervalle de temps, si petit qu'il soit, elles convergeront toujours; 2° qu'il n'est pas sûr qu'on puisse choisir les constantes de telle façon que les séries convergent; 3° que les séries, même lorsqu'elles ne convergent pas, peuvent donner une solution du problème avec une approximation indéfinie.

J.-S. et *M.-N. Vaněček*. — Sur la génération des surfaces. (1473 et 1548).

Gouy. — Sur la vitesse de propagation de la lumière, en réponse à une Note de lord Rayleigh. (1476).

N° 27; 31 décembre.

Perrotin. — Observations de la comète Pons-Brooks, faites à l'observatoire de Nice. (1539).

Trépied (*Ch.*). — Étude spectroscopique de la comète Pons-Brooks, faite à l'observatoire d'Alger. (1540).

Halphen. — Sur les multiplicateurs des équations différentielles linéaires. (1541).

Maximovitch (*W.*). — Sur un moyen de déterminer le facteur d'intégrabilité. (1544).

Le premier membre d'une équation différentielle étant décomposé en deux parties distinctes

$$(M_1\,dx + N_1\,dy) + (M_2\,dx + N_2\,dy) = 0, \quad M_1N_2 - M_2N_1 \gtrless 0,$$

la condition nécessaire et suffisante pour qu'elles admettent un facteur d'intégrabilité commun est que $P\,dx + G\,dy$ soit une différentielle exacte, en posant

$$P = \frac{M_1R_2 - M_2R_1}{M_1N_2 - M_2N_1}, \quad Q = \frac{N_1R_2 - N_2R_1}{M_1N_2 - M_2N_1},$$

$$R_1 = \frac{\partial M_1}{\partial y} - \frac{\partial N_1}{\partial x}, \quad R_2 = \frac{\partial M_2}{\partial y} - \frac{\partial N_2}{\partial x}.$$

Le facteur d'intégrabilité est alors $\mu = e^{\int P(dx + Q\,dy)}$.

Stieltjes. — Sur le nombre de décompositions d'un entier en cinq carrés. (1545).

Soient $\varphi(n)$ la somme des diviseurs impairs de n; $F(n)$ le nombre total des décompositions de n en cinq carrés. Si l'on pose

$$A(n) = \varphi(n) + 2\varphi(n-4) + 2\varphi(n-16) + 2\varphi(n-36 + \ldots,$$
$$B(n) = \varphi(n-1) + \varphi(n-9) + \varphi(n-25) + \varphi(n-49) + \ldots,$$

on a

$$F(n) = 24\,A(n) + 16\,B(n) \qquad (n \text{ pair}),$$
$$F(n) = 8\,A(n) + 48\,B(n) \qquad (n \text{ impair}).$$

En faisant usage de la relation suivante :

$$q + 4q^4 + 9q^9 + 16q^{16} + \ldots = (1 + 2q + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots) \times \left[\frac{q}{(1+q)^2} + \frac{q^3}{(1+q^3)^2} + \frac{q^5}{(1+q^5)^2} + \cdots\right],$$

qui lui a été communiquée par M. Hermite, l'auteur montre que l'on peut toujours exprimer les deux fonctions $A(n)$ et $B(n)$ l'une par l'autre. Il prouve aussi qu'on peut dans tous les cas exprimer $F(4n)$ au moyen de $F(n)$. En terminant, il signale deux résultats d'induction, traduits par les formules

$$B(p^2) = \frac{p^3 - p + 1}{24}, \quad B(p^4) = \frac{p(p^2-1)(p^3+1)+1}{24},$$

d'où se déduiraient les relations

$$F(p^2) = 10(p^3 - p + 1), \quad F(p^3) = 10[p(p^2-1)(p^3+1)+1].$$

Radau. — Remarque au sujet d'une Note de M. Backlund, sur un développement de la fonction perturbatrice. (1548).

J.-S. et *M.-N. Vaněček.* — Sur la génération des surfaces. (1548).

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK. — Historisch-Literarische Abtheilung.

20e année, 1875.

Günther (*S.*). — Contribution à l'histoire des Mathématiques allemandes au XVe siècle. (1-14).

Steinschneider. — Pseudo-Trithemius et Camillo Leonardi. (25-27).

Curtze. — Remarques sur le précédent travail de Günther. (57-60).

Curtze. — Copernic a-t-il supprimé, oui ou non, la Préface de son Ouvrage *de Revolutionibus?*

Günther. — Supplément à son travail et remarques sur la précédente Note de Curtze. (113-120).

Nöther. — Article nécrologique sur Otto Hesse. (77-88).

Cantor. — Article nécrologique sur Gottfried Friedlein. (109-113).

Année 1876.

Zech. — Article nécrologique sur C.-G. Reuschle. (1-4).

Günther. — Mélanges d'histoire des Mathématiques : 1° les progressions géométriques chez les Arabes; 2° les carrés magiques chez Gauss. (57-64).

Hipler. — La chorographie de Joachim Rheticus. (125-150).

Günther. — Adolphe Zeising comme mathématicien. (157-165).

Année 1877.

Cantor. — Études gréco-indiennes. (1-24).

Weber (*H.*). — Pour l'histoire du problème de la propagation des ondes planes d'une amplitude finie. (71).

Korteweg. — Sur les recherches d'Arwed Walter sur la mécanique moléculaire. (93-106).

Hultsch (*F.*). — Sur la sphère céleste d'Archimède. (106-107).

Supplément.

Treutlein. — Le calcul au XVIe siècle. (1-100).

Schiaparelli. — Les sphères homocentriques d'Eudoxe, de Callippe et d'Aristote. (Trad. W. Horn). (101).

Année 1878.

Cantor. — La correspondance de Lagrange et d'Euler. (1-21).

Zetzsche. — Sur la part de Petřina au perfectionnement du télégraphe. (37-45).

Junghans (*F.*). — Article nécrologique sur Hermann Grassmann. (69-75).

Heiberg (*J.-L.*). — Sur un passage de Pappus. (117-120).

Lorsch (*Ad.*). — Sur un problème de maximum. (120).

Année 1879.

Wohlwill (*E.*). — L'original textuel du jugement pontifical contre Galilée. (1-26).

Hultsch (*F.*). — Contribution à la terminologie des mathématiciens grecs. (41-42).

Bretschneider (*Alfred*). — Charles-Antoine Bretschneider : Souvenir pour ses amis et élèves. (73-91).

Wiedemann (*Eilhard*). — Contribution à l'histoire d'Aboul-Wefa. (121-122).

Rölhig (*O.*). — Sur l'expérience du pendule de Foucault. (153-159).

Heiberg. — Quelques propositions élémentaires supposées par Archimède. (177-182).

Cantor. — Trois lettres de Lagrange. (182-184).

Supplément.

Treutlein. — La *Coss* allemande. (1-124).

Treutlein. — Le Traité de Jordanus Nemorarius : *De numeris datis.* (125-166).

Weissenborn. — Le trapèze dans Euclide, Héron, Brahmegupta. (167-184).

Weissenborn. — La question de Boèce. (185-241).

Année 1880.

Wernicke. — La découverte de la vitesse finie de la lumière, par Olaf Roemer. (1-10).

Heiberg. — Les connaissances d'Archimède sur les sections coniques. (41-67)

Krumbiegel (*B.*) et *Amthor* (*A.*). — Le problème des bœufs d'Archimède. (121-136, 153-171).

Wohlwill (*E.*). — Éclaircissement et défense (de son précédent travail sur Galilée). (185-190).

Supplément.

Schapira (*Herm.*). — Manuscrit hébreu publié et traduit. (1-54).

Steinschneider. — Abraham ibn Ezra. (55-128).

Henry (*Charles*). — Prologus N. O'Creati in Helceph. (129-139).

Weissenborn (*H.*). — La traduction d'Euclide d'après l'arabe, par Adelhard de Bath. (141-166).

Peiper (*R.*). — Fortolfi Rhytmimachia. (167-227).

Sachse (*Arnold*). — Essai d'une histoire de la représentation de fonctions arbitraires d'une variable par des séries trigonométriques. (227-226).

Année 1881.

Isenkrahe (*C.*). — Théorie d'Euler sur la cause de la gravitation. (1-19).

Günther (*S.*). — La correspondance de Gauss et de Sophie Germain. (19-25).

Mathiessen (*L.*). — La méthode Tà jàn. (33-38).

Hultsch (*F.*). — Mélanges. (38-39).

Lehmann. — Une résolution algébrique du cas irréductible de l'équation du troisième degré. (39-42).

Heilermann. — Remarques sur les approximations d'Archimède pour les racines carrées irrationnelles. (121-126).

Favaro (*A.*). — Justus Bellavitis. (153-169).

Année 1882.

Forti (*Angelo*). — Essai d'une nouvelle Table de fonctions hyperboliques. (1-11).

Hultsch (*Frédéric*). — Le nombre géométrique dans le huitième Livre de la *République* de Platon. (41-60).

M. Hultsch reprend la question du nombre géométrique de Platon. Depuis longtemps ce nombre mystérieux, qui, d'après le philosophe grec, devait présider aux mariages et dont il parle en un langage plein de réticences, hante l'imagination des mathématiciens. Les derniers travaux sont de MM. Tannery et Dupuis, et c'est sur les résultats obtenus par les deux savants français que M. Hultsch cherche à édifier son hypothèse. Il s'accorde parfaitement avec M. Dupuis sur l'interprétation du commencement du passage en question. Comme lui, il pense que le facteur indiqué serait $2^3.3^3 = 216$. Mais M. Dupuis s'était contenté de multiplier ce nombre par 100; M. Hultsch pense que le nombre final deviendrait ainsi trop petit et qu'il ne satisferait pas aux conditions mentionnées dans le texte. En suivant pas à pas l'auteur grec et en cherchant à élucider chacune de ses expressions, M. Hultsch arrive au nombre $36^2.100^2 = 3600^2 = 12960000$.

(Cette interprétation, M. Dupuis ne l'a pas admise : il a abandonné toutefois sa première hypothèse; dans sa seconde interprétation, il donne le nombre 760000).

Suter (*Henry*). — Un écrit inconnu jusqu'ici de Nicolas Oresme. (121-125).

Le manuscrit est assez volumineux (175 feuillets); écrit en 1459 par une main inconnue, il est très difficile à lire à cause des abréviations. C'est un Commentaire de la Météorologie d'Aristote, divisé en demandes et réponses, ces dernières appuyées par des arguments d'un caractère presque exclusivement scolastique. Ce nouveau Traité n'ajoutera rien à la gloire de l'auteur de l'*Algorismus proportionum*. Dans la forme de ses preuves et de ses conclusions, Oresme suit entièrement Duns-Scot. Beaucoup de questions lui sont même empruntées. M. Suter en donne quelques-unes ainsi que deux arguments propres à caractériser la manière des auteurs. Dans le troisième Livre, on trouve une question de haut intérêt : il s'agit du mouvement de la Terre. Oresme connaissait les opinions pythagoriciennes; il reste cependant parfaitement soumis aux idées d'Aristote. La dix-huitième question du premier Livre traite des comètes; Oresme y expose, d'après Aristote, Pline, Ptolémée et d'autres, que les comètes prédisent des orages, des tremblements de terre, des inondations, des maladies, des guerres, etc. Ceci pourrait étonner de la part d'un adversaire

aussi prononcé de l'Astrologie que l'était Oresme, et cette contradiction pourrait inspirer des doutes à l'égard de l'authenticité du Traité. M. Suter fait remarquer que l'Astrologie du moyen âge était divisée en deux parties : l'Astrologie positive, qui tirait des phénomènes astronomiques des conclusions sur des phénomènes naturels (orages), et l'Astrologie judiciaire qui essayait de lire le sort de l'homme dans le mouvement des astres. C'est cette dernière Astrologie qu'Oresme a combattue. Aussi essaye-t-il de prouver que les maladies, les guerres, etc., proviennent des comètes par l'enchaînement des causes naturelles.

Noether. — Remarques sur un petit écrit de F. Klein touchant la *Théorie des fonctions algébriques* de Riemann (201-207).

Mahler (*Édouard*). — Sur un point d'histoire des Mathématiques. (207-210).

M. Cantor ayant appelé l'attention des savants sur les connaissances mathématiques contenues dans le Talmud, M. Édouard Malher cherche à combler cette lacune dans une certaine limite. Le premier résultat de ses recherches a été la confirmation complète de l'opinion de M. Cantor quant à l'origine orientale de la valeur $\pi = 3$. Cette valeur semble avoir été universellement acceptée par les talmudistes. Ils paraissent admettre, en outre, que les rapports de l'aire du carré circonscrit à l'aire du cercle et l'aire du carré inscrit sont $\frac{4}{3}$ et $\frac{2}{1}$. Ce sont les Baleh Tosfeth, commentateurs du Talmud, du XIIe au XIVe siècle après J.-C., qui semblent avoir les premiers nettement distingué les aires d'avec la mesure des lignes déterminantes. Les Baleh Tosfeth essayent aussi de donner une preuve du rapport précédemment cité entre l'aire du cercle et celle du carré circonscrit. Cette démonstration consiste à supposer le cercle d'une palme de diamètre décomposé en une infinité de zones concentriques que l'on rectifie et additionne. On a ainsi un triangle équilatéral, dont la base est égale à 3 palmes et la hauteur à une demi-palme. Ce triangle étant coupé à la moitié de la base, les deux moitiés composent un rectangle d'une base égale à $1\frac{1}{2}$ palme et d'une hauteur d'une demi-palme. Enfin ce rectangle est décomposé en trois carrés d'une demi-palme. M. Mahler voit dans cette décomposition du cercle un commencement de Calcul intégral ; c'est beaucoup dire. On trouve encore dans le Talmud la valeur de $\frac{7}{5}$ pour $\sqrt{2}$; le passage qui la contient provient du IIe siècle après J.-C. Les Baleh Tosfeth font remarquer que cette valeur n'est pas exacte.

Supplément.

Günther (*S.*). — Les racines carrées irrationnelles des anciens et leurs méthodes de développement.

Le but de l'auteur n'est pas d'augmenter le nombre considérable des hypothèses auxquelles ce problème a donné lieu ; il se propose de présenter au lecteur toutes les méthodes indiquées jusqu'ici, de les examiner, d'en faire ressortir le principe et de nous mettre ainsi en état de choisir le procédé le plus naturel et le plus probable.

Le travail est divisé en trois Chapitres. Dans le premier, M. Günther expose tout ce que l'antiquité nous a laissé sur les racines carrées irrationnelles ou, plus justement, incommensurables. Il suppose, comme M. Cantor, que la première irrationnelle découverte fut $\sqrt{2}$, et que cette découverte est de Pythagore. Théodore de Cyrène prouva ensuite l'irrationnalité de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ et $\sqrt{17}$. En général, les Grecs se sont appliqués beaucoup moins à rechercher la valeur de ces nombres qu'à les éviter; les méthodes de Pythagore et de Platon pour la solution de l'équation $x^2+y^2=z^2$ en nombres entiers en font foi. Cependant un passage de Platon, malheureusement très corrompu, paraît prouver qu'il connaissait pour la $\sqrt{2}$ la valeur approximative $\frac{7}{5}$. Euclide, dans son dixième Livre, un des plus admirables des *Éléments*, donne une théorie de l'irrationnel qu'il traite, bien entendu, tout à fait géométriquement. Ses recherches ont été, à ce qu'il paraît, continuées par Apollonius de Perge; mais le travail de ce dernier est perdu et l'essai de restitution fait par Woepcke n'offre pas de résultats sûrs. C'est Archimède qui, le premier, fait entrer des valeurs approximatives de racines carrées dans ses calculs. Elles lui étaient indispensables, car il employait, pour mesurer la circonférence, la méthode des périmètres des polygones inscrits et circonscrits. Archimède cite huit racines irrationnelles. Pour l'une d'elles, il donne même deux valeurs :

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}.$$

La $\sqrt{2}$ ne se trouve pas dans Archimède. Aristarque de Samos, dans la septième proposition du Livre *Sur les grandeurs et les distances du Soleil et de la Lune*, lui assigne la valeur $\frac{7}{5}$.

Différant ici encore de tous ses compatriotes, Héron d'Alexandrie emploie beaucoup les racines irrationnelles; on en trouve plus de trente chez lui; elles ne l'embarrassent nullement. Il est très probable qu'il était en possession d'une méthode qui lui permettait de les extraire très rapidement; c'est M. Paul Tannery qui, le premier, l'a prouvé en faisant remarquer que, voulant transformer la formule pour l'aire F d'un segment de cercle en fonction de la corde s et de la flèche h,

$$(1) \qquad F = \frac{(s+h)h}{2} + \frac{1}{14}\frac{s^2}{4}$$

en une formule pour l'arc b du segment en fonction des mêmes variables, Héron pose

$$(2) \qquad b = \frac{h}{4} + \sqrt{s^2 + \tfrac{1}{4}h^2},$$

ou bien

$$(3) \qquad b = \sqrt{s^2 + \tfrac{1}{4}h^2} + \frac{h}{s}\left(\sqrt{s^2 + \tfrac{1}{4}h^2} - s\right),$$

et non

$$(4) \qquad b = s + h + \frac{h\left(1 - \frac{5}{28}\frac{s^2}{h^2}\right)}{1 + \frac{1}{7}\frac{s^2}{h^2}},$$

qui présente cependant une approximation satisfaisante. Les formules (2)

et (3) devaient donc être pour les Grecs, comme elles le sont pour nous, plus rapides à calculer que la formule (4). L'auteur divise, d'après M. Tannery, les racines de Héron en deux groupes, le groupe géométrique et le groupe trigonométrique, chacun d'eux en plusieurs classes. Quelques-unes de ces expressions sont d'une exactitude remarquable. Cependant on en trouve aussi d'erronées, ce qui s'accorde d'ailleurs avec le caractère général du Livre de Héron.

Les écrits de Ptolémée nous fournissent peu de chose. On y trouve, il est vrai, nombre de racines irrationnelles. Mais ces valeurs ont été trouvées par une méthode toute différente de celle d'Archimède et de Héron, quelle qu'elle soit. C'est un astronome du IVe siècle après J.-C., Théon d'Alexandrie, qui nous a renseigné complètement sur la méthode des astronomes. Elle était fondée sur l'emploi des fractions sexagésimales : on y appliquait la formule d'Euclide

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

et l'on calculait à peu près comme nous le faisons.

Les écrits byzantins ne fournissent pas d'indications nouvelles. La plupart se contentent de rapporter simplement la méthode de Théon d'Alexandrie. Maxime Planude donne comme nouvelle une méthode qui en diffère très peu.

Les mathématiciens romains copient presque tous Héron. C'est ainsi que nous retrouvons dans Columelle, Frontin, Hygin, etc., les valeurs que nous connaissons déjà.

M. Günther recherche aussi les indications que nous fournissent sur les racines irrationnelles les œuvres de Gerbert, des rabbins juifs, des Hindous et des Arabes, et il consacre quelques mots aux expressions numériques que présentent les proportions des édifices grecs; c'est aux recherches de M. Hultsch que nous devons la plupart de ces dernières données; malheureusement, ce champ d'études si intéressant n'offre que peu de résultats certains.

Avant de passer à l'examen des hypothèses, l'auteur mentionne l'opinion émise par Nesselmann et Friedlein, d'après lesquels les racines en question auraient été trouvées par tâtonnements. Il va sans dire qu'il la rejette complètement. Nous avons d'ailleurs rapporté plus haut la preuve que M. Tannery a donnée de l'existence d'un procédé chez Héron. En dehors de cette hypothèse purement négative, M. Günther compte quatorze procédés différents. Il les divise en deux groupes. Le premier embrasse tous les procédés qui ont pour fondement les fractions continues. C'est à ce groupe qu'appartient l'hypothèse la plus ancienne; elle a été proposée en 1723 par de Lagny. L'auteur la trouve élégante et expéditive. Mais elle n'est qu'une application de la formule de formation des réduites d'une fraction continue. La méthode de Mollweide, pour trouver la valeur d'Archimède

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153},$$

n'emploie que des transformations connues des Grecs; mais ces transformations ne pouvaient être exécutées que par quelqu'un qui connaissait parfaitement d'avance le résultat à obtenir. D'ailleurs cette méthode repose au fond sur des fractions continues, malgré son extérieur géométrique. Un autre reproche lui a été adressé par Gauss : le procédé de Mollweide donne les valeurs

$$\frac{2}{1} > \frac{7}{4} > \frac{26}{15} > \frac{97}{56} > \frac{362}{209} > \frac{1351}{780}$$
$$> \sqrt{3} > \frac{989}{571} > \frac{265}{153} > \frac{71}{41} > \frac{19}{11} > \frac{5}{3} > \frac{1}{1}.$$

En supposant qu'Archimède ait pris cette voie, pourquoi a-t-il choisi deux valeurs qui ne se suivent pas? C'est là une grosse difficulté qu'aucun des procédés proposés jusqu'ici n'a pu résoudre définitivement.

Les deux méthodes citées ne s'attaquent qu'à la $\sqrt{3}$. Hauber, au contraire, a tâché d'atteindre, avec la sienne, toutes les irrationnelles d'Archimède. M. Günther prouve que cette méthode est absolument identique aux fractions continues de Lagrange.

Buzengeiger a proposé deux méthodes. La première consiste dans le développement d'une construction géométrique prise dans le *Commentaire d'Archimède*, de Commandin; elle est encore le déguisement d'une fraction continue. La deuxième, qui se déduit de la première, se distingue par une convergence très rapide; elle est la seule qui mène immédiatement aux nombres d'Archimède donnant comme valeurs approchées $\frac{26}{15}$ et $\frac{1351}{780}$. Cependant il faut alors supposer que le nombre $\frac{265}{153}$ a été trouvé autrement. D'ailleurs, l'invention de cette méthode n'appartient pas à Buzengeiger. Elle avait été employée par Luca Pacioli, Ghaligai, Francesco di Lazisio, Cardan, Tartaglia et Unicorno. Elle a été remise en lumière par M. Joseph Bertrand.

M. Oppermann et M. Alexéief ont proposé successivement des méthodes très approchées, fondées sur ce théorème, que la moyenne géométrique de deux quantités a et b $(\sqrt{ab})$ est moyenne proportionnelle entre la moyenne arithmétique $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et la moyenne harmonique $\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$. M. Charles Henry a proposé ensuite des modifications à cette méthode qu'il a appuyée sur des considérations géométriques et rapprochée de la méthode d'interpolation des parties proportionnelles appliquée par Hipparque. M. Günther ne croit pas néanmoins qu'elle soit celle d'Archimède; elle revient d'ailleurs encore aux fractions continues.

M. Paul Tannery a, d'après l'auteur, le mieux creusé la question. Archimède, suivant l'opinion du savant français, connaissait un mode d'extraction reposant sur les relations

$$\sqrt{a^2+b} \backsim a + \frac{b}{2a}, \quad \sqrt{a^2+b} \backsim a + \frac{b}{2a+1},$$

dans lesquelles $\backsim$ signifie *à peu près égal*. Très souvent il se contentait des valeurs assez peu approchées qu'il obtenait; dans le cas de la $\sqrt{3}$, il a employé cette méthode seulement pour avoir une première solution des équations

$$p^2 - 3q^2 = 1, \quad p^2 - 3q^2 = -2;$$

puis, à l'aide d'une méthode indépendante, il a trouvé un nombre indéfini d'autres solutions. Quelle était cette méthode? M. Tannery a proposé deux hypothèses. La première, qui affirmerait une ressemblance avec la méthode des Hindous, exposée par Hankel, est rejetée par M. Günther. Dans la seconde, M. Tannery s'est efforcé de reconstituer par analogie le chemin qu'aurait probablement suivi Diophante en voulant résoudre l'équation $p^2 - aq^2 = 1$. Nous ne développerons pas cette méthode, d'ailleurs simple, qui séduit M. Günther. M. Zeuthen avait proposé quelque chose d'analogue pour la $\sqrt{3}$. Nous passons sous silence son procédé, ainsi que celui de M. Heilermann, que l'auteur juge plein d'esprit, mais en somme peu conforme aux habitudes grecques. La ma-

nière de M. Hultsch a été imaginée dans un tout autre but, pour développer la $\sqrt{5}$, dont il avait cru trouver les valeurs approximatives en des proportions architecturales.

Dans son troisième Chapitre, M. Günther traite de la résolution des racines carrées par le développement en séries des fractions. Une méthode imaginée par M. Éd. Lucas, d'ailleurs très rapide, ne peut pas un seul instant être supposée conforme à celle des anciens. Elle repose, en effet, sur le binôme entièrement inconnu aux Grecs.

La méthode de M. Radicke est entièrement nouvelle, en ce qu'elle est publiée ici pour la première fois. Elle est assez simple; malheureusement elle ne s'accorde qu'en partie avec les valeurs rencontrées chez les auteurs grecs. La même observation s'applique à un procédé de même genre, proposé par M. von Pessl.

M. Rodet a proposé, pour expliquer les valeurs approchées que l'on trouve dans les Livres religieux des Hindous et dans Archimède, deux méthodes : elles sont remarquables, mais trop laborieuses. Celle par laquelle il retrouve $\frac{1351}{780}$ d'Archimède est empruntée à un géomètre français du XVIe siècle; elle repose sur ce principe : « Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ désignent deux fractions à termes positifs, la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ est comprise entre les deux. » M. Günther la passe sous silence. L'autre repose sur ce principe : « Si l'on désigne par a la racine à une unité près, par r le reste de l'opération, par ε le complément de la racine, on a

$$r = (2a + \varepsilon)\varepsilon \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \frac{r}{2a + \varepsilon},$$

et comme toujours $\varepsilon < 1$, on aura une approximation par défaut de sa valeur en le remplaçant par 1 au dénominateur de la fraction, c'est-à-dire en posant

$$\varepsilon_1 = \frac{r}{2a + 1}. \text{ »}$$

Conclusions. — 1° Pour obtenir les racines carrées irrationnelles, les anciens partaient toujours de la relation $\sqrt{a^2 \pm b} \backsim a \pm \frac{b}{2a}$, et ils amélioraient la valeur obtenue d'une manière presque empirique. Héron a toujours procédé ainsi, et Archimède, au moins quand il avait de très grands nombres.

2° En possession d'une première approximation plus ou moins satisfaisante, ils en obtenaient de meilleures par des considérations analogues à celles que nous employons pour la résolution de l'équation de Pell : témoin Archimède dans sa détermination de la $\sqrt{3}$ et Théon de Smyrne.

3° Un procédé de fractions continues, analogue à l'algorithme moderne, n'a pas existé dans l'antiquité; on ignorait aussi toute résolution consciente d'une racine carrée en une série de fractions, excepté toutefois le schéma

$$\sqrt{A} = \backsim a + b.60^{-1} + c.60^{-2}\ldots$$

familier aux astronomes.

4° Au commencement du moyen âge, au contraire, les trois ou quatre pre-

mières réduites de la fraction continue

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ldots}}$$

paraissent avoir été connues des Hindous, des Arabes, des Juifs et, par leur intermédiaire, des Occidentaux, bien entendu sans que la vraie nature de la fraction continue ait été reconnue. Chez les Hindous et les Arabes, on rencontre aussi des traces de l'équation

$$\sqrt{A} \backsim a + b.10^{-1} + c.10^{-2} + \ldots.$$

Il est probable qu'on a entrepris aussi au moyen âge des interpolations entre chaque terme de cette série.

Winterberg. — Le Traité de Franco, de Liège, sur la quadrature du cercle.

Le manuscrit provient du Vatican; son auteur a été peu remarqué jusqu'ici par les historiens. Le manuscrit paraît être du XIIe siècle; aussi est-il très pauvre en bonnes Mathématiques. Franco suppose que la fraction $\frac{22}{7}$ exprime exactement le rapport de la circonférence au diamètre. Il n'a aucune difficulté de convertir le cercle de diamètre $= 14$ en un rectangle, dont les côtés sont 11 et 14. Mais c'est alors que l'on aurait supposé tout fini que commence pour lui la vraie difficulté. Il n'a aucun moyen géométrique de transformer un rectangle en un carré et il est forcé de se contenter d'une construction assez peu approchée. Le Traité est divisé en six Livres; le septième n'a, paraît-il, qu'une connexion très faible avec ce qui précède. Dans le premier Livre, on trouve des essais de représentation de nombres irrationnels sous forme de progressions; mais les termes de ces progressions sont en nombre fini.

Geleich (*Eugène*). — Étude sur la découverte de la Géométrie analytique et examen d'un Ouvrage de Marino Ghetaldi, patricien de Raguse (1630).

Marino Ghetaldi naquit en 1566, à Raguse, en Dalmatie. En 1603, il publia *Archimedes promotus seu de variis corporum generibus gravitate et magnitudine comparatis,* puis bientôt après *Nonnullæ propositiones de parabola nunc primum inventæ et in lucem editæ;* en 1607, l'*Apollonius redivivus* et *Variorum problematum collectio*. Ghetaldi visita presque toute l'Europe et se lia avec des savants comme Michel Coignet, Christophe Clavius et François Viète. Les plus célèbres Universités, entre autres celle de Leyde, lui offrirent des chaires. Il préféra cependant retourner dans sa patrie, où il mourut en 1627. Il avait rédigé encore quelques Traités sur l'Optique, qui semblent perdus; mais son principal Ouvrage ne parut que trois ans après sa mort; il porte le titre *Marini Ghetaldi Patritii Ragusini mathematici præstantissimi de resolutione et compositione mathematica libri quinque, Opus posthumum*. Romæ, 1630. C'est là que Riccati, Wolf et plusieurs autres ont cru trouver les principes de la Géométrie analytique : même à ce propos, Vincenzo Monti, profes-

seur à Pavie, n'a pas craint d'accuser Descartes de plagiat. Sans doute que les jalousies nationales n'ont pas été étrangères à ce débat.

M. Geleich commence par donner une analyse très complète de l'Ouvrage; puis vient une courte histoire des méthodes analytiques antérieures. Le résultat de cette étude n'est pas très favorable au savant italien. En supposant que Ghetaldi ait eu connaissance des travaux de Tartaglia, Cardan, Viète et Cataldi (*Algebra discorsiva e lineare*. Bologna, 1618), on est forcé de reconnaître qu'il a eu peu à faire pour composer son Ouvrage : il s'en faut de beaucoup qu'il ait le premier appliqué l'Algèbre à la Géométrie. Son mérite est plutôt d'avoir recueilli les connaissances qu'on avait de son temps dans cette matière et d'en avoir fait pour la première fois un Ouvrage spécial. La solution de l'équation du quatrième degré, qu'on lui a attribuée quelquefois, lui était inconnue; il la compte même parmi les choses qui ne sont pas du domaine de l'Algèbre. Le premier Livre de la Géométrie de Descartes ne contient, il est vrai, rien qui n'ait été trouvé avant lui et qui ne soit dans Ghetaldi; mais on ne peut contester au grand géomètre français le reste de son œuvre. Ghetaldi a parfaitement ignoré l'usage des coordonnées. Il est vrai encore que, d'après M. Cantor, elles étaient connues déjà des Babyloniens; les Arabes s'en sont servis et Nicolas Oresme les a exposées dans son *Tractatus de latitudinibus formarum*. Mais il est improbable que Descartes ait connu ces travaux et il restera toujours l'inventeur et le fondateur de la Géométrie analytique.

Les conclusions de M. Geleich ont d'autant plus de poids qu'elles émanent d'un homme dont l'impartialité ne peut être mise en doute. La grandeur de la ville de Raguse excite son enthousiasme, et il est si peu disposé à être le panégyriste de Descartes qu'il répète les accusations qu'on a soulevées contre ses découvertes optiques. Heureusement, ces accusations sont mises à néant dans le travail suivant.

Kramer (*P.*). — Descartes et la loi de réfraction de la lumière.

Cette loi est formulée dans la *Dioptrique* parue en 1637; elle ne donna lieu à aucune contestation du vivant de Descartes. C'est en 1663, douze ans après sa mort, que Isaac Voss l'accusa d'avoir puisé sa découverte dans les écrits de Snell. Willibrod Snell avait été professeur à Leyde; il était mort en 1626, laissant un Ouvrage inachevé et aujourd'hui perdu. Mais tous ceux qui l'ont vu, entre autres Huygens, déclarent qu'il contenait la loi de réfraction, sous une forme différente de celle de Descartes. Ce dernier avait considéré les sinus, comme nous le faisons aujourd'hui, Snell se servait des cosécantes. Mais cette différence n'arrête pas les adversaires de Descartes. La découverte de Snell, nous disent-ils, a été répandue par ses élèves et Descartes en aurait eu connaissance. C'était aussi l'opinion de Leibnitz. Appuyée par de telles autorités, cette hypothèse devient bientôt un fait certain dans la bouche de Priestley, Wilde, Fischer, Poggendorff. Delambre, après quelques hésitations, se déclare contre Descartes; pour Montucla la chose reste indécise.

Voici les cinq points sur lesquels repose l'accusation :

1° Descartes a vécu plus de vingt ans en Hollande et a compté beaucoup d'amis parmi les savants de ce pays (Voss, Poggendorff);

2° La découverte de Snell a été enseignée dans des cours privés et publics par Hortensius (Voss);

3° Descartes ne cite presque jamais ses sources (Leibnitz, Poggendorff);

4° Il ne cite aucune expérience qui aurait pu lui faire découvrir sa loi (Poggendorff);

5° Il s'est embrouillé, en voulant donner la preuve de la loi de la réfraction (Leibnitz).

La question du séjour de Descartes en Hollande est de la plus haute importance. Il y a été trois fois : de 1617 à 1619 à Bréda, avec l'armée du prince Maurice d'Orange; en 1621-1622 à La Haye, et enfin en 1629. Ce dernier séjour a duré vingt ans, jusqu'à son passage en Suède (1649). C'est probablement de ce séjour que parlent Voss, Leibnitz et Poggendorff. Mais ceci n'a rien à faire dans le litige. L'auteur prouve, sans réplique, que Descartes était déjà en possession de sa découverte en 1629.

La loi de la réfraction avait en effet pour lui une valeur non seulement théorique, mais aussi pratique. Elle lui était indispensable pour construire les courbes anaclastiques (celles des lentilles qui rassemblent tous les rayons en un point). Ces courbes vainement cherchées par Kepler, il les trouva dans l'hyperbole et l'ellipse, en s'aidant de cette supposition que les vitesses de la lumière dans l'un et dans l'autre milieu, devaient avoir entre elles un certain rapport. Il fallait connaître ce rapport pour déterminer celui du grand axe à l'excentricité de la courbe; donc, pour construire ses lentilles, Descartes devait savoir mesurer l'indice de réfraction du verre. Or il n'y a aucun doute qu'il ait construit une lentille de ce genre en 1628, avec l'aide du mécanicien Ferrier. Ce dernier, fort habile homme, mais évidemment faible en théorie, fort embarrassé quand Descartes, en 1629, se rendit en Hollande, eut à lui demander des éclaircissements. Descartes les lui fournit, en lui expliquant entre autres choses une méthode pour déterminer l'indice de réfraction. La tournure de sa lettre suffirait à prouver qu'il ne s'agit là nullement d'une chose qu'il a apprise en Hollande, mais bien d'une application de principes possédés depuis longtemps. L'auteur croit que l'année 1627 peut être regardée comme la date la plus rapprochée de nous de la découverte de Descartes; à en juger par une lettre à Beckmann, cette date pourrait être reculée jusqu'en 1617-1619. Pour Snell, il existe bien une assertion du P. Reis, qui assigne à sa découverte la date de 1620. Mais c'est chose impossible à prouver. Il est extrêmement probable qu'il n'a guère trouvé sa loi qu'en 1627 ou 1628.

Ces observations répondent en même temps au second chef d'accusation. Lors du second séjour de Descartes en Hollande, Hortensius (qui d'ailleurs n'a jamais été élève de Snell) n'avait que seize ou dix-sept ans. Il ne devint professeur, à Amsterdam, qu'en 1634. Or, à cette date, Descartes était déjà depuis longtemps en possession de sa loi.

La troisième assertion des adversaires de Descartes vise son caractère. L'auteur reprend une à une les allégations les plus graves qu'on a lancées contre lui. Il n'en trouve aucune qui soit vraiment fondée. Descartes aimait profondément la vérité et était entièrement incapable d'une bassesse. Sa conduite dans l'affaire de Beckmann est un témoignage des principes qui le guidaient en pareille occasion.

L'absence d'une expérience ne prouve rien non plus. Snell était parvenu à sa loi par l'induction; mais Descartes avait procédé tout à fait différemment. Il avait commencé par étudier les propriétés des sections coniques; il avait vu que l'ellipse et l'hyperbole rassemblent dans leur foyer tous les rayons parallèles à leur axe. Il avait remarqué que ce fait devait encore avoir lieu si les vitesses de la lumière dans les deux milieux, tout en étant différentes, avaient entre elles un certain rapport. De cette idée à la vérification il n'y avait qu'un

pas. Et quelle pouvait être cette vérification? Évidemment la construction d'une lentille elliptique ou hyperbolique. L'essai réussit; la lentille rassemblait en effet tous les rayons. Il n'avait pas dû faire, comme Snell, d'innombrables observations.

Enfin est-il possible de supposer, comme l'a fait Huygens, que Descartes avait vu le manuscrit de Snell. Il donne une preuve beaucoup plus compliquée que celle du savant hollandais. D'ailleurs, en l'examinant de près, l'auteur ne trouve pas que cette preuve soit si embrouillée qu'on l'a prétendu. Leibnitz n'a pas tenu suffisamment compte des nombreuses découvertes qu'on avait faites depuis Descartes, surtout sur la décomposition des forces.

Année 1883.

Curtze (*Maximilien*). — Sur un manuscrit de la Bibliothèque de Dresde. (1-14).

Ce manuscrit, qui, dans le Catalogue de M. Schnorr von Carolsfeld, porte la signature D. *b.* 86, date du commencement du XIVe siècle; il a appartenu à Valentin Thaw, dont la veuve l'a vendu. Il contient, d'après M. Curtze, 38 Traités au lieu de 24 signalés par l'index; M. Schnorr en indique 26. Ces Traités sont tous mathématiques; plusieurs sont d'une très grande importance. En voici l'inventaire :

Il y a cinq Traités ou fragments d'Euclide. Celui que M. Curtze désigne par le n° 2 est la *Géométrie* traduite par Adelard de Bath. Cette version est identique avec celle dont M. Weissenborn a parlé dans un numéro précédent du recueil; elle s'éloigne beaucoup plus de l'original que celle publiée par Campano. Le n° 5 contient une version latine de l'*Optique*, faite directement sur la version grecque que nous connaissons par l'édition de Heiberg et que le savant danois croit être le texte primitif. Le compilateur du manuscrit de Dresde connaît les traductions faites sur l'arabe; il en cite des extraits. La *Catoptrique* d'Euclide, que nous trouvons dans le n° 6, est remarquable en ce que la figure du VIe théorème s'y accorde pleinement avec celle qu'a restituée M. Heiberg. Le n° 26 contient les *Données*. Les nos 8 et 17 sont identiques; ils présentent le fragment bien connu du livre *de Gravi et Levi* d'Euclide. Un autre fragment du même Traité inconnu jusqu'ici serait présenté, d'après M. Curtze, par le n° 37. Cet écrit est intitulé par Thaw *de Insidentibus aquæ;* les trois derniers théorèmes de ce fragment montrent une concordance parfaite avec trois théorèmes du premier fragment. Une remarque de la main de Thaw, qui se trouve sous le titre, prouve qu'il y avait à Cologne à la fin du XVIe siècle un exemplaire du Traité d'Archimède sur la même matière. Il n'est donc pas impossible que cet écrit précieux soit retrouvé un jour. D'après M. Curtze ce ne serait pas l'original, mais une vieille traduction latine, la même dont s'est servi Tartaglia, d'après M. Heiberg.

Le n° 12 est la *mesure du cercle* d'Archimède, traduction faite de l'arabe, ce qui est prouvé par la forme « Archimenides ». Dans le n° 22, nous trouvons un commentaire sur quelques théorèmes du livre *de la Sphère et du Cylindre*. Le commentateur se nomme ici Joannes de Tlñ; un manuscrit florentin le nomme Joannes de Thiss. Ce Traité a été publié par M. Heiberg dans le troisième Volume de son édition d'Archimède comme provenant d'un anonyme. Le

n° 39, portant le titre *Liber de speculis comburentibus*, avait été attribué à Archimède par M. Schnorr. D'après M. Curtze, il appartiendrait à un certain *Tideus filius Theodori*.

Une partie notable du manuscrit est occupée par les écrits de Jordan. Il y a là d'abord, sous le n° 3, un Traité *de Triangulis*, entièrement inédit, que M. Curtze se propose de publier le plus tôt possible. Il est divisé en quatre Livres. Dans le quatrième on trouve deux problèmes identiques à ceux du *Liber trium fratrum*. Le premier de ces problèmes traite de la trisection de l'angle; il est résolu à l'aide de la conchoïde; le second est celui de la duplication du cube. Le n° 4 contient l'*Arithmétique* de Jordan. Le manuscrit prouve que Jean Le Fèvre d'Étaples a pris de grandes libertés en éditant cet Ouvrage. C'est ainsi que le manuscrit a trois *petitiones*, tandis que Le Fèvre en compte 6; 8 *communes animi conceptiones;* il y en a 20 chez Le Fèvre, etc. Le Traité *de Ponderibus* de Jordan, édité par Apianus en 1533, se trouve deux fois dans le manuscrit sous les n°s 21 et 35; c'est le n° 35 qui est le plus complet. De la plus grande importance est le n° 34. Nous y trouvons un exemplaire du Livre *de Numeris datis* de Jordan, qui vient très heureusement corriger l'édition donnée par M. Treutlein d'après un manuscrit de Bâle. Tout en rétablissant le vrai sens de quelques théorèmes, entièrement incompréhensibles dans l'édition de M. Treutlein, M. Curtze promet de revenir plus longuement sur ce sujet. Enfin le n° 31 contient un fragment intitulé : *Liber qui dicitur demonstracio Jordani de forma spere in plano*.

Parmi les autres écrits du manuscrit, en grande partie anonymes, nous mentionnerons encore trois Traités de Théodose *de Speris, de Locis habitabilibus* et *de plana sphaera lana* (n°s 7, 23, 29); un Traité publié par M. Hultsch dans le troisième Volume de son édition de Pappus comme provenant d'un anonyme et qui contient sept théorèmes sur des figures isopérimétriques (n° 16), et enfin deux théorèmes d'un certain Cratilius, inconnu d'ailleurs, dont le second surtout est intéressant; il donne de la formule de l'aire du triangle par les trois côtés une démonstration dont rien jusqu'ici n'avait pu faire soupçonner l'existence au moyen âge.

Teige (*Joseph*). — Biographie de maître Jean de Praga. (41-44).

Le vrai nom de ce mathématicien est Schindel, cependant il se faisait appeler indifféremment Szindelius ou Syndelius; il est plus connu sous le nom de Joannes de Praga, qui lui est commun toutefois avec plusieurs de ses contemporains. Il est né à Königsgrätz, en Bohême, en 1370 ou 1375. Il fit ses études à l'université de Prague, où il semble avoir professé en 1399. Nous le retrouvons, en 1406, directeur de l'école de Saint-Nicolas. A partir de cette année et jusqu'en 1409, il enseigna avec beaucoup de succès l'Astronomie et les Mathématiques à l'Université de Vienne. En 1410, il revint à Prague, où il fut élu recteur de l'Université; comme tel il s'opposa à la destruction des œuvres de Wiklef, demandée par l'archevêque Zbynek. Dès lors, Schindel semble être resté à Prague en qualité de *lector ordinarius*. Toutes les données que nous avons sur les années suivantes de sa vie sont malheureusement obscurcies par la confusion des noms. D'après M. Balbin, Schindel aurait été aussi médecin et historien; il aurait légué 200 manuscrits au Grand Collège. Il est mort vers 1450.

Weissenborn (*H.*). — Remarques sur les valeurs approchées d'Archimède pour les racines carrées irrationnelles. (81-99).

Théon de Smyrne (IIe siècle après J.-C.) forme une série de nombres qu'il appelle « nombres latéraux » (πλευραί) et « nombres diamétraux » (διαμέτροι). Si nous appelons le $n^{\text{ième}}$ nombre latéral a_n, et le $n^{\text{ième}}$ diamétral d_n, nous avons les équations suivantes :

$$a_{n+1} = a_n + d_n, \quad d_{n+1} = 2a_n + d_n.$$

En partant de 1 et 1 comme premiers nombres, nous aurons les valeurs

$$a_2 = 2, \quad d_2 = 3, \quad a_3 = 5, \quad d_3 = 7, \quad a_4 = 12, \quad d_4 = 17, \quad a_5 = 29, \quad d_5 = 41, \quad \ldots,$$

d'où l'on tire

$$d_{n^2} = 2a_{n^2 \pm 1},$$

formule établie par Théon sans démonstration; il est cependant très probable qu'il l'a connue. M. Weissenborn développe et explique la méthode proposée par M. Heilermann, qui se fonde précisément sur ce théorème de Théon. Les calculs refaits par M. Weissenborn montrent que les résultats s'adaptent bien aux nombres d'Archimède et de Héron. Quant à Gerbert, l'auteur renonce à trouver une explication de ses étranges valeurs de $\sqrt{3}$.

Heiberg (*L.*). — Sur le fragment mathématique de Bobbio. (121-129).

Le manuscrit L. 99 supp. de la Bibliothèque Ambrosienne provenant de Bobbio présente, à la suite du texte des Étymologies d'Isidore, quelques fragments d'un Ouvrage mathématique grec ; c'est à l'interprétation d'une des pages de ce manuscrit publiée par M. Belger, qu'est consacré ce travail. Le théorème démontré serait la convergence de tous les rayons parallèles à l'axe dans les miroirs paraboliques, propriété fondamentale dont on trouverait ici la première mention. Le texte grec est certainement original et il se place tout naturellement à la suite d'un fragment d'Anthemius précédemment édité : il est donc très probablement de ce géomètre.

Gelcich (*Eugen*). — Sur l'essai de détermination du diamètre de la Terre, par Marino Ghetaldi. (130-133).

Cet essai ne pouvait être susceptible d'aucune exactitude : il repose sur la dépression présentée par la surface de la mer observée d'un point très élevé.

Poske (*Fr.*). — L'éclaircissement de l'arc-en-ciel d'Aristote. (134-138).

La partie géométrique de ce passage obscur serait une démonstration un peu lourde de ce théorème : tous les points d'une sphère également distants d'un point donné de la sphère sont situés sur un cercle dont le centre est sur le diamètre de la sphère passant par le point donné. Quant à l'application de ce théorème au phénomène en question, elle présente des difficultés insurmontables : mais Aristote ne se serait-il pas contenté de vagues analogies?

Schoenborn (*W.*). — Sur la méthode par laquelle les anciens

Grecs (notamment Archimède et Héron) ont calculé les racines carrées. (169-179).

M. Schoenborn procède en comparant, dans des triangles de plus en plus petits, l'hypoténuse à l'un des côtés de l'angle droit. Les formules qui en ressortent sont un peu compliquées. Aussi M. Schoenborn pense-t-il que les anciens les ont appliquées pour ainsi dire inconsciemment, en s'aidant de constructions chaque fois répétées. Les valeurs obtenues par ce procédé s'accordent, il faut bien le dire, d'une façon assez complète avec les valeurs d'Archimède et de Héron. Ce n'est, il est vrai, que par quelque effort que l'on obtient pour la célèbre racine de 349450 le chiffre $591\frac{1}{8}$ au lieu de $591\frac{1}{7}$; mais pour la $\sqrt{3}$ nous avons comme troisième valeur $\frac{26}{15}$ et les deux valeurs d'Archimède $\frac{265}{153}$ et $\frac{1351}{780}$ sont en effet des valeurs qui se suivent immédiatement. Pour les racines de Héron, la théorie se vérifie aussi facilement. Dans un post-scriptum l'auteur s'occupe de Gerbert; ce serait à l'aide de la méthode qu'il propose que le mathématicien du moyen âge est arrivé à concevoir la valeur de $\frac{12}{7}$ pour la $\sqrt{3}$ comme plus exacte que celle de $\frac{26}{15}$.

Ce qui donne de la probabilité à l'hypothèse de M. Schoenborn, c'est que les anciens, d'après M. Cantor, sont arrivés à concevoir l'irrationnel à propos de l'hypoténuse du triangle rectangle.

Treutlein (*P.*). — Contribution à l'histoire de la Géométrie grecque. (209-227).

« Nous avons tous », dit l'auteur, « éprouvé une sorte d'étonnement, pour ne pas dire d'éblouissement, en voyant surgir le fameux théorème de Pythagore et sa démonstration telle qu'elle nous est apportée par Euclide. Or ce sentiment semble prouver que cette démonstration, si belle qu'elle soit, n'a rien de vraiment historique, et que c'est par une autre méthode qu'on a dû avoir connaissance de ce théorème ». Cette méthode, on l'a recherchée : MM. Röth, Günther, Cantor, Bretschneider ont émis différentes hypothèses à cet égard. C'est M. Cantor qui, le premier, a essayé de restituer les liens de ce théorème avec la Mathématique pythagoricienne, fondée, comme on sait, surtout sur les propriétés des nombres. D'après lui, les pythagoriciens auraient trouvé leurs théorèmes en faisant des essais sur les chiffres. C'est ici que nous voyons surgir la nouvelle hypothèse de M. Treutlein.

Il croit qu'on s'est servi de petites pièces en bois ou en pierre, rondes ou carrées, à l'aide desquelles on pouvait composer des triangles rectangles, des triangles équilatéraux, des rectangles ou des carrés; puis on aurait découpé différentes figures, par exemple : des carrés ayant les côtés 1, 2, 3, 4, ... Or, en composant un carré de 16 pièces et en l'agrandissant pour en faire un de 25, on devait bien s'apercevoir que la différence (le gnomon) était elle-même un carré, le carré de 3. En rapprochant les carrés de 3, 4 et 5, découpés en bois, on a dû voir qu'il se forme un triangle rectangle. Telle serait l'origine des trois nombres 3, 4, 5 pour le triangle de Pythagore et c'est en élargissant cette observation que le philosophe serait arrivé à généraliser son théorème.

Les mêmes carrés composés de petites pièces rondes pouvaient d'ailleurs, comme le montre l'auteur, servir à découvrir d'autres théorèmes; on les aurait employés par exemple pour établir la formule que Proclus attribue à Pythagore et qui servait à résoudre en nombres entiers les triangles rectangles. Voici la règle de Pythagore : « Un nombre impair étant pris comme le plus petit des côtés, le carré de ce nombre moins 1, divisé par 2, donne l'autre côté; celui-ci plus 1 donne l'hypoténuse ». Quelle est l'origine de cette règle? M. Arneth croit qu'elle est venue d'Orient; d'après M. Röth, elle serait bien grecque. De $b^2 + c^2 = a^2$ on aurait tiré

$$c^2 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

c'est-à-dire que $(a + b)$ et $(a - b)$ doivent être tous deux pairs ou tous deux impairs; et comme leur produit doit être un carré, ils auront la forme $\frac{\alpha^2}{\gamma}$ et $\frac{\beta^2}{\gamma}$, alors

$$a = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\gamma}, \quad b = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\gamma} \quad \text{et} \quad c = \frac{\alpha\beta}{\gamma};$$

si l'on fait alors $\beta = \gamma = 1$, on aura la règle de Pythagore

$$c = \alpha, \quad a = \frac{\alpha^2 + 1}{2}, \quad b = \frac{\alpha^2 - 1}{2}.$$

Cette hypothèse a été acceptée par M. Cantor, avec une petite modification, qui devait la rendre un peu moins moderne et dès lors plus acceptable. Elle n'a cependant pas paru satisfaisante à Bretschneider qui en a proposé une autre. « Pythagore pouvait, nous dit Bretschneider, trouver cette règle d'une manière bien simple, s'il avait connaissance du théorème, d'après lequel la somme des nombres impairs consécutifs donne la série des nombres carrés. Il n'avait qu'à écrire sur une première ligne la série des nombres naturels, sur une deuxième la série de leurs carrés, sur une troisième les différences entre deux carrés consécutifs :

$$\begin{array}{l} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots, \\ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, \ldots, \\ 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, \ldots. \end{array}$$

et la règle était évidente, s'il cherchait dans la série des différences les nombres qui sont eux-mêmes des carrés. »

D'après M. Günther, la chose se serait passée un peu autrement. En écrivant plusieurs fois la série des nombres carrés, par exemple :

$$\begin{array}{l} 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, \ldots, \\ \qquad 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, \ldots, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots. \end{array}$$

et en faisant des essais d'addition, on aurait remarqué que $25 + 144 = 169$, $36 + 64 = 100$, ..., et l'on aurait augmenté le nombre de ces relations d'une manière tout empirique. Les hypothèses de MM. Brestchneider et Günther ont ceci de commun qu'elles supposent des essais faits sur de longues rangées de chiffres.

M. Treutlein, lui aussi, suppose une origine expérimentale à ces théorèmes; mais les essais auraient été faits avec les éléments en bois dont nous avons déjà parlé. Ayant reconnu au cas de 3, 4 et 5 que le *gnomon* est parfois lui-même un carré, Pythagore n'avait qu'à se demander si ce cas pouvait se répéter. C'était d'ailleurs évident, le gnomon prenant successivement la valeur de tous les chiffres impairs. Dans ce cas, un côté du triangle était la racine du gnomon, c'est-à-dire un nombre impair quelconque. Mais quels étaient alors l'hypoténuse et l'autre côté? On n'avait qu'à regarder la figure pour le voir. Le côté — 1 du gnomon (c'est-à-dire le carré du chiffre donné — 1 divisé par 2) était le grand côté et celui-ci + 1 donnait l'hypoténuse.

Nous trouvons dans Proclus encore une règle conduisant au même résultat, cette fois attribuée à Platon. « On prend un nombre pair pour l'un des côtés; si l'on élève sa moitié au carré et si l'on augmente le carré de 1, on aura l'hypoténuse; si l'on soustrait du carré 1, on aura l'autre côté. » Cette règle aurait la même origine, d'après M. Treutlein. On n'a en effet qu'à prendre un gnomon large de deux éléments au lieu de celui que nous avons considéré jusqu'ici pour la voir sortir par le même raisonnement.

Enfin la même manière de composer et de décomposer des figures avec des pièces de bois aurait été l'origine des théorèmes et problèmes contenus dans le IIe livre des *Éléments* d'Euclide. Cette partie du célèbre Ouvrage serait donc de beaucoup antérieure à Euclide et même à Hippocrate; elle serait presque « pythagoricienne », opinion d'ailleurs conforme à celle qui a été émise autrefois par Bretschneider.

Nous ne pouvons reproduire ici les déductions de M. Treutlein; d'ailleurs, faute de figures, nous parviendrions difficilement à les expliquer. Toutefois les hypothèses de l'auteur nous ont paru bien s'adapter aux démonstrations d'Euclide. Pour les IXe et X^e théorèmes, tout en reconnaissant que les énoncés apparaissent naturellement, M. Treutlein croit que les démonstrations d'Euclide ne sont pas les premières trouvées et il s'est efforcé de reconstruire ces dernières d'une manière plus conforme aux autres et en partant de sa théorie.

Nous avons insisté un peu sur ce travail, parce que nous n'y voyons pas seulement un intérêt historique, mais aussi un intérêt pédagogique; il y aurait dans ces petits morceaux de bois un moyen facile d'apprendre aux enfants d'une manière récréative nombre de propositions arithmétiques importantes. L'observation joue d'ailleurs dans les découvertes mathématiques un rôle considérable.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

Tome XIX; 1882.

Voss (*L.*). — Sur une nouvelle méthode de représentation des surfaces courbes. (1-26).

Par une transformation quelconque, le carré de l'élément de longueur $ds^2 = e\,du^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,dv^2$ devient $e'\,du'^2 + 2\,f'\,du'\,dv' + g'\,dv'^2$, et l'on peut supposer que la transformation soit telle que les fonctions e' et g' soient

des fonctions choisies une fois pour toutes, en sorte que la fonction f' caractérise les surfaces individuelles; de cette façon, la mesure des longueurs le long des courbes u et v est la même pour toutes les surfaces. Qu'on imagine maintenant, sur une surface quelconque, le réseau des courbes $u =$ const., $v =$ const., dessiné au moyen de fils flexibles et inextensibles, ces fils étant noués aux points de croisement; ce réseau pourra être appliqué, au moins en partie, sur une autre surface quelconque. On peut ainsi *représenter* (*abbilden*) cette surface sur une surface déterminée, par exemple sur un plan, et la déformation qui permet de passer d'une surface à l'autre jouit de cette propriété que les longueurs sont conservées dans deux directions déterminées. M. Voss s'occupe principalement du cas où l'on a $e = g = 1$; les courbes $u =$ const., $v =$ const. forment alors un réseau de courbes équidistantes; il traite des propriétés générales d'un tel réseau sur une surface quelconque, et plus particulièrement sur une surface à courbure constante; sur les surfaces à courbure négative constante, les lignes asymptotiques constituent un pareil réseau; on en obtient encore immédiatement un sur les surfaces engendrées par la translation d'une ligne courbe qui s'appuie constamment sur une autre ligne courbe. Le problème qui consiste à trouver sur une surface donnée tous les systèmes de courbes équidistantes dépend d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, pour laquelle l'Auteur donne des intégrales particulières.

Markoff (*A.*). — Sur une question de Jean Bernoulli. (27-35).

« Cette question est la suivante : Pour les quantités réelles a et b données, on demande de former la suite de nombres entiers

$$F(b),\ F(a+b),\ F(2a+b),\ F(3a+b),\ \ldots,$$

respectivement les plus approchés de

$$b,\ a+b,\ 2a+b,\ 3a+b,\ \ldots;$$

Jean Bernoulli remarque que, dans le cas où a est un nombre rationnel, la suite des différences

$$F(a+b)-F(b),\ F(2a+b)-F(a+b),\ F(3a+b)-F(2a+b),\ \ldots$$

est périodique et donne des règles très remarquables pour composer la période de cette suite. Si a est irrationnel, cette suite ne peut être périodique. Cependant, même dans ce dernier cas, on peut parler de ses périodes, si seulement on s'arrête à un nombre limité de termes. Nous chercherons, pour les quantités réelles a et b et le nombre entier N, la période la plus courte du système de N termes

$$F(a+b)-F(a),\ F(2a+b)-F(a+b),\ \ldots,\ F(Na+b)-F[(N-1)a+b].$$

Le cas de $b = 0$ a été discuté par moi en détail, et, pour le cas général, j'ai démontré un théorème que je considère comme fondamental. »

Brunel (*G.*). — Sur les propriétés métriques des courbes gauches dans un espace linéaire à n dimensions. (37-55).

Hurwitz (*A.*). — Sur l'application des fonctions elliptiques à un problème de Géométrie. (56-66).

L'auteur considère les équations entre λ_1, λ_2 de la forme

$$A_1\lambda_2^2 + 2B_1\lambda_2 + C_1 = A_2\lambda_1^2 + 2B_2\lambda_1 + C_2 = 0,$$

où A_i, B_i, C_i sont des fonctions entières et du second degré de λ_i; une telle équation peut être regardée comme traduisant une relation deux fois bivoque entre deux multiplicités rationnelles à une dimension et se présente dans des problèmes qui peuvent être traités à l'aide des fonctions elliptiques; il établit la proposition fondamentale que voici : Soient deux multiplicités rationnelles à une dimension liées entre elles par une relation algébrique deux fois bivoque; par un choix convenable de paramètres, on peut faire en sorte que, à un élément $\lambda_1 = \operatorname{sn} u$ d'une multiplicité, correspondent les éléments $\lambda_2' = \operatorname{sn}(u + C)$, $\lambda_2'' = \operatorname{sn}(u - C)$ de l'autre multiplicité. C désigne une constante qui dépend de la relation; les paramètres doivent être tels que les éléments doubles, dans chacune des multiplicités, soient déterminés par les valeurs suivantes du paramètre : $+1$, -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$. La fécondité de ce principe et de sa réciproque est mise en évidence par des exemples intéressants et nouveaux.

Hurwitz (*A.*). — Sur la transformation des fonctions elliptiques. (67-71).

Preuve de ce théorème : Si l'on considère le module k d'une intégrale elliptique de première espèce comme fonction du rapport ω des périodes, il ne peut y avoir de relation algébrique entre deux fonctions moléculaires $k(\omega)$, $k(\omega_1)$ que s'il y a entre ω_1, ω_2 une relation bilinéaire à coefficients entiers, avec un déterminant positif.

Enneper. — Sur la théorie des courbes à double courbure. (72-83).

M. Bertrand a montré que, pour une hélice tracée sur un cylindre quelconque, le rapport des courbures est constant; M. Enneper généralise cette proposition; il établit une relation entre les courbures d'une ligne géodésique tracée sur une surface développable, dont l'arête de rebroussement jouit de certaines propriétés. Il résout aussi cette question : Quelle courbe peut être en même temps hélice sur un cône et sur un cylindre?

Appell. — Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions eulériennes. (84-102).

« En généralisant la série hypergéométrique de Gauss, M. Heine a découvert des fonctions nouvelles qui ont, avec les fonctions Θ, les mêmes rapports que les intégrales eulériennes avec la fonction *sinus*. Les fonctions de Heine sont formées avec la moitié des facteurs qui constituent les fonctions Θ, de même que la fonction $\Gamma(x)$ est formée avec la moitié des facteurs qui constituent la fonction $\sin \pi x$. On a ainsi une double série de fonctions : d'un côté, les fonctions simplement

périodiques et les fonctions doublement périodiques, et de l'autre les fonctions eulériennes et les fonctions O et Φ de M. Heine. Mais, tandis qu'il n'existe pas de fonctions uniformes de plus de deux périodes, il existe des fonctions qui sont semblables à la fonction eulérienne Γ et à la fonction O de M. Heine, et qui sont formées à l'aide de plusieurs quantités imaginaires $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_n$, comme la fonction O est formée avec deux quantités ω, ω_1.

» Dans le présent Mémoire, je m'occupe d'abord de l'étude des principales propriétés de ces fonctions, puis j'applique les plus simples d'entre elles à différents problèmes du calcul fonctionnel et à l'évaluation de la limite de certaines séries et de certains produits infinis.

» Quelques-uns des résultats exposés dans ce Mémoire ont fait l'objet de trois Notes présentées à l'Académie des Sciences et insérées dans les *Comptes rendus*, t. LXXXVI, p. 953; t. LXXXIX, p. 841 et 1031. »

Krause. — Les équations modulaires des fonctions hyperelliptiques du premier ordre pour la transformation du troisième degré. (103-109).

Simony. — Sur une suite de faits nouveaux dans le domaine de la Topologie. (110-130).

Ces recherches concernent les figures obtenues au moyen de surfaces en forme de croix, dont on réunit les extrémités deux par deux et sur lesquelles on pratique certaines coupures qui reviennent sur elles-mêmes; l'auteur classe les nœuds et les entrelacements auxquels on parvient ainsi.

Hers. — Sur le gyroscope. (121-154).

En suivant la voie ouverte par Poinsot pour représenter géométriquement le mouvement d'un corps solide autour de son centre de gravité, l'auteur traite du mouvement d'un solide de révolution pesant, sur lequel n'agit aucune percussion oblique, et qui tourne autour d'un point de son axe; il développe les formules analytiques et en expose clairement la signification géométrique.

Pasch. — Sur l'inversion des intégrales elliptiques. (155-158).

Klein (*F.*). — Sur la représentation conforme des surfaces. (159-160).

L'auteur montre comment on peut classer parmi les surfaces dites *symétriques* les surfaces limitées par un contour et les surfaces doubles.

Veronese (*G.*). — Des relations projectives entre les espaces de diverses dimensions étudiées au moyen des principes de projection et d'intersection. (161-234).

Ce Mémoire contient les fondements de la Géométrie projective de l'espace à n dimensions; il conduit aussi à des méthodes pour la Géométrie du plan de l'espace ordinaire considéré comme les projections d'espaces à un plus grand nombre de dimensions.

Harnack (*A.*). — Simplification des démonstrations dans la théorie des séries de Fourier. (255-279).

Harnack. — Correction au Mémoire précédent. (524-528).

Voir le *Bulletin*, t. VI, 2e série.

Christoffel (*E.-B.*). — Remarque sur la théorie des invariants. (280-290).

Béla (*Tötössy*). — Sur les surfaces du quatrième ordre à conique cuspidale. (291-322).

Lindemann. — Développement des fonctions d'une variable complexe en séries procédant suivant les fonctions de Lamé ou suivant les fonctions subordonnées aux fonctions sphériques. (323-386).

§ I. *Des fonctions de Lamé de première et de seconde espèce.*

§ II. *Un problème de représentation.* — Au moyen des fonctions de Lamé du second ordre, le faisceau de droites passant par l'origine et le faisceau de cercles concentriques à l'origine se changent en un système de courbes du quatrième ordre qui, pour les développements suivant les fonctions de Lamé, jouent le rôle des ellipses homofocales dans les développements suivant les fonctions sphériques. Ces courbes ont la plus grande analogie avec les ovales de Cassini, sans toutefois être identiques avec elles; elles se divisent en deux classes : les courbes de la première classe sont formées d'un seul trait; celles de la seconde classe sont composées de deux ovales.

§ III. *Les fonctions de seconde espèce et de première classe, en tant que fonctions d'une variable complexe.*

§ IV. *Valeurs asymptotiques des fonctions pour des valeurs infinies de n.*

§ V. *Développement de* $(z_1 - z)^{-1}$ *suivant les fonctions de Lamé.*

§ VI. *Développement d'une fonction à argument complexe suivant les fonctions de Lamé.* — On voit dans ce paragraphe le rôle essentiel joué par les courbes de quatrième ordre dont on a parlé plus haut : il y a lieu de distinguer plusieurs cas, suivant que le domaine de convergence se compose d'une aire simplement connexe, d'une aire doublement connexe (anneau), d'une aire triplement connexe (limitée par une courbe et deux ovales situés à l'intérieur de cette courbe).

§ VII. *Développements de zéro.* — Il est bien remarquable qu'on puisse développer zéro, d'une infinité de façons, en séries, en procédant suivant les fonctions de première espèce ou de seconde espèce; pour ces dernières fonctions, il n'y a qu'une classe de développements; il y en a trois pour les fonctions de première espèce : le développement peut être valable dans tout le plan, ou à l'inrieur d'une courbe du quatrième degré en forme de lemniscate, ou encore à l'intérieur d'un ovale du système précédemment décrit.

§ VII. Ce paragraphe concerne un cas limite, dans lequel les fonctions de Lamé deviennent des fonctions sphériques.

Bäcklund (*A.*). — Sur la théorie des transformations de surfaces. (387-422.)

Il s'agit, dans ce travail, des transformations qui dépendent de quatre équations entre x, y, z, p, q et x', y', z', p', q', équations dont deux ont la forme $x = x'$, $y = y'$; l'auteur applique la théorie qu'il a développée à la déduction de surfaces à courbure constante d'une surface donnée de cette nature.

Krause. — Sur les équations modulaires des fonctions hyperelliptiques du premier ordre. (423-428; 489-496).

Schur. — Sur une position particulière de deux tétraèdres. (429-432).

Nagel (*K.*). — Détermination des points doubles d'une courbe rationnelle du quatrième ordre. (533-434.)

Jürgens. — L'intégrale $\int_\alpha^\beta \frac{y\,dz}{x-z}$ et les équations différentielles linéaires. (435-460).

Voici le théorème général qui est la base des recherches de l'auteur :
« Si, dans l'équation différentielle

$$\varphi(x)y + \varphi_1(x)\frac{dy}{dx} + \ldots + \varphi_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} = 0,$$

où les fonctions φ sont des fonctions entières, on substitue à la place de y l'expression $\int_\alpha^\beta \frac{y\,dz}{x-z}$, où y est une intégrale de l'équation différentielle

$$\varphi(z)y + \varphi(z)\frac{dy}{dz} + \ldots + \varphi_n(z)\frac{d^n y}{dz^n} = 0,$$

le résultat est une fonction rationnelle de x ». M. Jürgens cherche sous quelles conditions ce résultat se réduit à zéro ou à une fraction simple $\frac{1}{x-a}$; il donne ensuite les équations différentielles linéaires (telles que celle qui est vérifiée par les fonctions sphériques) pour lesquelles ce procédé permet de déduire une seconde intégrale d'une première; enfin il indique, pour une classe étendue d'équations différentielles linéaires, un procédé facile d'intégration quand le second membre est une fonction rationnelle de x.

Sturm (*R.*). — Sur la transformation réciproque et sur certaines transformations qui lui sont intimement liées. (461-488).

2nd Part.

Sturm (*R.*). — Sur l'espèce des courbes et des cônes. (489-490).

Krey. — Sur un système d'équations avec certaines particularités. (497-516).

Lindemann. — Sur la façon de se comporter des séries de Fourier aux points de discontinuité. (517-523).

Gordan (*P.*). — Sur les faisceaux de coniques. (529-552).

Ce Mémoire se relie aux précédents travaux de l'auteur sur la théorie des équations du septième degré avec un groupe de 168 substitutions; il contient d'abord la théorie de deux formes quadratriques ternaires. Dans la première Section, l'auteur traite du système complet des formes correspondantes et développe une suite de relations entre ces dernières. Dans la seconde Section, il s'occupe de la représentation canonique connue (*irrationale Typik*) qui est rendue possible par l'existence du triangle conjugué par rapport aux deux coniques. Deux formes quadratiques ternaires n'ont pas de covariant rationnel linéaire; mais, si l'on veut leur donner une représentation rationnelle typique, il faut leur adjoindre une forme linéaire; cette représentation est effectuée en particulier dans le cas où la forme linéaire est donnée comme un covariant simultané des deux coniques et d'une troisième conique ou d'une courbe du quatrième ordre; la représentation typique de ces courbes est alors ramenée aux figures les plus simples possibles.

Poincaré. — Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires. (552-564).

Ce travail contient le résumé des résultats auxquels l'auteur est parvenu dans la théorie de ces fonctions; il classe les substitutions linéaires et, sur cette base, il fait reposer la classification et la représentation analytique des fonctions elles-mêmes; il montre aussi l'application qu'on peut faire de ces fonctions à l'expression des coordonnées d'une courbe algébrique quelconque et des intégrales d'une équation différentielle linéaire quelconque à coefficients algébriques.

Klein (*E.*). — Sur les fonctions uniformes à transformations linéaires. (565-568).

Le point essentiel de cette Note consiste dans la discussion de ce théorème: A toute surface de Riemann d'espèce quelconque répond une fonction η et une seule qui se reproduit par une substitution linéaire et qui permet de représenter ladite surface sur une portion de surface $2p$ fois connexe, et ne présentant en tout point qu'un seul feuillet. L'auteur donne en même temps une méthode qui permet de former indépendamment toutes les équations qui répondent à un nombre p donné.

Picard. — Sur un théorème relatif aux surfaces pour lesquelles

les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions abéliennes de deux paramètres. (569-577).

L'objet de ce Mémoire est de montrer que le genre d'une surface n'ayant d'autre singularité que des courbes doubles avec deux plans tangents distincts pour tous les points est au plus égal à l'unité.

Leonhardt. — Propriétés intégrales des fonctions coniques adjointes. (570-587).

Cantor (*G.*). — Sur un principe de condensation des singularités des fonctions, nouveau et général. (588-594).

Le principe introduit par Hankel et par lequel on peut construire une fonction qui présente en une infinité de points une singularité déterminée peut être simplifié et amélioré, comme il résulte d'une Communication de M. Weierstrass, en se servant de la notion d'une *multiplicité énumérable* (abzählsam Menge). Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ une telle multiplicité (par exemple l'ensemble des nombres rationnels convenablement ordonnés), et soit $\varphi(x)$ une fonction qui, pour $x = 0$, présente une singularité déterminée. La série

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} C_\nu \varphi(x - \omega_\nu),$$

en choisissant convenablement les coefficients, représentera une fonction qui admettra, pour chaque valeur $x = \omega$, la singularité considérée. M. Cantor développe deux exemples que lui a communiqués M. Weierstrass; en posant

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{x},$$

on obtient une infinité de fonctions finies et continues qui, pour toutes les valeurs $x = \omega_\nu$ admettent un quotient différentiel infini; en posant

$$\varphi(x) = x - \tfrac{1}{2} x \sin\left(\tfrac{1}{2} \log x^2\right),$$

on obtient une fonction qui, pour toutes les valeurs $x = \omega_\nu$, admet un quotient différentiel fini et indéterminé.

A. H.

BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, pubblicato da B. BONCOMPAGNI.

Tome XV; 1882.

Favaro (*Antonio*). — Sur la vie et les œuvres de Bartholomeo Sovero. (1-48).

Professeur de Mathématiques à l'Université de Padoue, Sovero avait succédé

à Gloriosi, lui-même successeur immédiat de Galilée. Tenu en grande estime par beaucoup de ses contemporains, il serait tombé depuis dans un oubli complet, que l'auteur croit immérité. Quoi qu'il en soit, M. Favaro est parvenu à compléter en plusieurs points la biographie de son héros par l'évêque Tomasini et à élucider à peu près tous les détails obscurs.

Bartholomée Soverus ou Sovero naquit vers 1577, à Corbières, dans le canton de Fribourg, d'une famille dont le nom original paraît être Souvey. Il fit ses études au Collegio Elvetico que le cardinal Charles Borromée venait d'instituer à Milan et dans un Collège de Fribourg tenu par les pères jésuites. En 1616, il se fixa à Turin, où il eut bientôt une place à l'Université; il paraît qu'il y a enseigné les langues orientales (hébreu, chaldéen, syriaque et grec). En 1624, l'Université de Turin déclinant de plus en plus à cause des guerres continuelles auxquelles la Savoie était mêlée, Sovero quitta Turin et vint à Rome; au cours de l'année il fut nommé professeur de Mathématiques à Padoue, chaire qu'il occupa jusqu'à sa mort, survenue le 20 juillet 1629.

Sovero a laissé un Ouvrage achevé qui fut publié un an après sa mort sous le titre : *Curvi ac recti proportio.* M. Favaro nous en donne un aperçu. Il lui semble que Sovero a fait un pas vers le Calcul intégral. Kästner, dans sa *Geschichte der Mathematik,* est moins favorable. C'est cependant de ce livre que Paul Guldin accusa Cavalieri d'avoir tiré les principes fondamentaux de sa Géométrie des indivisibles. Cavalieri riposta et la discussion se prolongea longtemps. Nous avons maintenant des données suffisantes pour résoudre la question. Non seulement Cavalieri avait montré son travail en 1629 à plusieurs mathématiciens bolonais, mais dès 1626 il avait indiqué, dans ses lettres à Galilée, les traits principaux de son calcul.

Henry (*Charles*). — Sur les deux plus anciens Traités français d'Algorisme et de Géométrie : Traité d'Algorisme; Traité de Géométrie. (49-70).

Notre système de numération, dont l'existence a été signalée pour la première fois dans la Géométrie de Boèce par Chasles, se retrouve ensuite au xe siècle dans de nombreux Ouvrages, le Traité *de Arte numerandi* de Sacrobosco, la poésie *de Algorismo* d'Alexandre de Villedieu, les écrits de Léonard de Pise, le *Grand calcul suivant les Indiens* de Planude. Il reste encore plusieurs Ouvrages inédits dans lesquels on a remarqué ce système et quelques-uns sont réputés perdus. De ce nombre était un Algorisme écrit en français par un anonyme sous Philippe le Hardi, vers 1275, que Chasles avait inutilement recherché à Sainte-Geneviève. M. Charles Henry l'a retrouvé et le publie avec notice et glossaire en même temps qu'un Traité de Géométrie; ces deux Traités, les plus anciens textes mathématiques français que l'on connaisse, proviennent sans doute du même auteur. L'Algorisme débute par l'indication des neuf chiffres écrits de droite à gauche à la manière arabe; la valeur de position est exposée, puis la distinction des *digiti, articuli, compositi,* conformément à Boèce; suivent l'indication des opérations de l'Arithmétique, les principales règles très rapidement exposées, enfin l'extraction de la racine cubique. La Géométrie comprend la mesure de quelques surfaces et de quelques volumes et se termine par des problèmes de conversions monétaires et des calculs numériques.

Narducci (*E.*). — Sur deux Traités inédits d'Abacus contenus

dans deux manuscrits vaticans du XIIe siècle; deux Traités d'Abacus. (111-162).

Le premier de ces Traités, intitulé par l'éditeur : « TURCHILL, *Règles sur l'Abacus* », commence par ces mots : « *Socio suo Simoni de Rotol... Turchillus compotista salutem* ». Ce Simon de Rotol... que l'inventaire des manuscrits du Vatican appelle Simon de Rotolis, n'est mentionné par aucun historien. M. Narducci pense qu'il faut lire : « *Simoni de Rotolandia* », c'est-à-dire de Rutland, en Angleterre : il nous montre que le nom Turchill est d'origine danoise et que l'auteur devait vivre dans la première moitié du XIIe siècle : on lit en effet dans un passage de ce Traité : « *ut ait Hugo de Bocholandia* », lequel est sans doute le même que le Hugo de Buckland, un des favoris de Henri Ier d'Angleterre.

Le second Traité est anonyme : il est mentionné ainsi dans l'inventaire : « *Tabula Abaci seu Pythagorica mensa* »; mais l'intéressante publication de M. Narducci servira sans doute à en faire découvrir l'auteur.

Perott (*Joseph*). — Sur une Arithmétique espagnole du XVIe siècle. (163-169).

Il s'agit d'une Arithmétique de Juan de Ortega, de l'ordre des frères prêcheurs, dont il y a eu sept éditions de 1512 à 1552. Dans l'édition italienne de 1515, on trouve quelques extractions de racine carrée obtenues par la formule

$$\sqrt{a} = \mathrm{E}(\sqrt{a}) - \frac{a - (\mathrm{E}\sqrt{a})^2}{2\,\mathrm{E}(\sqrt{a}) + 1},$$

méthode identique à celle d'Alkarkhi. Quoi qu'il en soit, dans l'édition de 1542, on trouve une partie des racines seulement traitées de cette façon; une autre partie (douze racines d'après M. Perott) a été obtenue par la résolution en nombres entiers de l'équation

$$x^2 - \mathrm{D}y^2 = 1.$$

La concordance parfaite des valeurs de Juan d'Ortega avec les solutions de l'équation ne peut laisser aucun doute à cet égard. Il n'y a qu'une treizième valeur dont le procédé de calcul ne paraît pas absolument identique. Ortega pose

$$\sqrt{2000} = 44\,\frac{2079}{2582};$$

mais ici encore M. Perott croit que nous sommes en présence de la réduite $44\,\frac{1719}{2383}$, aux fautes d'impression près.

Steinschneider (*Maurice*). — Supplément à la Notice des Tables astronomiques attribuées à Pierre III d'Aragon. (170-174).

Dans une Notice sur les Tables astronomiques attribuées à Pierre III d'Aragon, M. Maurice Steinschneider avait émis l'opinion que le roi Pierre, nommé dans la préface des Tables, était Pierre IV d'Aragon, c'est-à-dire Pierre III de

Catalogne, qui régna de 1336 à 1387, et que Jacob Carzi était identique avec Jacob Carsono, qui vécut en ce temps. Cette hypothèse a été pleinement confirmée par un article de M. Andrew Balaguer y Merino, membre de l'Académie de Barcelone, qui prouva par trois documents que Dalmacius Planes traduisit par ordre de Pierre IV quelques œuvres d'Astrologie et qu'il reçut une récompense. Ce Dalmacius Planes est un personnage mentionné dans les Tables; la question se trouve donc tranchée. L'article de M. Balaguer étant inaccessible pour la plupart des lecteurs, M. Steinschneider le reproduit ainsi que les trois documents tirés des archives de la couronne d'Aragon et des archives d'un notaire de cette ville, Guillem de San Hilari. Le premier de ces documents contient l'ordre du roi à son conseiller et trésorier Raymond de Villanova de payer à Dalmacius 300 florins d'or d'Aragon pour une traduction : il est daté du 6 janvier 1367. Le second est une quittance de Dalmacius pour les 300 florins; elle porte la date du 24 janvier 1367. Ces deux documents sont en latin. Le troisième, du dernier décembre 1387, est en espagnol.

Günther (*Sigismond*). — La correspondance entre Gauss et Sophie Germain : traduction d'Alphonse Sparagna (174-180).

Récension de deux publications photolithographiques du prince Boncompagni publiée dans la *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. XXVI, p. 19-25.

Bierens de Haan. — Bibliographie néerlandaise historico-scientifique des Ouvrages importants dont les auteurs sont nés aux XVIe, XVIIe et XVIIIe siècles sur les Sciences mathématiques et physiques avec leurs applications (*suite*). (225-315), (355-440).

Riccardi (*Pietro*). — Récension de l'Ouvrage de Giacomo Manzoni intitulé : *Studi di bibliografia analitica; studio secondo*... Bologna, 1882. (441-447).

Boncompagni (*B.*). — Sur les actes de naissance et de mort de Pierre-Simon Laplace : Actes de naissance et de mort de Pierre-Simon Laplace. (447-465).

Le célèbre géomètre est né le 23 mars 1749 à Beaumont-en-Auge; il est décédé le 5 mars 1827.

Narducci (*E.*). — Sur un commentaire inédit de Rémi, d'Auxerre, au Satyricon de Martianus Capella et autres commentaires au même Satyricon. (505-580).

Ce travail se termine par un extrait de l'*Arithmétique* de M. Capella et le commentaire de Rémi, d'Auxerre, sur ce Livre, publiés d'après deux manuscrits du Vatican que l'auteur a découverts. Le manuscrit de M. Capella est très important : il a été constitué par un certain Hadoardus, évêque de Minden au IXe siècle : l'auteur se propose d'y revenir. En attendant, il nous donne, sur

divers commentaires, tous inédits et la plupart inconnus, des renseignements précieux.

Favaro (*Antonio*). — Les autographes de Galilée dans les archives Marsigli à Bologne. (581-593).

Ce sont des lettres adressées par le grand savant florentin au marquis César de Marsigli et à Cavalieri. Quelques-unes ont été publiées par Albéri, d'après des copies envoyées à Viviani par un membre de la famille Marsigli; d'autres ont été publiées par Predieri. Cette dernière publication a été faite contre le gré de la famille Marsigli, qui depuis veille sur ses archives avec une méfiance extrême. Aussi M. Favaro n'en a-t-il obtenu l'accès qu'avec les plus grandes difficultés et encore ne lui a-t-on pas permis de copier les documents ou de les lire, mais seulement de vérifier les dates. M. Favaro constate que, sur les vingt-quatre lettres, six seulement sont inédites; mais, comme les éditeurs précédents ont sans doute souvent manqué de l'exactitude nécessaire, il serait utile de publier toute la correspondance.

Genocchi (*A.*). — Sur quelques écrits touchant les déviations du pendule et l'expérience de Foucault. (631-637).

En 1669, le marquis Giovanni Poleni, en parlant d'un Mémoire de Huygens, ajoute que, vu le mouvement diurne de la Terre, le pendule ne pourrait pas rester pendant deux oscillations consécutives dans le même plan. En 1782, Poinsinet de Sivry, dans sa traduction de Pline, fait observer que l'on pourrait employer le pendule au lieu d'une boussole; « le vaisseau, en tournant sur lui-même, ne dérangerait pas pour cela cette déviation une fois donnée au pendule ». Après quelques aperçus sur les idées de Galilée et Huygens, l'auteur passe aux explications données à l'expérience de Foucault. Il nous fait remarquer qu'en 1837 Poisson, tout en admettant l'influence déviatoire du mouvement diurne de la Terre sur un projectile, nie la possibilité d'une déviation quelconque du pendule; pour soutenir son opinion, il cherche à prouver mathématiquement que la composante perpendiculaire au plan oscillatoire serait trop petite pour écarter sensiblement le pendule de son plan et avoir aucune influence appréciable sur son mouvement. Cette opinion de Poisson est réfutée en 1851 par Binet et par Plana. Dans la même année encore, Mossotti et Chelini s'occupent des formules relatives à l'expérience de Foucault; Schaar combat l'opinion que le phénomène puisse s'expliquer à l'aide de la Géométrie pure, sans l'intervention de la Dynamique. Parmi les travaux plus récents, mentionnons ceux publiés par Poncelet en 1860, qui établit que le phénomène est beaucoup plus compliqué qu'on ne l'avait cru généralement, et enfin ceux de W. Dumas et de Serret, qui s'efforcent de donner une théorie complète de l'expérience.

Henry (*Charles*). — Les connaissances mathématiques de Jacques Casanova de Seingalt. (637-670).

Il s'agit de quelques opuscules scientifiques, rarissimes ou inédits, du célèbre aventurier. L'auteur commence par résumer la biographie de ce singulier savant, la rectifiant et la complétant en plusieurs points. Il est bien certain, par

exemple, que Casanova est né le 2 juillet 1725. M. Henry a retrouvé, dans les archives paroissiales de l'église Saint-Étienne, à Venise, son acte de baptême; mais la date de sa mort, donnée par MM. Brockhaus, Baschet et d'Ancona (4 juin 1798), n'est pas exacte, puisqu'il existe une lettre autographe de Casanova au comte de Waldstein datée du 18 février 1803. Ajoutons que cette lettre fait actuellement partie de la collection Morrisson, de Londres. M. Henry prouve que Casanova n'a très probablement pas été, comme il le dit, docteur en droit de l'Université de Padoue; toutefois plusieurs documents des Archives nationales viennent confirmer les *Mémoires* et ajouter de nouvelles preuves de vérité à toutes celles qu'a rassemblées la critique contemporaine.

Les trois écrits mathématiques de Casanova traitent du problème de la duplication du cube : le premier, intitulé *Solution du problème déliaque*, parut à Dresde en 1790; les deux autres ne sont que des corollaires publiés dans la même année. D'abord Casanova crut avoir donné une solution exacte du fameux problème; dans la suite, il reconnut la vérité; il ne pouvait en donner qu'une solution approchée. D'après l'énoncé du problème, le rapport du cube cherché au cube donné doit être 2; donc le rapport du côté du cube cherché au côté du cube donné doit être $\sqrt[3]{2}$. Pour Casanova, le rapport de ces deux côtés est égal à $\frac{364+94}{364} = 1,2582417$, qui, élevé au cube, donne 1,991414, valeur assez éloignée de 2. La *Solution du problème déliaque* renferme des idées philosophiques remarquables. Il en est de même de l'*Essai de critique sur les mœurs, sur les sciences et sur les arts,* des *Rêveries sur la mesure moyenne de notre année,* deux manuscrits inédits communiqués à M. Henry. L'*Isocameron,* un roman de cinq Volumes, renferme, entre mille idées bizarres, une conception précise du télégraphe électrique (1787). L'auteur termine son étude par la promesse de revenir plus longuement sur toutes ces productions rarissimes et par la publication de quelques lettres inédites.

Boncompagni (*B.*). — Sur la vie et les travaux d'Antoine-Charles Marcelin Poullet-Delisle (670-679).

Il s'agit du traducteur des *Disquisitiones arithmeticæ* de Gauss, né le 17 janvier 1778 à Janville (Eure-et-Loir), mort le 23 août 1849.

Marre (*Aristide*). — Sur huit lettres inédites du P. Claude Jaquemet : Huit lettres inédites du P. Claude Jaquemet (679-698).

Communiquées à l'éditeur par le P. Ingold, bibliothécaire de l'Oratoire. La première est adressée au P. de Byzance, la sixième au marquis de l'Hospital, les autres au P. Reyneau, toutes sur l'Algèbre et l'Arithmétique.

C. H.

ACTA MATHEMATICA, Journal rédigé par G. MITTAG-LEFFLER. Stockholm.

Tome I; 1882.

Poincaré. — Théorie des groupes fuchsiens. (1-62).

Le Mémoire de M. Poincaré a été analysé dans la première Partie du *Bulletin.*

Malmsten. — Sur la théorie des rentes viagères. (63-76).

Solution de ce problème : Déterminer la valeur d'une pension annuelle de 1fr assurée à un groupe donné de n personnes, tant que v, au moins, d'entre elles restent en vie.

Gyldén (*H.*). — Une méthode d'approximation pour le problème des trois corps. (77-92).

Le problème des trois corps a fait, au fond, peu de progrès depuis Lagrange et Laplace. M. Gyldén, dans ce Mémoire, dit être depuis quelque temps en possession d'une méthode pour trouver une solution de ce problème qui, au moins dans l'application au système solaire, satisfasse aux deux conditions suivantes : que la suite des approximations soit convergente, que jamais le temps ni des arcs croissant indéfiniment avec le temps ne se rencontrent hors des signes de fonctions périodiques. Il ajoute, cependant, que si les excentricités des orbites étaient plus grandes, ou les actions mutuelles moins inégales, cette méthode deviendrait d'une application de plus en plus difficile. Il pense qu'il faut renoncer, pour le moment, à obtenir une solution absolue, c'est-à-dire satisfaisant dans tous les cas, et pour une période illimitée, aux deux conditions ci-dessus énoncées, et se contenter d'une solution applicable à un intervalle de temps limité.

M. Gyldén se borne, dans le présent Mémoire, à faire connaître quelques-uns des principes sur lesquels sa méthode est fondée.

« Il s'agit de déterminer certaines quantités par des équations différentielles, sans que dans les résultats la variable indépendante soit en facteur, quoiqu'elle s'y introduise ainsi, quand, dans une première approximation, on annule toutes les quantités qui sont multipliées par les secondes puissances des masses perturbatrices. Dans les équations différentielles dont l'intégration donnera des valeurs approchées des inconnues, on devra avant tout conserver certaines quantités du second ordre. La plupart des équations qui se succèdent dans notre recherche sont linéaires, du second ordre, et les fonctions connues qui entrent dans ces équations peuvent être, dans une certaine mesure, choisies arbitrairement. Soit

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + X_1 y = X_0$$

une de ces équations. La fonction X_1 est connue et se compose de deux par-

ties : l'une indépendante de la masse perturbatrice, l'autre s'annulant avec cette masse. La fonction X_0 peut aussi être regardée comme connue, dans une première approximation, car elle est de la forme

$$\Phi_0 + \Phi_2 y^2 + \Phi_3 y^3 + \ldots;$$

y est une quantité de premier ordre, de même que les fonctions Φ_0, Φ_2, ..., de sorte que, en réduisant X_0 à Φ_0, nous ne négligerons que des quantités du troisième ordre. Et, si nous ajoutons à cette suite un terme $\Phi_1 y$, alors Φ_1, qui n'est multiplié que par la première puissance de la masse perturbatrice, est tellement petit, pour d'autres motifs, que le produit $\Phi_1 y$ doit être regardé comme étant lui-même du troisième ordre.

» Comme la fonction Φ_1 est, en quelque sorte, détachée de X_1, on peut, dans une certaine mesure, choisir arbitrairement X_1. Je cherche à déterminer cette fonction de telle manière que l'intégrale de l'équation

$$(2) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + X_1 y = 0$$

soit de la forme

$$y = C_1 P + C_2 (Q + l x P),$$

C_1 et C_2 étant des constantes d'intégration, P et Q des fonctions de x ne renfermant que des termes périodiques, l une constante qui restera à ma disposition. »

M. Gyldén remarque que Q et P ne peuvent être arbitraires, exprime Q en fonction de P, et montre que l'on peut disposer de l, de telle sorte que, P n'ayant que des termes périodiques, Q ait la même propriété. Il donne ensuite l'intégrale de l'équation (1)

$$y = C_1 P + C_2 (Q + l x P) - P \int X_0 Q\, dx + Q \int X_0 P\, dx + l P \int dx \int X_0 P\, dx.$$

L'examen de cette formule montre pourquoi on choisit les diverses formes employées.

S'il y a dans $X_0 Q$ ou dans $\int X_0 P\, dx$ un terme constant, le résultat renfermera un terme de $\gamma x P$. On fera disparaître ce terme en choisissant convenablement C_2, et cela sera toujours possible dans l'application au problème des trois corps.

Le produit $X_0 P$ ne renferme pas de terme constant, ou, s'il en renferme un, ce terme est d'ordre élevé et n'intervient pas dans la première approximation.

Donc $y = C_1 P + C_2 Q +$ des termes périodiques.

Si l'on calcule ensuite $X_0 P$ en conservant les termes du troisième ordre, on peut déterminer C_1 de manière à faire disparaître le terme constant; cela est toujours possible dans l'application au mouvement des planètes.

M. Gyldén donne des exemples d'équations de la forme (2) satisfaisant aux conditions imposées. Il donne successivement à P les valeurs

$$\operatorname{sn} x,\ \operatorname{cn} x,\ \operatorname{dn} x,\ \frac{d \operatorname{sn} x}{dx},\ -\frac{d \operatorname{cn} x}{dx},\ -\frac{1}{k^2}\frac{d \operatorname{dn} x}{dx},$$

et obtient les valeurs correspondantes de Q_1 et de X_1; les six équations qu'il obtient appartiennent à la classe des équations de Lamé.

Il donne un autre exemple indépendant des fonctions elliptiques en faisant

$P = e^{\lambda \sin x}$, et trouve

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (\lambda \sin x - \lambda^2 \cos^2 x) y = 0.$$

Enfin, il traite avec détails l'équation

$$\frac{d^2 y}{dv^2} + \alpha^2 \cos \lambda v . y = X_0,$$

où α et λ sont des constantes, et X_0 de la forme

$$\Phi_0 + \Phi_1 y + \Phi_2 y^2 + \ldots.$$

En posant $\lambda v = 2 \frac{\pi}{2K} x$, il met cette équation sous la forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - (2k^2 \sin^2 x - k^2) y = X,$$

dont le premier membre est identique à celui de l'équation qui correspond à $P = \operatorname{dn} x$. Il montre que l'on peut disposer des constantes de façon à éviter les termes qui renfermeraient x hors des signes de fonctions périodiques.

Le Mémoire se termine par une remarque faisant rentrer les équations étudiées dans des équations intégrées par M. Hermite, et par des considérations générales sur la portée de l'application de la méthode.

Reye. — Le problème des configurations. (93-96).

Une configuration n_i dans le plan est une figure composée de n points et de n droites, tels que chaque droite contienne i des n points et que, par chaque point, passe i des n droites. Une configuration (n_i, g_k) dans l'espace est une figure composée de n points et de n plans, tels que chacun des plans contienne i points, et que, par chaque point, passe i plans; de plus, elle contient g droites sur lesquelles sont situés k points et par lesquelles passent k plans; ainsi les plans radicaux, les points radicaux, les axes radicaux de six sphères constituent une configuration $(15_6, 20_3)$. Étudier toutes les configurations qui répondent à des nombres donnés, tel est le problème de M. Reye.

Reye. — Les configurations de l'hexaèdre et de l'octaèdre $(12_6, 16_3)$. (97-108).

Appell. — Sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y).

Soit $f(x)$ une fonction uniforme admettant un nombre fini de points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Si l'on a, dans le domaine de a_k,

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu^{(k)} (x - a_k)^\nu, \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

et dans le domaine du point ∞

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu \left(\frac{1}{x}\right)^\nu,$$

on aura

$$A_1 = \sum_{k=1}^{k=n} A_1^{(k)}.$$

Une fonction $\varphi(x)$ uniforme dans l'espace E, extérieur à des cercles arbitraires décrits des points $a_1, \ldots, a_n$ comme centre, et n'ayant pas de point singulier dans cet espace, est développable, dans l'espace E, en une série de la forme

$$\varphi(x) = A + \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} \frac{1}{(x-a_k)^\nu}.$$

Une fonction $\varphi(x)$ holomorphe dans l'espace extérieur à des cercles ayant pour centres les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et intérieur à des cercles ayant pour centres les points $b_1, b_2, \ldots, b_m$, est, dans cet espace, développable en une série de la forme

$$\varphi(x) = C + \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} B_\nu^{(k)} (x-b_k)^\nu + \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} (x-a_k)^\nu.$$

Soit

$$F(x, y) = 0$$

une équation algébrique irréductible définissant une courbe d'ordre m, de genre p, pour laquelle le point $x = \infty$ n'est pas critique; un point analytique (x, y) est l'ensemble de valeurs (x, y) vérifiant l'équation précédente; une fonction d'un point analytique est, au fond, une fonction de x; elle est uniforme si elle reprend la même valeur quand le point analytique (x, y) décrit un cycle quelconque; si (a, b) est un point analytique non critique, le domaine δ de ce point est l'ensemble des points analytiques que peut atteindre le point (x, y) en partant de (a, b), pour lesquels on a

$$|x - a| \leqq \delta;$$

si (a, b) est un point critique, les valeurs de y qui deviennent égales à b pour $x = a$ se partagent en systèmes circulaires; le domaine δ du point (a, b) relatif à l'un de ces systèmes circulaires est l'ensemble des points analytiques que peut atteindre le point (x, y) en partant de (a, b), avec une des valeurs de y appartenant à ce système circulaire, pour lesquels on a

$$|x - a| \leqq \delta.$$

Si la fonction $f(x, y)$ est *régulière* au point (a, b), on a, dans un certain domaine $\delta' < \delta$ de ce point,

$$f(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu (x-a)^\nu.$$

Si (a, b) est un *pôle* de $f(x, y)$, on a, dans un certain domaine, $\delta' < \delta$ de ce point

$$f(x, y) = \sum_{\nu=-n}^{\nu=\infty} A_\nu (x-a)^\nu;$$

$-n$ est le *degré* du pôle, A_{-1} en est le résidu. La notion de point singulier essentiel s'étend de même aux fonctions de point analytique. Tout ceci suppose que (a, b) n'est pas un point critique. Si (a, b) est un point critique, une substitution de la forme

$$x = a + x'^q$$

conduit, pour les q valeurs de y d'un système circulaire, à un développement de la forme

$$y = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \lambda_\nu x'^\nu;$$

en substituant dans $f(x, y)$, on est amené à distinguer les *branches* de la fonction en branches régulières, en branches admettant un pôle, en branches admettant un point singulier essentiel en (a, b); par exemple, un développement de la forme

$$\sum_{\nu=-n}^{\nu=\infty} A_\nu x'^\nu$$

correspond à un pôle de degré ν et dont le résidu est qA_{-1}; un développement de la forme

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu x'^\nu,$$

valable dans un certain domaine, correspond à un point singulier essentiel *isolé*, dont le résidu est encore qA_{-1}.

Ces définitions conduisent l'auteur aux propositions suivantes :

Une fonction uniforme du point analytique (x, y) et qui n'a pas d'autres points singuliers que des pôles est une fonction rationnelle de x et y.

Soit $f(x, y)$ une fonction uniforme du point analytique (x, y) ayant un nombre fini de points singuliers essentiels (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n); soient $B_1, B_2, \ldots, B_n$ les résidus relatifs à ces points; soit de plus, dans un certain domaine du point analytique $\left(x = \infty, \lim \frac{x}{y} = C_k\right)$,

$$f(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu^{(k)} \frac{1}{x^\nu} \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

on a

$$A_1^{(1)} + A_1^{(2)} + \ldots + A_1^{(m)} = B_1 + B_2 + \ldots + B_n. \tag{1}$$

Si, maintenant, on désigne par

$$u^{(i)}(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \varphi_i(x, y)\, dz \quad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

les p intégrales abéliennes normales de première espèce et par $\Theta(u_i)$ une des fonctions Θ correspondantes, pour que l'on fasse

$$X(\xi, \eta) = -\frac{d}{d\xi} \log \frac{\Theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]}{\Theta[-u^{(i)}(\xi, \eta) - h_i]},$$

où

$$h_i = C_i - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k), \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

la fonction Z [intégrale abélienne normale de la seconde espèce, infinie du premier ordre au seul point (ξ, η)], qui ne dépend pas des points arbitraires (x_k, y_k), est une fonction rationnelle du paramètre (ξ, η) ayant pour pôles les points critiques et les points (x, y), (x_0, y_0), ces derniers avec les résidus -1 et $+1$. Cette fonction $Z(\xi, \eta)$ joue dans les recherches sur les fonctions du point analytique (x, y) le même rôle que la fonction

$$\frac{1}{z - \xi} - \frac{1}{x_0 - \xi},$$

dans les recherches sur les fonctions uniformes de x; si l'on désigne par $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ les m valeurs de η qui correspondent à une valeur attribuée à ξ, on a

$$Z(\xi, \eta_1) + Z(\xi, \eta_2) + \ldots + Z(\xi, \eta_m) = \frac{1}{x - \xi} - \frac{1}{x_0 - \xi}.$$

Le théorème de M. Roch (*Journal de Crelle*, t. LXXXIV, p. 294) relatif à la décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle $R(x, y)$ est une conséquence immédiate de l'égalité (1).

Une fonction uniforme $f(x, y)$ partout régulière, sauf au point essentiel (a, b), peut se mettre sous la forme

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1.2\ldots(\nu-1)} Z^{(\nu-1)}(a, b),$$

la série étant convergente tant que le point analytique (x, y) est différent du point analytique (a, b). De même, une fonction analytique admettant les n points singuliers (a_1, b_1), (a_2, b_2) ..., (a_n, b_n) situés à une distance finie et ne coïncidant pas avec quelque point critique peut se mettre sous la forme

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu^{(k)}}{1.2\ldots(\nu-1)} Z^{(\nu-1)}(a_k, b_k).$$

Soit (a, b) un point non critique et δ un nombre positif, tel que dans le domaine δ du point (a, b) il n'y ait pas de point critique; soit de plus $f(x, y)$ une fonction du point analytique (x, y) uniforme et régulière en tous les points analytiques situés en dehors du domaine δ du point (a, b). Cette fonction est développable en une série de la forme

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu Z^{(\nu-1)}(a, b),$$

convergente en tous les points analytiques extérieurs au domaine δ.

Soit une suite de points analytiques tous différents

$$(a_1, b_1),\ (a_2, b_2),\ \ldots,\ (a_\nu, b_\nu),\ \ldots,$$

tels que

$$\lim(a_\nu, b_\nu) = (a, b)\ \ (\nu = \infty);$$

soit, d'autre part,

$$f_1(x, y),\ f_2(x, y),\ \ldots,\ f_\nu(x, y),\ \ldots$$

une suite de fonctions rationnelles de x et y, ne devenant infinies respectivement qu'aux deux points (a_ν, b_ν) et (a, b); il existe une fonction uniforme $\Phi(x, y)$ du point analytique (x, y) n'ayant d'autre point singulier essentiel que le point (a, b) et admettant pour pôles les points $(a_\nu\ b_\nu)$, de telle façon que la différence $\Phi(x, y) - f(x, y)$ soit régulière au point (a_ν, b_ν).

Soit une suite de points analytiques tous différents

$$(a_1, b_1),\ (a_2, b_2),\ \ldots,\ (a_\nu, b_\nu),\ \ldots,$$

tels que l'on ait

$$\lim(a_\nu, b_\nu), = (a, b) \quad \text{pour } \nu = \infty,$$

et une suite de nombres entiers positifs

$$m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_\nu,\ \ldots,$$

on peut former une fonction uniforme du point analytique (x, y) admettant pour point singulier essentiel le point (a, b), et pour zéros les points (a_ν, b_ν), aux degrés de multiplicité m_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, \infty)$.

Toute cette théorie, qui constitue l'extension aux fonctions uniformes d'un point analytique de propositions bien connues de la théorie des fonctions uniformes ordinaires, conduit, dans le cas où le genre p de l'équation qui lie x et y est égal à un, à des propositions relatives aux fonctions uniformes doublement périodiques; en désignant par $\theta_1(u)$ la fonction θ_1 formée avec ces deux périodes et en posant

$$Z(u) = \frac{d \log \theta_1(u)}{du}, \quad Z^{(i)}(u) = \frac{d^i \log \theta_1(u)}{du^i},$$

on pourra, au moyen de la fonction Z, former l'expression générale d'une fonction uniforme doublement périodique $f(x)$, n'ayant, dans un parallélogramme des périodes, qu'un point singulier a. Cette expression sera

$$f(x) = C + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1.2\ldots\nu} Z^{(\nu)}(a - x).$$

On peut aussi, pour ces fonctions, généraliser le théorème de M. Mittag-Leffler et le théorème de M. Weierstrass sur la décomposition en facteurs primaires.

Appell. — Développements en série dans une aire limitée par des arcs de cercle. (145-152).

Exemples simples de séries dont les termes sont des fonctions rationnelles

de x et qui ont des valeurs constantes et distinctes dans diverses régions du plan.

Schering (*E.*). — Sur la théorie des restes quadratiques. (153-170).

Le Mémoire de M. Schering, d'un caractère très élémentaire, a pour but de combler une lacune des *Disquisitiones arithmeticæ;* l'auteur y établit avec détail la théorie des résidus quadratiques pour un module composé; soit m un tel module qui, décomposé en facteurs premiers, soit égal à

$$2^{\pi_0} p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \cdots p_\mu^{\pi_\mu},$$

les p étant des nombres premiers impairs; la congruence $x^2 \equiv a \pmod{m}$ admet zéro ou $\theta(m)$ solutions suivant que a est résidu quadratique ou non-résidu quadratique de m, $\theta(m)$ est égal à 2^μ, $2^{\mu+1}$, $2^{\mu+2}$ suivant que π_0 est inférieur, égal ou supérieur à deux; soit maintenant $\varphi(m)$ le nombre de nombres premiers à m et au plus égaux à m; le produit de ces nombres est congru à $(-1)^{\frac{1}{2}\varphi(m)}$ suivant le module m; suivant que le nombre a, premier à m, est ou non résidu quadratique de m, on a

$$a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv +1 \pmod{m},$$

ou

$$a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\theta(m)} \pmod{m}.$$

Considérons le nombre de solutions de la congruence bilinéaire

$$a \equiv yz \pmod{m},$$

composées d'entiers positifs y, z inférieurs au module m (premier à a), et tels que l'on ait $y < z$; si ce nombre est $\frac{1}{2}\varphi(m)$, a est un non-résidu quadratique de m; si le nombre est moindre que $\frac{1}{2}\varphi(m)$, a est résidu quadratique, et le nombre de solutions est $\frac{1}{2}\varphi(m) - \frac{1}{2}\theta(m)$; si, a étant toujours premier à m, on désigne par $\eta(a, m)$ le nombre de solutions de la congruence

$$au + v \equiv 0 \pmod{m}$$

composées de nombre, u, v positifs, premiers à m et inférieurs à $\frac{m}{2}$, on aura

$$a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} = +1 \equiv (-1)^{\eta(a, m)} \pmod{m},$$

ou

$$a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\theta(m)} = (-1)^{\eta(a, m)} \pmod{m},$$

selon que a sera ou non résidu quadratique de m. Soit $M = m\delta$, δ étant un entier positif, et soit a un entier premier à M, soit $H(a, M)$ le nombre des restes, pris par rapport au diviseur M, des nombres

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ \left(\frac{M-1}{2}\right)a \quad (M \text{ impair}),$$

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ \left(\frac{M}{2}-1\right)a \quad (M \text{ pair}),$$

qui sont supérieurs à $\frac{M}{2}$, on aura

$$H(a, M) = \sum_{\delta} r_1\left(a, \frac{M}{\delta}\right) - \sum_{m} r_1(a, m),$$

la première sommation étant relative aux divers diviseurs δ du nombre M inférieurs à $\frac{M}{2}$, la seconde à tous les diviseurs m du même nombre supérieurs à 2.

En supposant M pair et a impair, on a $H(a, M) \equiv 0 \pmod{2}$ si $M \equiv 2 \pmod{4}$, ou si l'on a simultanément $M \equiv 0$, $a \equiv 1 \pmod{4}$; autrement $H(a, M)$ est impair. Si M est impair, $H(a, M)$ est pair ou impair, en même temps que le nombre des facteurs premiers égaux ou inégaux de M par rapport auxquels a est non résidu. C'est sur le cas particulier de ce dernier théorème où l'on suppose M premier que Gauss a fondé sa troisième preuve de la loi de réciprocité; le cas général paraît lui avoir échappé; M. Schering a communiqué le théorème général à l'Académie des Sciences de Berlin, en 1876; M. Kronecker y était arrivé de son côté, sans l'avoir publié.

Zeuthen. — Sur un groupe de théorèmes et formules de la Géométrie énumérative. (171-188).

Quand on veut déterminer le nombre de solutions d'une question algébrique, la principale difficulté que l'on rencontre se trouve dans la détermination de la multiplicité des solutions de différente nature.

Toute méthode qui permet d'éviter la considération des développements en séries qui représentent les branches de courbes auxquelles on a affaire est particulièrement précieuse. C'est une méthode de cette nature que développe M. Zeuthen; elle a pour point de départ une proposition due à M. Halphen : « Soit donné un point singulier d'une courbe algébrique où toutes les branches ont la même tangente, et désignons par ν le degré de multiplicité ponctuelle de la courbe en ce point, c'est-à-dire le nombre de points d'intersection confondus de la courbe avec une droite quelconque passant par lui, et par ν' le degré de multiplicité tangentielle, c'est-à-dire le nombre de tangentes confondues qui passent par un point quelconque de la tangente donnée, alors $\nu + \nu'$ des points d'intersection de la tangente coïncident avec le point donné, et $\nu + \nu'$ des tangentes qui passent par le point coïncident avec la tangente donnée.

M. Zeuthen transforme cette proposition de manière à lui donner une forme purement algébrique. Soit $f(x, y) = 0$ une équation homogène et du degré m_1 en x_1, x_2, homogène et du degré m_2 en y_1, y_2. Si l'on détermine par les valeurs de $\frac{x_1}{x_2}$ et de $\frac{y_1}{y_2}$ qui satisfont à cette équation les droites de deux faisceaux de centres P, Q, et si l'on choisit les droites $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, de telle façon que la droite PQ ne se corresponde pas à elle-même, l'équation proposée définit une courbe d'ordre $n = m_1 + m_2$ ayant un point m_1^{uple} en P, un point m_2^{uple} en Q; les ordres des deux discriminants $\varphi(x)$, $\psi(y)$ de l'équation $f(x, y) = 0$, par rapport à y et par rapport à x, sont respectivement

$$2m_1(m_2 - 1) \quad \text{et} \quad 2m_2(m_1 - 1).$$

Si maintenant on considère un point M de la courbe et si l'on désigne par v_1 et v_2 le nombre des points d'intersection, confondus avec M, de la courbe et des droites PM, QM, on a, par l'application du théorème de M. Halphen,

$$2(m_2 - m_1) = \Sigma(v_2 - v_1),$$

la sommation du second membre étant étendue à tous les points de la courbe. Pour chaque point M, la différence $v_2 - v_1$ est égale à la différence $\xi - \eta$ des degrés de multiplicité, dans les discriminants $\varphi(x)$, $\psi(y)$, des facteurs

$$a_2 x_1 - a_1 x_2,\ b_2 x_1 = b_1 x_2$$

qui déterminent respectivement les droites PM, QM. L'auteur déduit de ces propositions que les deux discriminants de $\varphi(x)$ et de $\psi(y)$ sont égaux au facteur ± 1 près. Dans le cas particulier d'une forme binaire du second ordre, à deux couples de variables, les deux discriminants ont les mêmes invariants. M. Zeuthen donne diverses applications qui montrent le parti que l'on peut tirer du théorème général que l'on vient d'exposer.

Goursat. — Sur un théorème de M. Hermite. (189-192).

Démonstration, au moyen de l'intégrale de Cauchy, du théorème de M. Hermite concernant les intégrales définies affectées de coupures.

Poincaré. — Mémoire sur les fonctions fuchsiennes. (193-294).

Dans un Mémoire antérieur, l'auteur a fait une étude approfondie des groupes discontinus formés par des substitutions de la forme

$$\left(z,\ \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right),$$

dont les coefficients sont réels, qui laissent inaltéré un cercle *fondamental* dont on peut supposer que l'équation est

$$|z| = 1;$$

à un tel groupe correspond une décomposition du cercle fondamental en polygones curvilignes *normaux* R tous congruents entre eux; cette décomposition est, comme on sait, l'analogue de la décomposition du plan en parallélogrammes qui est le fondement de la théorie des fonctions doublement périodiques : le but de l'auteur est maintenant de former des fonctions analogues aux fonctions Θ, c'est-à-dire des transcendantes qui se reproduisent multipliées par un facteur simple, toutes les fois qu'on fait subir à la variable z une transformation du groupe.

Les séries de la forme

$$(1) \qquad \Theta(z) = \Sigma H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$$

répondent à la question, en supposant que $H(z)$ représente une fonction rationnelle de z dont aucun infini n'est situé sur le cercle fondamental, mais d'ailleurs quelconque, que le nombre m soit un entier positif plus grand que 1 et enfin que la sommation s'étende à toutes les substitutions du groupe G : si

l'on désigne par $a_1, a_2, \ldots, a_p$ les infinis de $H(z)$, il est clair que la série (1) n'est pas convergente pour toutes les valeurs de z contenues dans la formule

$$(2) \qquad \frac{\alpha_i a_k + \beta_i}{\gamma_i a_k + \delta_i};$$

pour toute autre valeur de z, la série est absolument convergente : elle définit une fonction que M. Poincaré appelle *thêtafuchsienne*. La propriété fondamentale d'une telle fonction, qui la rapproche des fonctions Θ, est exprimée par l'équation

$$\Theta\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + {}_i}\right) = \Theta(z)(\gamma_i z + \delta_i)^{2m};$$

ses points singuliers sont : 1° les points (2), transformés des infinis de $H(z)$: ces points sont des pôles; 2° les points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$, qui eux aussi sont des pôles; 3° les points singuliers essentiels du groupe G, points situés sur le cercle fondamental et définis dans le premier Mémoire de l'auteur; ces points sont des points singuliers essentiels pour la fonction $\Theta(z)$. La classification des fonctions thêtafuchsiennes repose sur la classification des groupes fuchsiens, qui dépend elle-même des propriétés du polygone normal R_0; M. Poincaré est amené à distinguer *sept* familles de fonctions thêtafuchsiennes. Pour certaines familles, le cercle fondamental est une ligne singulière, en sorte que, alors, le développement (1) représente deux fonctions distinctes dont l'une n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental, dont l'autre n'existe qu'à l'extérieur; il suffit de considérer la première. Une telle fonction est dite de première ou de seconde espèce, suivant qu'elle a des infinis ou qu'elle n'en a pas. Pour les autres familles, les points du cercle fondamental ne sont pas tous des points singuliers essentiels; la série (1) représente alors une même transcendante dans tout le plan, partout holomorphe sauf en une infinité de points, pôles et points singuliers essentiels : ces derniers sont situés sur le cercle fondamental et constituent, sur ce cercle, un *ensemble* du second genre, c'est-à-dire tel que, en formant les *dérivés* successifs, on ne tombe jamais sur un ensemble fini. De telles fonctions ont évidemment, en général, des pôles; toutefois, M. Poincaré montre que l'on peut s'arranger de manière que les infinis se détruisent en quelque sorte et à obtenir, dans ce cas, encore des fonctions thêtafuchsiennes de seconde espèce.

Pour une fonction thêtafuchsienne, les zéros et les infinis seront connus partout, lorsqu'ils seront connus à l'intérieur du polygone R_0, si la fonction n'existe que dans l'intérieur du cercle fondamental, et dans le cas où la fonction existe dans tout le plan, s'ils sont connus à l'intérieur de l'espace $R_0 + R'_0$, R'_0 étant le polygone symétrique de R_0 par rapport au cercle fondamental. Dans le premier cas, le nombre des infinis distincts de Θ est égal au nombre des infinis de H, intérieurs au cercle fondamental; dans le second cas, le nombre des infinis distincts est égal au nombre des infinis de H augmenté de $2m$; le nombre de zéros est évalué au moyen de l'intégrale $\int \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} dz$: un résultat essentiel consiste en ce que le nombre des zéros et des infinis distincts est toujours fini.

De même que les fonctions Θ ordinaires conduisent immédiatement à l'expression de fonctions doublement périodiques, de même les fonctions thêtafuchsiennes conduisent à l'expression de fonctions uniformes qui se reproduisent par toutes les substitutions d'un groupe fuchsien : de telles fonctions sont celles

que M. Poincaré a appelées *fuchsiennes*. On obtient évidemment une fonction fuchsienne en faisant le quotient de deux fonctions thêtafuchsiennes qui correspondent à un même degré m; réciproquement, M. Poincaré établit que toute fonction fuchsienne peut être construite ainsi, et cela d'une infinité de façons.

Les singularités d'une fonction fuchsienne sont les mêmes que celles des fonctions thêtafuchsiennes au moyen desquelles on l'engendre; ainsi, il y aura des fonctions fuchsiennes qui n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental; pour ces fonctions, la circonférence de ce cercle sera une ligne singulière essentielle; d'autres existent dans tout le plan; leurs points singuliers essentiels, en nombre infini, sont situés sur la circonférence du cercle fondamental; ils ne forment pas une ligne, mais en un certain sens ils ne sont pas isolés : on ne peut pas, autour de chacun d'eux comme centre, décrire un cercle assez petit pour ne pas contenir d'autres points singuliers : ils constituent une *perfecte Menge*.

Le nombre des zéros distincts d'une fonction fuchsienne est égal à celui de ses infinis distincts; il est égal au nombre des points distincts pour lesquels la fonction prend une valeur déterminée quelconque.

Soient deux fonctions fuchsiennes distinctes $F(z)$, $F_1(z)$ qui correspondent à un même groupe fuchsien; entre ces deux fonctions, il existe une relation algébrique. Toutes les fonctions fuchsiennes qui correspondent à un même groupe s'expriment rationnellement à l'aide de deux d'entre elles x, y; ces dernières sont d'ailleurs liées par une équation algébrique.

La détermination du genre de cette équation est un problème capital, qui se trouve résolu, par des considérations de Géométrie de situation, dans le premier Mémoire de l'auteur (*Classification des groupes en genres*).

Si l'on forme les deux fonctions

$$v_1 = \sqrt{\frac{dx}{dz}}, \quad v_2 = z\sqrt{\frac{dx}{dz}},$$

on aura

$$\frac{1}{v_1}\frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{1}{v_2}\frac{d^2 v_2}{dx^2} = \frac{4\dfrac{d^2x}{dz^2}\dfrac{dx}{dz} - 3\left(\dfrac{d^2x}{dz^2}\right)^2}{4\left(\dfrac{dx}{dz}\right)}.$$

Le troisième membre de cette double égalité est une fonction fuchsienne de z : c'est donc une fonction rationnelle $\varphi(x, y)$ de x et de y. Il suit de là que les deux intégrales de l'équation linéaire

$$(3) \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} = v\,\varphi(x, y)$$

sont

$$v = v_1, \quad v = v_2.$$

Ainsi, la considération de la fonction fuchsienne x permet d'intégrer l'équation linéaire (3) dont les coefficients sont des fonctions rationnelles du point analytique (x, y). On voit que la variable indépendante x s'exprime par une fonction fuchsienne de z, c'est-à-dire du rapport des intégrales. Quand on connaît cette fonction fuchsienne, on en déduit les intégrales elles-mêmes, à l'aide des formules précédentes.

Le reste du Mémoire de M. Poincaré est rempli par l'étude particulière des diverses familles de fonctions fuchsiennes, suivant le genre auquel elles appar-

tiennent, étude dans le détail de laquelle nous ne pouvons entrer ici. Le cas où le genre est nul, et où par conséquent toutes les fonctions fuchsiennes s'expriment rationnellement au moyen de l'une d'elles, offre un intérêt particulier. M. Poincaré fait l'étude approfondie des fonctions fuchsiennes appartenant à la *première famille* et au genre zéro. Il rencontre là, comme cas très particulier, ces fonctions fuchsiennes auxquelles donne naissance l'équation hypergéométrique de Gauss, fonctions dont l'existence avait été signalée en 1872. M. Schwarz (*Journal de Borchardt*, t. 75) avait reconnu qu'elles étaient uniformes et qu'elles admettent un cercle comme ligne singulière essentielle.

Bourguet. — Note sur les intégrales eulériennes. (295-296).

On a, d'après M. Heine,

$$\Gamma(a) = \frac{1}{2i\sin\alpha\pi}\int z^{a-1}e^{z}dz,$$

l'intégration étant faite le long d'un contour qui contient l'origine et s'étend indéfiniment vers les x négatifs, ce contour pouvant ne pas être fermé.

M. Bourguet prend un contour formé de deux droites inclinées passant par l'origine et d'un petit cercle ayant l'origine pour centre; dans une autre Note, il prend une parabole ayant son foyer à l'origine; il parvient ainsi à l'expression de diverses intégrales définies.

Picard. — Sur une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires et sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables par ces substitutions. (297-326).

Le but que se propose M. Picard dans ce Mémoire est de trouver des analogues, dans le cas de deux variables, aux fonctions thêtafuchsiennes de M. Poincaré, afin d'en déduire des fonctions de deux variables indépendantes, analogues aux fonctions fuchsiennes, qui restent invariables pour toutes les substitutions d'un groupe, nécessairement discontinu.

C'est la formation d'un tel groupe qu'il faut d'abord expliquer :

L'auteur prend pour point de départ une forme quadratique ternaire

$$\begin{aligned} &axx_0 + a'yy_0 + a''zz_0 + byz_0 \\ &\quad + b_0y_0z + b'zx_0 + b'_0z_0x + b_0xy_0 + b''_0yx_0 = f(x, y, z, x_0, y_0, z_0); \end{aligned}$$

dans cette forme, les variables x, y, z sont des quantités complexes, et les variables x_0, y_0, z_0 les quantités conjuguées; les coefficients a, a', a'' sont des entiers réels, les coefficients b, b', b'' sont des entiers complexes qu'on peut supposer formés au moyen des racines, supposées imaginaires, d'une équation du deuxième degré à coefficients entiers; les coefficients b_0, b'_0, b''_0 sont les quantités conjuguées de b, b', b''; si l'on effectue une substitution linéaire, à coefficients complexes, sur les variables x, y, z et que l'on effectue en même temps sur les variables x_0, y_0, z_0 la substitution linéaire que l'on déduit de la première en remplaçant chaque coefficient par la quantité conjuguée, la forme f se change en une nouvelle forme analogue; pour une telle substitution le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b''_0 \\ b'_0 & a' & b \\ b' & b_0 & a'' \end{vmatrix}$$

joue le rôle d'invariant, il se reproduit multiplié par le produit des déterminants des deux substitutions partielles, ou, si l'on veut, par le carré du module d'une de ces substitutions. Par une transformation très élémentaire, on peut substituer à la forme $f(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$ la forme

$$(1) \qquad \alpha u u_0 + \beta v v_0 + \gamma w w_0,$$

où u_0, v_0, w_0 sont encore les quantités conjuguées de u, v, w et où les coefficients α, β, γ sont des nombres entiers dont aucun n'est nul ; cela suppose, toutefois, que l'invariant δ est lui-même différent de zéro; la forme f est *définie* ou *indéfinie*, suivant que les trois quantités α, β, γ sont de même signe ou de signe contraire. Cela posé, l'étude des substitutions de la nature de celles que l'on a décrites plus haut et qui changent la forme f en elle-même se ramène à l'étude des substitutions à coefficients entiers de même nature que b, b', b'', par lesquelles la forme (1) se reproduit; leur nombre est fini ou infini suivant que la forme f est définie ou indéfinie; plaçons-nous dans le deuxième cas et supposons

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma = -g < 0.$$

Si l'on désigne par M_1, P_1, R_1, M_2, P_2, R_2, M_3, P_3, R_3 les coefficients d'une telle substitution, ou plutôt de la substitution partielle à effectuer sur les variables non affectées de l'indice zéro, il est clair que l'ensemble des substitutions, telles que

$$(2) \qquad X = \frac{M_1 x + P_1 y + R_1}{M_3 x + P_3 y + R_3}, \quad Y = \frac{M_2 x + P_2 y + R_2}{M_3 x + P_3 y + R_3},$$

constitue un groupe : or M. Picard démontre que *ce groupe est discontinu pour tout système de valeurs x et y telles que l'on ait*

$$(3) \qquad \alpha(x'^2 + x''^2) + \beta(y'^2 + y''^2) - g < 0,$$

en posant

$$x = x' + ix'', \quad y = y' + iy''.$$

On voit, d'ailleurs, de suite que si le système des variables x, y est à l'intérieur du domaine D défini par l'inégalité (3), il en sera de même du système des variables transformées x, y; dans les mêmes conditions, on n'obtient jamais pour ces dernières variables des valeurs indéterminées. Cela établi, dans le groupe des substitutions (2), M. Picard considère particulièrement le sous-groupe formé avec les substitutions (2) dont le déterminant est égal à $+1$; c'est à ce sous-groupe que se rapportent les propositions qui suivent, où l'on sous-entend que les équations (2) définissent une substitution quelconque de ce sous-groupe.

La série

$$\sum \frac{1}{\text{mod.}\,(M_3 x + P_3 y + R_3)^{3m}},$$

étendue à toutes les substitutions du groupe, *en supposant le système x, y à l'intérieur du domaine D, est convergente pour $m \geqq 2$*; M. Picard donne deux démonstrations de cette proposition, essentielle pour son objet; la seconde démonstration, qui fournit seule la limite inférieure 2, est fort remarquable par sa généralité.

Cela posé, soit $R(x, y)$ une fonction rationnelle de x et y qui reste continue pour tous les systèmes x, y situés à l'intérieur du domaine, telle par exemple qu'un polynôme entier en x, y, ou que la fonction

$$\frac{1}{a - x - y},$$

a étant une quantité positive inférieure à $\frac{g(\beta + \alpha)}{\alpha\beta}$: la série

$$(4) \qquad \sum R\left(\frac{M_1 x + P_1 y + R_1}{M_3 x + P_3 y + R_3}, \frac{M_2 x + P_2 y + R_2}{M_3 x + P_3 y + R_3}\right) \frac{1}{(M_3 x + P_3 y + R_3)^{3m}},$$

étendue à toutes les substitutions du groupe, sera absolument convergente, en supposant le système x, y à l'intérieur du domaine D : la série (2) définit, à l'intérieur de ce domaine, une fonction $P(x, y)$ uniforme et continue, analogue aux fonctions thêtafuchsiennes de M. Poincaré, et jouissant, relativement à toute substitution du sous-groupe considéré, de la propriété que définit l'équation suivante

$$P\left(\frac{M_1 x + P_1 y + R_1}{M_1 x + P_3 y + R_3}, \frac{M_2 x + P_2 y + R_2}{M_3 x + P_3 y + R_3}\right) = (M_3 x + P_3 y + R_3)^{3m} P(x, y).$$

Le quotient de deux fonctions P fournit enfin une fonction uniforme des deux variables indépendantes x, y, définie dans le domaine D et se reproduisant quand on effectue sur x, y une substitution quelconque du groupe considéré.

Fuchs. — Sur les équations différentielles linéaires homogènes dont les intégrales vérifient des relations homogènes d'un degré supérieur au premier. (321-362).

Soit

$$(1) \qquad \frac{d^3 y}{dz^3} + p\frac{dy^2}{dz^2} + q\frac{dy}{dz} + ry = 0$$

une équation linéaire du troisième ordre à coefficients rationnels en z; M. Fuchs suppose qu'elle appartient à ce type d'équations, qu'il a appris à connaître, telles que les intégrales, aux environs d'un point critique a, puissent être mises sous la forme

$$(z - a)^r \mathfrak{P}(z - a),$$

r étant un nombre rationnel et $\mathfrak{P}(z - a)$ une série procédant suivant les puissances entières et positives de $z - a$. Suivant l'habitude, $z - \infty$ doit être remplacé par $\frac{1}{z}$.

Il suppose ensuite que, entre les éléments y_1, y_2, y_3 d'un système fondamental d'intégrales, il existe une relation de la forme

$$(2) \qquad f(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

le premier membre étant une fonction entière et homogène de y_1, y_2, y_3, et l'équation étant supposée irréductible. Une première conséquence consiste en ce que le hessien de la forme f est la racine d'une fonction rationnelle de z.

M. Fuchs établit que, si le degré n de l'équation (2) est égal à 2, l'équation coïncide avec l'équation différentielle linéaire du troisième ordre dont les intégrales sont les carrés des intégrales d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients rationnels.

Si n est plus grand que 2, les intégrales de l'équation (1) sont des fonctions algébriques de z; il y a alors lieu de distinguer trois cas :

1° Si le genre p de l'équation algébrique (2) est plus grand que 1, le nombre des racines réduites de l'équation algébrique à laquelle satisfait l'intégrale générale de l'équation (1) est au plus égal à 4.

2° Si $p = 1$, le nombre des racines réduites est 2, 3, 4 ou 6.

3° Si p est nul, les intégrales de l'équation (1), abstraction faite d'un facteur commun à toutes, facteur qui est la racine d'une fonction rationnelle, sont des fonctions rationnelles entières et homogènes du $n^{\text{ième}}$ degré d'un système fondamental d'intégrales ξ_1, ξ_2, d'une équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre à coefficients rationnels, algébriquement intégrable.

D'ailleurs toute équation différentielle linéaire (1) qui est algébriquement intégrable jouit de cette propriété que, entre les éléments y_1, y_2, y_3 d'un système fondamental d'intégrales, existe une relation telle que (2); par conséquent, les résultats précédemment énumérés épuisent tous les cas possibles dans lesquels une équation différentielle linéaire homogène peut être intégrée algébriquement.

Bourguet. — Sur quelques intégrales définies. (363-367).

Hermite. — Sur une relation donnée par M. Cayley dans la théorie des fonctions elliptiques. (368-370).

Démonstration de la formule

$$-k^{12}\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,r\,\mathrm{sn}\,s + \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}\,r\,\mathrm{cn}\,s = \frac{1}{k^2}\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{dn}\,r\,\mathrm{dn}\,s - \frac{k'^2}{k^2},$$

où l'on suppose $u + v + r + s = 0$, déduite des formules

$$\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{sn}(x+a) = \frac{1}{k^2\,\mathrm{sn}\,a}\,\mathrm{P},$$

$$\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{cn}(x+a) = \frac{\mathrm{dn}\,a}{k^2\,\mathrm{sn}\,a}\,\mathrm{P},$$

$$\mathrm{dn}\,x\,\mathrm{dn}(x+a) = \mathrm{dn}\,a - \frac{\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{sn}\,a}\,\mathrm{P},$$

où

$$\mathrm{P} = \mathrm{Z}(x) - \mathrm{Z}(x+a) + \mathrm{Z}(a).$$

Netto. — Sur la théorie des discriminants. (371-400).

Le Mémoire de M. Netto se rattache à quelques remarques faites par M. Kronecker, dans ses *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*. Il contient d'abord une recherche préliminaire sur la possibilité de l'égalité entre quelques-unes des 1, 2, ..., n expressions que l'on obtient en permutant de toutes les manières possibles des variables données $x_1, x_2, \ldots, x_n$

dans une fonction linéaire de ces quantités à coefficients indéterminés. Seule, l'égalité entre les variables a une influence. Toute autre relation algébrique entre les variables n'en a aucune. L'auteur établit ensuite que l'égalité de valeurs conjuguées de toutes les fonctions d'un genre ne peut être obtenue également que si quelques-unes des variables données sont égales.

Ceci posé, si l'on considère une équation spéciale et toutes les fonctions d'un genre G formé avec les racines de cette équation, le diviseur du genre G sera, par définition, le plus grand commun diviseur entre les discriminants de toutes ces fonctions; il n'y a de diviseur du genre (ne se réduisant pas à un nombre entier) que s'il existe des transpositions qui paraissent dans le groupe qui caractérise l'équation spéciale que l'on considère et qui ne paraissent pas dans le sous-groupe déterminé par le genre G.

D'après cela, ce problème: Trouver tous les genres qui n'ont pas de diviseurs du genre, revient à cet autre : Trouver chaque groupe ayant des sous-groupes qui contiennent toutes les transpositions du groupe. Deux cas peuvent se présenter : ou bien le groupe cherché ne contient aucune transposition, et alors aucun genre formé à l'aide des racines de l'équation caractérisée par le groupe n'a de diviseur du genre, et inversement; de sorte que tous lès groupes ne contenant pas de transpositions répondent à la question : ce premier cas se présente dans les genres alternés, cycliques, métacycliques, demi-métacycliques; ou bien le groupe cherché contient des transpositions, et alors, pour obtenir tous les groupes qui répondent à la question, M. Netto montre qu'il suffit de former, de toutes les manières possibles, une suite d'équations irréductibles

$$g[x, x', \ldots, x^{(\nu)}] = 0, \quad g[x', \ldots, x^{(\nu)}] = 0, \quad g[x^{(\nu)}] = 0,$$

dont la première soit une équation genérale, et d'éliminer entre elles les paramètre $x', \ldots, x^{(\nu)}$; le groupe de l'équation résolvante répond chaque fois à la question. On peut aussi former ce groupe directement.

On peut, sans difficulté, étendre ces recherches sur les groupes, en considérant, au lieu de transpositions (x_1, x_2), d'autres substitutions de types déterminés, par exemple du type (x_1, x_2, x_3).

M. Netto démontre, en terminant, divers théorèmes, parmi lesquels nous signalerons le suivant :

Soit φ une fonction entière ρ-valente de n éléments, ρ étant plus grand que n; soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$ ces ρ valeurs; soit S le groupe symétrique des n éléments; appliquons toutes les substitutions de S à la suite $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$; les résultats pourront être regardés comme des permutations des éléments $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$, et leur ensemble constitue un groupe Σ : *ce groupe ne contient aucune substitution cyclique dont l'ordre soit un nombre premier.*

Tome II, 1883.

Goursat. — Sur une classe de fonctions représentées par des intégrales définies. (1-70).

Soit $z = f(x, u)$ une fonction de deux variables indépendantes x, u, jouissant des propriétés suivantes. Tout d'abord, elle admet, pour chaque système de valeurs des variables, un nombre fini ou infini de déterminations, mais qui

sont telles que le rapport de deux quelconques d'entre elles est une constante. Si x est supposé constant, z considéré comme fonction de u admet, pour cette variable, un nombre limité m de valeurs singulières $v_1, v_2, \ldots, v_m$ dont les n premières $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ne dépendent pas de x, dont les p autres, $u_1, u_2, \ldots, u_p$ dépendent, au contraire, de cette variable et lui sont liées par l'équation $\Phi(x, u) = 0$. En donnant à u une valeur particulière constante, z devient une fonction de x; M. Goursat admet qu'elle n'ait pas d'autres points critiques que ceux que l'on fait correspondre à cette valeur de u par l'équation $\Phi(x, u) = 0$; telle est, par exemple, la fonction

$$z = (u - a_1)^{b_1^{-1}} (u - a_2)^{b_2^{-1}} \ldots (u - a_n)^{b_n^{-1}}$$
$$\times [\varphi_1(x, u)]^{\lambda_2^{-1}} [\varphi_2(x, u)]^{\lambda_2^{-1}} \ldots [\varphi_q(x, u)]^{\lambda_q^{-1}} \Psi(x, u),$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$ étant des polynômes entiers en u de degrés $m_1, m_2, \ldots, m_q$ dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de x et $\Psi(x, u)$ désignant une fonction holomorphe de x et de u; les valeurs singulières de u qui dépendent de x sont données par l'équation

$$\Phi(x, u) = \varphi_1(x, u)\varphi_2(x, u) \ldots \varphi_q(x, u) = 0,$$

et l'on a

$$p = m_1 + m_2 + \ldots + m_q.$$

L'objet de M. Goursat est l'étude des intégrales de la forme

$$\int z\, du,$$

prises entre deux points singuliers, le long de la droite qui joint ces points. En général, le symbole (CD) désigne la valeur de l'intégrale rectiligne $\int z\, du$ prise entre les deux points C, D.

Considérons d'abord une intégrale rectiligne $(a_i a_h)$, et supposons qu'elle ait un sens, tant que le chemin rectiligne ne contient aucun autre des points pour lesquels la fonction $f(x, u)$ cesse d'être holomorphe; cette intégrale est une fonction de x et c'est cette fonction dont l'auteur cherche les propriétés : il apprend d'abord quel système de coupures on doit pratiquer dans le plan pour la rendre holomorphe. L'ensemble des valeurs de x telles que, parmi les p valeurs de u, déduites de l'équation $\Phi(x, u) = 0$, il y en ait une ou plusieurs situées sur la droite $a_i a_h$, forme, en général, sur le plan, un nombre fini ou infini de portions de courbes dont chacune joue le rôle de coupure pour l'intégrale considérée; ces coupures sont dites de première espèce. Si, pour une valeur donnée de x non située sur les coupures, on choisit la valeur de la fonction z que l'on prend dans l'intégration, l'intégrale $(a_i a_h)$ définit, quand on fait varier x à partir de cette valeur et quand on associe les valeurs de z de façon qu'elles se suivent d'une manière continue, une fonction analytique de la variable x que l'on peut continuer tant que l'on ne rencontre pas de coupures; si l'on revient ainsi au point de départ, on retrouvera la valeur initiale de $(a_i a_h)$ ou cette valeur multipliée par une constante, la seconde circonstance ne pouvant se présenter que dans le cas où le contour décrit par x renferme quelque coupure à son intérieur; il faut pour cela qu'il y ait des coupures qui ne s'étendent point à l'infini; on complétera alors le système de coupures (C) de première espèce par des coupures de seconde espèce (C') s'étendant à l'infini et

pratiquées de telle sorte qu'aucun contour fermé ne puisse, sans les traverser, enfermer une coupure de première espèce.

Considérons maintenant les intégrales de la forme $(a_i u_h)$; il faut d'abord définir les fonctions u de x d'une façon précise; en partant de l'équation

$$\Phi(x, u) = 0,$$

on peut construire dans le plan des x un système de coupures C_1, grâce auxquelles les p racines u de cette équation deviennent des fonctions holomorphes de x : ce sont ces fonctions que M. Goursat désigne par $u_1, u_2, \ldots, u_p$; ceci posé, soient u_h l'une de ces valeurs et a_i l'une des valeurs critiques indépendantes de x; admettons que la droite $a_i u_h$ ne contienne aucune autre valeur singulière et que l'intégrale $(a_i u_h)$ ait un sens; la variable x décrivant un chemin quelconque ne rencontrant pas les coupures C_1, on pourra continuer la fonction $(a_i u_h)$ tant que le segment de droite $a_i u_h$ ne contiendra aucune autre valeur singulière, et de la même façon que précédemment, on est amené à définir un système de coupures de première espèce C', qui peuvent d'ailleurs coïncider totalement ou en partie avec les coupures C_1 et un système de coupures de seconde espèce C'', de manière à rendre holomorphe, dans le plan découpé, la fonction $(a_i u_h)$; au point a_i, on peut maintenant associer les différents points u_h et former ainsi p intégrales; on voit ici le rôle des coupures C_1, quand elles ne coïncident pas avec les coupures C' : en les traversant, on passe d'une intégrale $(a_i u_h)$ à une autre intégrale $(a_i u_h)$. Le lecteur pourra facilement étendre ces considérations aux intégrales de la forme (u_i, u_h).

Ceci posé, admettons que, sauf pour des valeurs de x formant une ou plusieurs courbes dans le plan des x, il n'y ait pas trois des m points critiques $v_1, v_2, \ldots, v_m$ qui soient en ligne droite et que les $\frac{m(m-1)}{2}$ intégrales $(v_i v_h)$ aient un sens; l'ensemble des valeurs de x, pour lesquelles trois points v sont en ligne droite constituent l'ensemble des coupures de première espèce; que l'on complète, pour chaque intégrale, ces coupures par un système de coupures de seconde espèce; ce découpage pratiqué dans chaque portion du plan, chaque intégrale $(v_i v_h)$ est une fonction uniforme de x, bien définie dès que l'on aura choisi (pour chaque portion) la valeur de z que l'on prend dans l'intégration.

Le but final que poursuit M. Goursat est la réponse à cette question : « Que deviennent ces fonctions quand on fait parcourir à la variable un chemin quelconque? »

Il montre que, partant d'un point avec une fonction, on arrive à un autre point du plan, avec une valeur qui est une fonction linéaire à coefficients constants des $\frac{m(m-1)}{2}$ fonctions qui répondent à la région du plan où se trouve le point d'arrivée; d'ailleurs, ces $\frac{m(m-1)}{2}$ fonctions s'expriment linéairement au moyen de $n-1$ d'entre elles, qui constituent un système *fondamental*, dont M. Goursat explique la formation; finalement, il parvient à ce théorème :

Toutes les intégrales définies $(v_i v_h)$, formées comme il a été dit plus haut, satisfont à une même équation différentielle linéaire d'ordre $m-1$ à coefficients constants.

Il établit ensuite des règles pour la formation de cette équation et donne de nombreux et intéressants exemples. Enfin, dans la dernière partie de son Mémoire, il indique diverses voies dans lesquelles on peut s'engager pour généraliser les propositions précédentes et étudie en particulier certaines intégrales doubles qui se présentent dans la théorie des intégrales hypergéométriques de deux variables.

Appell. — Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes. (71-86).

I. Soient

$$(1) \qquad f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots, f_\nu(x, y), \ldots$$

une suite de fonctions analytiques uniformes des deux variables indépendantes x et y possédant la propriété suivante : Pour toutes les valeurs de ν supérieures à un entier positif μ, on peut assigner un nombre positif a_ν tel que la fonction $f_\nu(x, y)$ reste holomorphe tant que les modules de x et de y restent inférieurs à a_ν; de plus, ce nombre a_ν augmente indéfiniment avec ν. On peut alors former une fonction uniforme $F(x, y)$ des variables indépendantes x et y n'ayant à distance finie d'autres points singuliers que ceux des fonctions (1) et telles que la différence

$$F(x, y) - f_\nu(x, y)$$

soit régulière en tous les points singuliers de $f_\nu(x, y)$, à l'exception de ceux de ces points singuliers qui peuvent appartenir à certaines autres des fonctions (1).

II. Soient

$$(2) \qquad g_1(x, y), g_2(x, y), \ldots, g_\nu(x, y), \ldots$$

une suite de fonctions entières de x et y possédant la propriété suivante : Pour toutes les valeurs de x supérieures à un entier positif μ, on peut assigner un nombre positif a_ν tel que la fonction $g_\nu(x, y)$ ne s'annule pour aucun système de valeurs de x et y dont les modules restent inférieurs à a_ν; de plus, ce nombre a_ν augmente indéfiniment avec ν. Alors, en désignant par

$$k_1, k_2, \ldots, k_\nu, \ldots$$

une suite d'entiers positifs, on peut former une fonction entière $G(x, y)$ de x et y, s'annulant pour toutes les valeurs de x et y, qui annulent la fonction $g(x, y)$, de telle façon que le quotient

$$\frac{G(x, y)}{[g(x, y)]^{k_\nu}}$$

reste fini et différent de zéro pour toutes ces valeurs, sauf pour celles d'entre elles qui annulent en même temps certaines autres des fonctions entières (2).

Cette fonction $G(x, y)$ est donnée par la formule

$$G(x, y) = G_1(x, y)\, G_2(x, y),$$

où

$$G_1(x, y) = \prod_{\nu=1}^{\nu=\mu} [g_\nu(x, y)]^{k_\nu},$$

$$G_2(x, y) = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} [g_\nu(x, y)]^{k_\nu} e^{\gamma_\nu(x, y)},$$

en désignant par $\gamma_\nu(x, y)$ un polynôme convenable.

L'auteur applique ce théorème à la formation de fonctions de deux variables simplement périodiques.

Crone. — Sur une espèce de courbes symétriques de la sixième classe. (31-96).

Les recherches de l'auteur ont pour point de départ la considération d'une courbe symétrique du sixième ordre et de la sixième classe qui est le contour apparent d'une surface du quatrième ordre à conique cuspidale, vue d'un point quelconque sur un plan quelconque. Cette courbe, sans tangentes doubles ni points doubles, a huit tangentes d'inflexion symétriques deux à deux et huit points d'inflexion aussi symétriques deux à deux. Si le nombre de tangentes singulières est augmenté, soit d'une tangente double, soit d'une tangente d'inflexion, tandis que la classe de la courbe reste la même, on a des formes spéciales, savoir : une courbe du quatrième ordre à deux points de rebroussement mais sans points doubles, et une courbe du troisième ordre sans points doubles ni points de rebroussement.

M. Crone montre que les courbes symétriques de la sixième classe et du sixième ordre à huit tangentes d'inflexion sont les courbes générales types, c'est-à-dire que toutes les courbes douées des mêmes nombres plückériens pourront être transformées en des courbes symétriques par une transformation homographique.

La courbe symétrique générale et les deux formes spéciales ont entre elles la relation suivante : si l'on fait tourner une de ces dernières courbes autour de son axe de symétrie, le contour apparent de la surface de révolution vu d'un point quelconque sera toujours une des trois courbes.

Poincaré. — Sur les fonctions de deux variables. (97-113).

Extension aux fonctious de deux variables de ce théorème établi par M. Weierstrass pour les fonctions d'une seule variable : si $F(x)$ est une fonction méromorphe dans toute l'étendue du plan, on peut le mettre sous la forme du quotient de deux fonctions entières.

Picard (*E.*). — Sur des fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires. (114-135).

Si l'on considère les intégrales définies de la forme

$$\int_g^h \frac{dt}{\sqrt[3]{t(t-1)(t-x)(t-y)}},$$

où g, h désignent deux des quantités $0, 1, x, y, \infty$, ces expressions regardées comme des fonctions de x et y satisfont aux trois équations linéaires simultanées aux dérivées partielles :

$$\begin{aligned} &9x(x-1)(x-y)r \\ &\quad = (-5x^2+4xy+3x+2y)3p - 3y(1-y)q + (x-y)z, \\ &\qquad\qquad 3(x-y)s = p-q, \\ &9y(y-1)(y-x)t \\ &\quad = -3x(1-x)p + (-5y^2+4xy+3y+2x)q + (y-x)z. \end{aligned}$$

Ces équations ont trois solutions communes linéairement indépendantes.

M. Picard établit que, en désignant par ω_1, ω_2, ω_3 trois solutions convenables, les équations

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u, \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = v$$

donnent, pour x et y, des fonctions uniformes de u et v, fonctions qui ne seront définies, si l'on pose $u = u' + iu''$ et $v = v' + iv''$, que pour les valeurs de u et v satisfaisant à l'inégalité

$$2v' + u'^2 + u''^2 < 0.$$

Ces fonctions x et y restent invariables quand on effectue sur u et v une infinité de substitutions linéaires. Les substitutions fondamentales de ce groupe sont

$$(S_1) \quad \begin{cases} U = \lambda^2 u - (\lambda - 1), \\ V = v + (\lambda - \lambda^2)u - (1 - \lambda^2); \end{cases}$$

$$(S_2) \quad \begin{cases} U = \lambda^2 u + (1 - \lambda^2), \\ V = v + (1 - \lambda^2)u - (1 - \lambda^2; \end{cases}$$

$$(S_3) \quad \begin{cases} U = \dfrac{u}{-2\lambda + (\lambda^2 - 1)v}, \\ V = \dfrac{-\lambda v + \lambda^2 - 1}{-2\lambda + (\lambda^2 - 1)v}, \end{cases}$$

où $\lambda = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. L'auteur termine en indiquant l'intérêt que peuvent présenter ces fonctions x et y dans l'étude des fonctions abéliennes auxquelles conduit la relation algébrique entre z et t

$$z^3 = t(t-1)(t-x)(t-y),$$

relation pour laquelle le nombre caractéristique p est égal à 3; les fonctions de u et de v définies précédemment jouent, dans la théorie de ces fonctions abéliennes, le même rôle que la fonction modulaire dans la théorie des fonctions elliptiques.

Valentiner. — Sur la théorie des courbes dans l'espace. (136-230).

La première Section de ce Mémoire comprend divers théorèmes sur lesquels seront fondées les recherches ultérieures de l'auteur; un certain nombre de ces propositions sont connues, mais démontrées d'une façon qui appartient à M. Valentiner. D'autres sont nouvelles; nous signalerons, en particulier, l'étude qu'il fait de la question suivante :

Sur une courbe plane φ_q de degré q, on donne $mq+k$ points $\alpha(k<q)$, dont aucun ne coïncide avec un point double; une courbe plane du $n^{\text{ième}}$ ordre $(n>m)$ qui passe par les points α peut être assujettie à passer par x points arbitraires de φ_n; quelle est la plus grande valeur que l'on puisse donner à x et quelle position occupent alors les points α? Dans la seconde Section, l'auteur traite de la représentation des courbes gauches; il prend pour point de départ le mode de correspondance avec les courbes planes introduit par M. Cayley, correspondance obtenue, comme on sait, au moyen d'un cône et d'un monoïde; tel a été aussi le point de départ de M. Halphen et de M. Noether dans leurs Mémoires couronnés par l'Académie des Sciences de Berlin.

En désignant par

$$\varphi_m - a\varphi_{m-1} = 0$$

l'équation d'un monoïde, où φ_m et φ_{m-1} sont les premiers membres des équations de cônes de degrés respectifs m, $m-1$, qui ont un même sommet, nous appellerons premier cône le cône φ_m, second cône le cône φ_{m-1}. Cela posé, l'auteur établit les propositions suivantes :

« Si l'on considère un cône ayant pour sommet un point arbitraire α et contenant les droites qui passent par le point et rencontrent une courbe gauche C_n en deux points, il y aura toujours un monoïde ayant pour sommet le point α et admettant ce cône comme second cône. »

« Si le nombre h des points doubles d'une courbe plane du $n^{\text{ième}}$ ordre est $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$, cette courbe plane est la projection d'une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre; si, au contraire, on a $h \leqq \frac{(n-2)(n-3)}{2}$, ceci n'a lieu que dans le cas où les points doubles sont tels qu'une courbe du $(n-4)^{\text{ième}}$ ordre qui passe par $h-1$ de ces points passe aussi par le $h^{\text{ième}}$. »

Dans la troisième Section, l'auteur traite des rayons doubles (droites qui rencontrent la courbe en deux points), en particulier de l'ordre minimum d'un cône qui contient tous les rayons doubles issus d'un point arbitraire, et du nombre de ces droites qu'un cône doit contenir pour les contenir toutes; voici une des propositions auxquelles parvient M. Valentiner :

Quand une courbe gauche c_n admet $h=d-x$ points doubles apparents, on peut toujours faire passer par les rayons doubles un cône du $m^{\text{ième}}$ ordre, lequel peut encore être assujetti au moins à x conditions si l'on a

$$d = \frac{m(m+3)}{2} + \frac{(n-m-2)(n-m-3)}{2}, \quad n-2 > m \geqq \frac{n-2}{2}.$$

Voici maintenant les principaux résultats qui sont contenus dans la quatrième Section, où l'on s'occupe des points d'intersection des courbes et des surfaces.

« Si, par une courbe gauche c_n qui admet h points doubles apparents, on peut faire passer deux surfaces F_p, F_q du $p^{\text{ième}}$ et du $q^{\text{ième}}$ ordre, et si ces deux surfaces se coupent, en dehors de c_n, suivant une courbe irréductible c_{pq-n}, cette

condition, qu'une surface F_{p+q-4} du $(p+q-4)^{\text{ième}}$ ordre doive passer par c_n, équivaut à

$$(p+q-4)n - \left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1\right] + 1$$

conditions simples.

» Sous ces mêmes conditions, la surface F_{p+q-4}, si elle contient tous les points d'intersection de c_n et de c_{pq-n} moins un, contient aussi ce dernier point. »

C'est l'analogue d'un théorème bien connu de M. Cayley pour les courbes planes.

Enfin la dernière Section contient de nombreux théorèmes relatifs à diverses conditions auxquelles on peut assujettir une courbe gauche.

Ajoutons enfin que, dans ce Mémoire, M. Valentiner n'a fait que reproduire et développer les résultats contenus dans sa dissertation inaugurale : *Bidrag til Raumcurvenes Theori,* qui remonte à l'année 1881.

Mellin (*II.*). — Sur la fonction transcendante $Q(x) = \Gamma(x) - P(x)$. (231-232).

En posant

$$R(x) = e^{-2}2^x + e^{-3}3^x + e^{-4}4^x + \ldots,$$

on a

$$Q(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-\lambda)}{1.2.3\ldots\lambda} A_\lambda R(x-1-\lambda),$$

où les A_λ sont des coefficients qui peuvent se calculer par la formule récurrente

$$A_\lambda + \lambda A_{\lambda-1} = e.$$

Elliot. — Sur une équation linéaire du second ordre à coefficients doublement périodiques. (233-260).

« L'objet de ce travail est l'intégration d'une équation différentielle à coefficients doublement périodiques qui comprend comme cas particulier l'équation de Lamé. Dans une Lettre adressée à M. Heine (*Journal de Crelle,* t. 89), M. Hermite, à qui l'on doit la solution complète de l'équation de Lamé (*Annali di Matematica,* série II, t. IX), en a achevé l'étude par l'examen du cas où le module est égal à l'unité, et a fait connaître en même temps trois équations linéaires qui ont pour intégrales les fonctions doublement périodiques de seconde espèce. C'est l'une de ces équations dont je m'occupe ici ; elle peut s'écrire

$$(1) \qquad \frac{d^2X}{dz^2} - 2m\frac{\lambda'(z)}{\lambda(z)}\frac{dX}{dz} = [(n-m+1)(n+m)k^2\lambda^2(z) + h_1]X,$$

m et n étant des entiers positifs et $\lambda(z)$ la fonction elliptique au module k.

» La propriété qu'ont en général deux des intégrales de cette équation d'être des fonctions de seconde espèce conduit naturellement à l'introduction de leurs dérivées logarithmiques qui sont des fonctions de première espèce, et à leur expression par les fonctions θ (Fuchs, *Journal de M. Resal,* 1878). Mais on

n'obtient ainsi que la forme des intégrales, et les arguments des fonctions θ qui restent inconnus doivent être déterminés par d'autres considérations. M. Fuchs a indiqué pour cet objet, et relativement à l'équation de Lamé, une méthode fondée sur les résultats obtenus par lui dans un important Mémoire sur l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre, par des fonctions algébriques (*Journal de Crelle,* t. 81). La transformée à laquelle donne lieu l'équation de Lamé quand on change de variable indépendante, en substituant la fonction $\lambda(z)$ à son argument, se trouve être ainsi un cas particulier d'une classe d'équations linéaires, étudiées par M. Fuchs, et dans les intégrales desquelles figureraient les fonctions θ abéliennes.

» Lorsqu'on reste dans le domaine des fonctions doublement périodiques, on peut, dans un assez grand nombre de cas, arriver directement à la solution complète de la question en cherchant l'expression de la dérivée logarithmique au moyen de la fonction $\lambda(z)$ et de sa dérivée, sous la forme qui résulte du théorème bien connu de Liouville. C'est ce que je me suis proposé de montrer dans ce qui suit, en prenant comme exemple l'équation (1). La première partie contient la recherche de l'intégrale générale quand deux solutions sont des fonctions de seconde espèce. La deuxième est relative aux solutions doublement périodiques de première espèce. Dans la troisième, j'étudie les cas particuliers où le module est égal à l'unité ou à zéro, en mettant à profit la forme analytique donnée par M. Hermite. »

Bourguet. — Sur les intégrales eulériennes et quelques autres fonctions uniformes. (261-292).

M. Bourguet étudie les fonctions $P(z)$ et $Q(z)$ introduites par M. Prym,

$$P(z) = \int_0^1 e^{-x} x^{z-1}\, dx,$$

$$Q(z) = \int_1^\infty e^{-x} x^{z-1}\, dx;$$

il montre que $Q(z)$ est une fonction transcendante entière et donne une limite supérieure du module de cette fonction.

Il rappelle ensuite cette belle proposition de M. Heine, à savoir que

$$G(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int e^x x^{-z}\, dx,$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour qui contient l'origine et s'étend indéfiniment vers les x négatifs sans être nécessairement fermé; il déduit de ce théorème la formule

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_1^\infty e^{-\rho}\left(e^{z(\pi i - \log\rho)} - e^{-z(\pi i + \log\rho)}\right) d\rho$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{\cos\omega}\cos\left[(1-z)\omega + \sin\omega\right] d\omega,$$

et évalue approximativement les coefficients des diverses puissances de z dans le développement des deux parties; ces évaluations permettent de calculer une

limite supérieure du reste de la série. Il donne ensuite un moyen pour calculer exactement les cofficients de ce développement ainsi que ceux du développement de $\frac{1}{\Gamma(x)}$. Il introduit enfin diverses fonctions transcendantes entières, savoir :

$$\begin{aligned}
&F_1(x) = G(x+1) + G(x+2) + \ldots \\
&F_2(x) = F_1(x) + F_1(x+1) + \ldots \\
&F_3(x) = F_2(x) + F_2(x+1) + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

dont il indique quelques propriétés. Le Mémoire se termine par des Tableaux numériques donnant avec vingt décimales les coefficients des développements de

$$F_1(x), \quad \frac{1}{\Gamma(x)}, \quad \frac{1}{x(x+1)\Gamma(x)},$$

$$\frac{1}{x(x+1)e^{-cx}\Gamma(x)}, \quad x(x+1)\Gamma(x), \quad \Gamma(x) - P(x).$$

Bourguet. — Sur la fonction eulérienne. (296-298).

L'équation $P(x) = 0$ a une infinité de racines réelles.

Hermite et Lipschitz. — Sur quelques points de la théorie des nombres. (299-304).

Lettre de M. Hermite. — Soit

$$F(n) = \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n),$$

où $\varphi(i)$ est le nombre de diviseurs de i; on a

$$F(n) = 2\sum_{i=1}^{i=\nu} E\left(\frac{n}{i}\right) - \nu^2,$$

où ν est la partie entière de $\sqrt{n}$.

Lettre de M. Lipschitz. — On peut représenter d'une manière analogue la somme

$$F_s(n) = \sum_{i=1}^{i=n} f_s(i),$$

où $f_s(i)$ est le nombre des diviseurs de i qui sont en même temps des puissances $s^{\text{ièmes}}$ exactes d'un nombre.

On a, en effet,

$$F_s(n) = \left(\frac{n^{\frac{1}{s}}}{1^{\frac{1}{s}}}\right) + \left(\frac{n^{\frac{1}{s}}}{2^{\frac{1}{s}}}\right) + \ldots + \left(\frac{n^{\frac{1}{s}}}{n^{\frac{1}{s}}}\right),$$

où (z) désigne le plus grand entier contenu dans z; M. Lipschitz transforme légèrement cette formule et en tire diverses conséquences.

Cantor (*G.*). — Sur une propriété du système de tous les nombres algébriques réels. (305-310).

— Une contribution à la théorie des ensembles. (311-328).

— Sur les séries trigonométriques. (329-335).

— Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques. (336-348).

— Sur les ensembles infinis et linéaires de points. (349-380).

— Fondements d'une théorie générale des ensembles. (381-408).

— Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à n dimension. Première Communication. (409-414).

Bendixson (*J.*). — Quelques théorèmes de la théorie des ensembles. (415-420).

On a réuni, dans le quatrième cahier du second Volume des *Acta*, les principaux Mémoires, traduits en français, de M. G. Cantor sur la théorie des ensembles (*Mannigfaltigkeitslehre*).

Ces Mémoires, publiés dans le *Journal de Borchardt* ou dans les *Mathematische Annalen*, ont été, pour la plupart, analysés dans le *Bulletin;* mais la théorie créée par M. Cantor est arrivée maintenant à un degré de développement qui permet une exposition générale que je vais essayer ici; la réédition de ces premiers Mémoires et la publication des *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (Leipzig, 1883) donnent l'occasion d'appeler l'attention du lecteur sur une théorie qui n'est sans doute ni terminée, ni parfaite, mais qui offre de l'intérêt au point de vue philosophique et qui, dans l'ordre mathématique, est liée assez intimement aux derniers résultats des recherches sur la théorie des fonctions, pour que M. Mittag-Leffler ait cru indispensable d'en rappeler les résultats avant de publier, sous une forme complète, les théorèmes généraux auxquels l'a conduit l'étude des fonctions uniformes.

La notion de nombre irrationnel joue, dans la théorie des ensembles, un rôle essentiel, et il convient, avant tout, de dire quelques mots sur ce sujet; M. Cantor a exposé ses idées sur cette question dans un Mémoire sur les séries trigonométriques (*Math. Annalen*, t. V, p. 283) et dans les *Grundlagen;* dans ce dernier travail, il indique, outre le mode d'exposition auquel il s'est arrêté, la façon dont M. Weierstrass introduit les nombres irrationnels dans son enseignement, ainsi que le résumé des idées de M. Dedekind, que ce dernier a exposées dans un travail publié sous ce titre : *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Je ne veux pas m'arrêter ici aux critiques dirigées par M. Cantor contre la définition donnée par M. Weierstrass, critiques dont, je l'avoue, la portée m'échappe. Quant à l'idée qui a servi de point de départ au travail de M. Dedekind, travail que je ne connais d'ailleurs que par la citation de M. Cantor,

elle est bien connue en France; elle a été, en effet, formulée, il y a longtemps, dans le *Traité d'Arithmétique* de M. Joseph Bertrand, qui, peut-être, ne lui a pas donné les développements qu'elle méritait : elle consiste à décomposer l'ensemble de tous les nombres rationnels en deux classes, chaque nombre de la première classe étant plus petit que chaque nombre de la seconde classe; j'ajoute qu'un tel mode de décomposition définit un nombre irrationnel si aucun nombre de la première classe n'est plus grand que tous les autres et si aucun nombre de la seconde classe n'est plus petit que tous les nombres de la même classe; on peut dire que le nombre irrationnel ainsi défini est plus grand que tous les nombres (rationnels) de la première classe, plus petit que tous les nombres de la seconde classe; on aperçoit de suite la façon dont on doit définir deux nombres irrationnels égaux, un nombre irrationnel plus grand ou plus petit qu'un autre nombre irrationnel, ainsi que l'extension des propositions fondamentales relatives aux égalités ou inégalités; tout, jusque-là, est très simple et il semble que cette définition soit celle qui se présente le plus naturellement à l'esprit quand on veut définir le nombre qui représente la mesure d'une grandeur continue incommensurable à l'unité, ou, pour rester dans le champ de la pure Arithmétique, quand on veut définir une racine irrationnelle.

Il est clair aussi qu'on peut aller plus loin tout en restant dans la même voie, et la marche qu'a dû suivre M. Dedekind pour étendre aux nombres irrationnels la notion des opérations arithmétiques se présente naturellement à l'esprit. La notion, bien simple dans l'ordre d'idées qui précède, des valeurs approchées d'un nombre irrationnel permet aussi d'abandonner cette voie, et cela mène naturellement à la considération des suites infinies que M. Cantor a prises pour point de départ, ainsi que M. Heine l'avait d'ailleurs fait avant lui; cette façon de voir a d'ailleurs été adoptée par divers géomètres, en particulier par M. Lipschitz.

La notion d'une suite infinie $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de nombres rationnels jouissant de cette propriété que, à chaque nombre positif ε, réponde un indice n tel que l'on ait

$$| a_{n+m} - a_n | < \varepsilon$$

pour toutes les valeurs positives entières de m, paraît due à Cauchy, qui l'a introduite dans la théorie des séries; M. Heine a pris cette propriété comme définition de la limite : une suite jouissant de cette propriété a, par *définition*, une limite; que les définitions soient arbitraires, c'est une règle admise en logique; mais il est bien entendu que, en se plaçant à ce point de vue, il ne faut rien entendre de plus, tout d'abord, dans le mot *limite*, que ce qui a été mis dans la définition, c'est-à-dire la propriété de la suite. Pour aller plus loin, il convient de porter l'attention sur la propriété suivante de ces suites, qui est fondamentale : « Dans une suite, telle que celles qui ont été définies plus haut et dont les termes ne deviennent pas infiniment petits avec $\frac{1}{n}$, tous les termes finissent par avoir le même signe et être, en valeur absolue, plus grands qu'un certain nombre positif. Cette proposition montre immédiatement comment une telle suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de nombres rationnels et n'admettant point pour limite quelque nombre rationnel peut, au point de vue de M. Dedekind, définir un nombre irrationnel en permettant de ranger tout nombre rationnel α dans une classe ou dans l'autre, suivant que la suite $a_1 - \alpha, a_2 - \alpha, \ldots$ finit par avoir ses termes tous positifs ou tous négatifs; on a ici le lien entre les deux modes d'exposition; quoi qu'il en soit, pour en revenir au point de vue de M. Cantor,

si l'on considère deux suites de nombres rationnels

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots,$$

ayant, au sens qui a été précisé plus haut, chacune une limite, on dit qu'elles définissent respectivement des nombres a, b et l'on a les relations

$$a = b, \quad a > b, \quad a < b$$

suivant que les termes de la suite

$$a_1 - b_1, \; a_2 - b_2, \; \ldots, \; a_n - b_n, \; \ldots,$$

deviennent infiniment petits avec $\frac{1}{n}$, ou, dans le cas contraire, finissent par devenir supérieurs à un nombre positif, ou inférieurs à un nombre négatif. La somme des deux nombres a, b, ou leur produit, est définie par l'une ou l'autre des suites

$$\begin{array}{lllll} a_1 + b_1, & a_2 + b_2, & \ldots, & a_n + b_n, & \ldots, \\ a_1 b_1, & a_2 b_2, & \ldots, & a_n b_n, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}$$

Les théorèmes élémentaires d'Arithmétique s'étendent aisément aux nouveaux nombres ainsi définis.

Ces nouveaux nombres déduits de l'ensemble (A) des nombres rationnels par le procédé qui vient d'être décrit constituent un ensemble (B); en partant des nombres rationnels (A) et des nombres (B) et appliquant le même procédé à l'ensemble des nombres (A) et (B), on parviendra à définir de nouveaux nombres (C), etc. M. Cantor regarde les nombres (C) comme distincts des nombres (B). Cette distinction me paraît toutefois absolument formelle; elle ne repose que sur un procédé spécial de définition, tandis que la distinction entre les nombres rationnels et les nombres irrationnels est évidemment fondée en nature; il n'y a pas lieu, pour le moment, de s'y arrêter et je ne l'ai signalée que pour montrer le caractère subtil et métaphysique qu'affectent volontiers, comme la suite le montrera amplement, les ingénieuses spéculations de M. Cantor.

La notion de nombre réel (rationnel ou non) étant bien éclaircie, l'auteur se propose d'étudier les *ensembles* formés de tels nombres. On dit qu'un ensemble (E) de nombres réels distincts est donné, quand on fournit le moyen de reconnaître si un nombre a quelconque appartient ou non à cet ensemble; tel est, par exemple, l'ensemble de tous les nombres entiers, l'ensemble de tous les nombres positifs, l'ensemble de tous les nombres irrationnels, etc. On peut d'ailleurs concevoir qu'un ensemble soit *bien défini,* sans qu'il soit *donné explicitement;* on peut aussi considérer, au lieu d'un ensemble de nombres, un ensemble dont les éléments soient quelconques, un ensemble de points, ou de surfaces, ou de lignes dans un espace à un nombre quelconque de dimensions.

Un ensemble peut être composé d'un nombre fini ou infini d'éléments. Aux ensembles composés d'un nombre fini d'éléments correspond la notion de nombre entier; aux ensembles composés d'un nombre infini d'éléments correspond la notion de *puissance.* Deux ensembles bien définis E, E′ sont dits *équivalents,* ou de même puissance si l'on peut les faire correspondre élément par élément au moyen d'une opération à sens unique. M. Cantor écrit alors $E \backsim E'$. Un ensemble est de la première puissance s'il est équivalent à l'ensemble $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ des nombres entiers positifs; ses éléments peuvent être

alors arrangés suivant une série

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots.$$

On dit encore qu'il est *dénombrable*. Il convient d'observer que les ensembles dénombrables sont beaucoup plus riches qu'il ne semble à première vue. Tout d'abord, si l'on considère l'ensemble des nombres compris dans la formule

$$a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n},$$

où les n indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, doivent prendre toutes les valeurs de zéro à l'infini, on aperçoit de suite qu'on a affaire à un ensemble de première puissance.

Un cas particulier de ce théorème consiste en ce que l'ensemble des nombres rationnels est dénombrable. M. Cantor montre plus généralement qu'il en est de même de l'ensemble des nombres réels algébriques, c'est-à-dire des nombres réels qui sont racines d'une équation entière à coefficients entiers. Ces propositions donnent de l'intérêt au théorème suivant :

« Lorsqu'on a une suite infinie de nombres réels différents les uns des autres se succédant suivant une loi déterminée quelconque

$$(a) \qquad a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$

on peut, dans chaque intervalle (α, β) donné d'avance, déterminer un nombre η qui n'appartient pas à la suite (a); il existe, par conséquent, une infinité de tels nombres η. »

Ce théorème met en évidence l'impossibilité de dénombrer l'ensemble des nombres réels compris entre deux limites quelconques.

Si l'on considère un ensemble M, tout ensemble M′ dont les éléments appartiennent tous à l'ensemble M est dit une partie aliquote de M, ou un diviseur de M. Réciproquement, M est dit un multiple de M′. Le plus grand commun diviseur D(M, N) de deux ensembles M, N est l'ensemble composé des éléments communs; si les deux ensembles n'ont point d'élément commun, s'ils sont *sans connexion,* leur plus grand commun diviseur est nul. Le plus petit commun multiple de plusieurs ensembles $M_1, M_2, M_3, \ldots$ est l'ensemble de tous les éléments différents qui figurent dans ces ensembles; si les ensembles $M_1, M_2, \ldots$, sont sans connexion, leur plus petit commun multiple est leur produit P, que M. Cantor écrit, suivant les cas,

$$P \equiv (M_1, M_2, M_3, \ldots) \quad \text{ou} \quad P = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots,$$

le signe $\equiv$ exprimant l'identité des ensembles dont les symboles figurent dans les deux membres.

Il est clair qu'une partie aliquote d'un ensemble peut être de même puissance que cet ensemble; par exemple, l'ensemble des nombres pairs est évidemment équivalent à l'ensemble des nombres entiers; si un ensemble M′ qui divise un ensemble M ne lui est pas équivalent, on dit que la puissance de M′, ou de tout ensemble équivalent à M′, est inférieure à la puissance de M. Ainsi l'ensemble *dénombrable* des nombres rationnels compris entre zéro et un a une puissance inférieure à l'ensemble des nombres réels compris entre zéro et un.

A ce fait que ce dernier ensemble n'est pas dénombrable, se relie une proposition intéressante au point de vue philosophique, en ce sens qu'elle met hors de doute la nécessité de faire entrer la notion de continuité dans celle de dimension; M. Cantor montre, en effet, qu'on peut faire correspondre d'une façon

complète et à sens unique un ensemble continu à n dimensions à un ensemble continu d'une seule dimension; en d'autres termes, les éléments d'un ensemble continu à n dimensions peuvent être déterminés à sens unique par une seule coordonnée t continue et réelle, comme par un système de m coordonnées continues, m étant égal à n ou différent.

Ainsi, étant donné un cercle et un segment de droite limité, on peut établir une correspondance univoque entre chaque point de la droite et chaque point appartenant à la surface ou à la circonférence du cercle.

Cette proposition dépend de la suivante:

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n grandeurs réelles, variables indépendantes l'une de l'autre, dont chacune peut prendre toutes les valeurs supérieures ou égales à zéro et inférieures ou égales à un, et soit t une autre variable comprise dans les mêmes limites $(0 \leqq t \leqq 1)$, on peut faire correspondre cette grandeur t au système des n grandeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de telle sorte que à chaque valeur déterminée de t appartienne un système de valeurs déterminées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et *vice versa* à chaque système de valeurs déterminées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une certaine valeur de t.

La démonstration de cette dernière proposition repose essentiellement sur ce qu'on peut faire correspondre d'une façon univoque une valeur quelconque incommensurable de t comprise entre zéro et un système de valeurs incommensurables des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, comprises elles aussi entre zéro et un. La possibilité de cette correspondance tient à ce fait qu'un nombre incommensurable est déterminé par une suite infinie de nombres entiers, par exemple, s'il s'agit d'un nombre incommensurable compris entre zéro et un, par la suite des entiers positifs $a_1, a_2, a_3, \ldots$ qui figurent dans la fraction continue illimitée

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}},$$

qui est égale à ce nombre : convenons de représenter une telle fraction par le symbole $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$; l'ensemble de n valeurs irrationnelles déterminées des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se représentera de même par n symboles

$$(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \alpha_{i,3}, \ldots),$$

où $i = 1, 2, \ldots, n$, et l'on fera correspondre d'une façon univoque la suite de ces n symboles et le symbole $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ en supposant, par exemple,

$$a_{(j-1)n+i} = \alpha_{i,j},$$

où $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, \infty$.

Il suffit, pour compléter la démonstration, de prouver qu'une grandeur variable e qui peut prendre toutes les valeurs numériques irrationnelles de l'intervalle $(0, -1)$ peut se joindre à sens unique à une variable x comportant toutes les valeurs réelles du même intervalle $(0 - 1)$, en sorte que, à chaque valeur irrationnelle de e comprise entre zéro et un corresponde une valeur réelle et une seule appartenant à l'intervalle $(0, 1)$ et que, réciproquement, à chaque valeur réelle de x corresponde une certaine valeur irrationnelle de e. Cette dernière proposition se démontre facilement. Le mode de correspondance que l'on établit ainsi entre un espace à une dimension et un espace à n dimensions

montre bien le caractère philosophique de la proposition, car il ne semble pas qu'on puisse, au point de vue analytique, en tirer aucun parti.

Il n'en est pas de même de la notion des ensembles *dérivés* dont l'importance, au point de vue mathématique, ne saurait échapper au lecteur.

Étant donné un ensemble (E) dont les éléments, en nombre infini, sont toujours supposés être des nombres réels distincts, on dit qu'un nombre a est une *valeur limite* de cet ensemble si, dans tout intervalle comprenant a, il existe une infinité de nombres appartenant à l'ensemble E. Cette notion s'étend sans peine aux ensembles composés d'un nombre infini de points distincts dans un espace à un nombre quelconque de dimensions, et l'on conçoit sans difficulté ce qu'il faut entendre par un point limite d'un tel ensemble.

L'ensemble des valeurs limites, ou des points limites, d'un ensemble bien défini E, de nombres ou de points, constitue un nouvel ensemble bien défini E qui peut d'ailleurs être composé d'un nombre fini ou infini d'éléments. L'ensemble E′ est dit dérivé de l'ensemble E. L'ensemble E′, s'il est composé d'un nombre infini d'éléments, donnera de même naissance à un second ensemble dérivé E″, etc.; il peut se faire que, en continuant indéfiniment dans cette voie, on trouve un nombre illimité d'ensembles dérivés E′, E″, E‴, ... Il peut se faire que, au bout d'un certain nombre d'opérations, on tombe sur un ensemble $E^{(n)}$ composé d'un nombre limité d'éléments; on écrit alors $E^{(n+1)} \equiv 0$ et l'on dit que les ensembles dérivés qui suivent $E^{(n)}$ sont nuls. Dans ce dernier cas, on dit que l'ensemble E est du premier *genre* et de la $n^{\text{ième}}$ *espèce;* dans le premier cas E est un ensemble du second genre. Il est à remarquer que les éléments de l'ensemble E′ peuvent ne pas appartenir au premier ensemble E, mais que les éléments des ensembles E″, E‴, ... appartiennent tous nécessairement à E′.

Si, par exemple, on considère une suite infinie de nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ admettant au sens ordinaire du mot une limite, l'ensemble des nombres qui forment cette suite appartiendra au premier genre; l'ensemble dérivé se composera d'un seul nombre, à savoir la limite de la suite infinie; l'ensemble des nombres rationnels qui appartiennent à l'intervalle (0, 1) a pour dérivé l'ensemble des nombres réels qui appartiennent au même intervalle et leurs dérivés successifs sont identiques à ce dernier ensemble; de tels ensembles, qui sont identiques à leurs dérivés, sont dits *parfaits*.

Considérons un ensemble du second genre E et ses dérivés successifs E′, E″, ...; chaque ensemble dérivé est un diviseur des ensembles dérivés qui le précèdent; soit $E^{(\omega)}$ le plus grand commun diviseur de tous les dérivés E′, E″, E‴, ..., c'est-à-dire l'ensemble des nombres (ou des points) communs aux ensembles E′, E″, E‴, ..., ou encore, si l'on veut, l'ensemble des nombres (ou des points) qui ne disparaissent jamais, si loin qu'on s'avance dans la suite infinie E′, E″, ...; l'ensemble $E^{(\omega)}$ pourra appartenir lui-même au second genre et admettre ainsi une infinité de dérivés successifs que l'on pourra représenter par $E^{(\omega+1)}$, $E^{(\omega+2)}$, ...; chacun de ces dérivés divisera encore les précédents; soit de même $E^{(2\omega)}$ le plus grand commun diviseur de tous les dérivés $E^{(\omega+1)}$, $E^{(\omega+2)}$, ...; si $E^{(2\omega)}$ est du second genre, il y aura lieu de considérer le plus grand commun diviseur $E^{(3\omega)}$ de ses dérivés successifs $E^{(2\omega+1)}$, $E^{(2\omega+2)}$, ...; en continuant ainsi, on aperçoit le sens du symbole $E^{(\lambda_1\omega+\lambda)}$, où λ et λ_1 sont des entiers positifs; maintenant, on représentera par $E^{(\omega^2)}$ le plus grand commun diviseur de tous les ensembles

$$E^{(\omega)},\ E^{(2\omega)},\ E^{(3\omega)},\ \ldots,$$

qui divise d'ailleurs tous les ensembles compris dans la formule $E^{(\lambda_1\omega+\lambda)}$, λ_1 et λ

prenant toutes les valeurs entières positives, en excluant toutefois la combinaison $\lambda = \lambda_1 = 0$; en continuant ainsi, on fixera le sens du symbole

$$E^{(\lambda_2\omega^2+\lambda_1\omega+\lambda)},$$

et plus généralement du symbole

$$E^{\lambda_n\omega^n+\lambda_{n-1}\omega^{n-1}+\ldots+\lambda_1\omega+\lambda},$$

où les λ prennent toutes les valeurs entières positives, sans toutefois être nuls à la fois; le plus grand commun diviseur de tous les ensembles compris dans la formule précédente sera représenté par le symbole

$$E^{(\omega^\omega)}, \ldots.$$

Il peut se faire qu'en continuant toujours on tombe sur un ensemble composé d'un nombre fini de points, et alors les ensembles dérivés suivants seront nuls; il peut aussi arriver que cette circonstance ne se présente jamais. Désignons par α l'un quelconque des symboles $\omega_1\omega+1, \ldots, \lambda_n\omega^n+\ldots+\lambda, \ldots, \omega^\omega, \ldots$, que M. Cantor appelle *symboles d'infini;* on comprend sans autre explication ce qu'il faut entendre par un symbole d'infini qui en précède un autre. Dans la théorie des ensembles, ces symboles ont un sens très précis et il semble difficile d'élever quelque objection contre leur introduction. Mais l'auteur veut les séparer de la théorie qui leur a donné naissance, de la même façon que, pour arriver à la notion de nombre entier, on fait abstraction de la nature des groupes d'objets que ces nombres peuvent servir à comparer. Ces symboles d'infini, M. Cantor les regarde comme des *nombres entiers;* ainsi ω sera dit un nombre entier *immédiatement supérieur à tous les nombres de la suite naturelle* $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$; en partant ensuite du nombre ω, on forme la nouvelle suite de nombres entiers consécutifs

$$\omega+1, \ \omega+2, \ \omega+3, \ \ldots,$$

et 2ω est regardé comme un nombre entier immédiatement supérieur aux nombres de cette suite, etc. Ces dénominations choquent sans doute les habitudes; mais, après tout, il n'y a peut-être pas lieu de s'arrêter à la répugnance que peut nous causer l'emploi inusité de tel ou tel vocable, et de reprocher à l'auteur d'avoir substitué à cette expression « symbole d'infini » le mot de « nombre », ou de dire « nombre plus petit qu'un autre » au lieu de « symbole d'infini précédant un autre symbole ».

Quoi qu'il en soit, dans la terminologie de l'auteur, les nombres entiers ordinaires $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ formant la première classe, ou la classe (I) des nombres entiers, puis les symboles d'infini ou nombres

$$\omega, \ \omega+1, \ \ldots, \ \lambda_n\omega^n+\lambda_{n-1}\omega^{n-1}+\ldots+\lambda, \ \ldots, \ \omega^\omega, \ \ldots, \ \omega^{\omega^\omega}, \ \ldots, \ \alpha, \ \ldots,$$

formés comme il a été expliqué, constituent, dans leur ensemble, la deuxième classe ou la classe (II) des nombres entiers; il est toutefois nécessaire d'ajouter ici quelques explications qui concernent la *limitation* de la classe (II); si l'on considère les nombres de la classe (I) dans leur succession naturelle, il est clair que, si l'on s'arrête à un terme quelconque dans la suite qu'ils forment, le nombre des termes qui le précèdent est fini; voici la propriété des nombres de la classe (II) qui correspond à ce fait évident : si l'on s'arrête à un terme quel-

conque de la classe (II), l'ensemble des nombres entiers qui le précèdent dans les classes (I) et (II) est de la première puissance; en d'autres termes, cet ensemble peut être arrangé suivant une suite simplement infinie, telle que u_1, $u_2, \ldots, u_n, \ldots$. Cela est bien évident, si l'on se reporte au procédé qui a été décrit pour la formation des nombres (α); par exemple, l'ensemble des nombres qui précèdent ω^ω est compris dans la formule

$$\lambda_n \omega^n + \lambda_{n-1} \omega^{n-1} + \ldots + \lambda,$$

où il faut donner aux λ toutes les valeurs entières $1, 2, \ldots, \infty$, en excluant toutefois la combinaison $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \ldots = \lambda = 0$. On a expliqué au commencement de cet article qu'un tel système peut toujours se mettre sous forme d'une série simplement infinie et qu'il a, par suite, la première puissance; d'ailleurs, comme toute suite de systèmes dont chacun est de la première puissance donne toujours lieu, si elle est elle-même de la première puissance, à un nouveau système de la première puissance, il est clair que, si loin que l'on s'avance dans la suite des nombres de la seconde classe, formés par le procédé décrit, on aura toujours derrière soi un ensemble de nombres ou de symboles qui sera de la première puissance. La seconde classe de nombres est en quelque sorte limitée par le caractère de ses éléments; maintenant, il importe essentiellement de remarquer que l'ensemble des nombres de la seconde classe n'est pas de la première puissance, mais bien d'une puissance supérieure; M. Cantor montre qu'il y a lieu de regarder cette puissance comme immédiatement supérieure à la première et, par suite, comme étant égale à deux.

En poursuivant le même ordre d'idées, on est amené à introduire un nombre Ω que l'on regarde comme immédiatement supérieur à tous les nombres de la classe (II) et en partant duquel on formera la *troisième classe* de nombres entiers; celle-ci sera *limitée* par ce caractère de ses éléments, à savoir que l'ensemble des nombres des classes (I), (II), (III) qui le précèdent est toujours de la deuxième puissance; l'ensemble des nombres de la classe (III) est de la troisième puissance, etc.; on conçoit ainsi la formation d'une suite infinie de classes de nombres, dont chacune est limitée par le même principe et qui permettent de définir les puissances entières successives.

M. Cantor tire parti de ces notions pour le *dénombrement d'un ensemble bien ordonné :* le concept de système dénombrable, précédemment introduit, peut, en effet, être grandement généralisé. Par *ensemble* ou *système bien ordonné,* il faut entendre tout système bien défini, où les éléments sont unis entre eux par une succession donnée et déterminée, d'après laquelle il y a *un premier élément* du système; chaque élément (pourvu qu'il ne soit pas le dernier dans la succession) est suivi immédiatement d'un autre déterminé, et à chaque système arbitraire d'éléments, fini ou infini, correspond un élément *déterminé,* qui les suit *immédiatement* dans la succession (pourvu que dans l'ensemble il y ait des éléments qui suivent tous les éléments du système partiel considéré). Ainsi, d'un ensemble (α_ν) de la première puissance, on peut déduire, de différentes manières, des ensembles bien ordonnés, par exemple, les suivants :

$$(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots),$$
$$(a_2, a_3, \ldots, a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots, a_1),$$
$$(a_1, a_3, \ldots, a_{2\nu-1}, \ldots, a_2, a_4, \ldots, a_{2\nu}, \ldots).$$

Deux systèmes bien ordonnés sont dits avoir *le même nombre* (et ce nombre

dépend essentiellement de l'ordre de succession des éléments) lorsqu'on peut établir entre eux une correspondance réciproque à sens unique, tel que deux éléments de l'un des systèmes se succèdent dans le même ordre que dans l'autre système, les éléments correspondants. S'il existe un tel mode de correspondance, il est unique : ceci posé, en admettant que le système $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ ait pour nombre ω, les trois systèmes bien ordonnés qui ont été écrits plus haut auront pour nombres respectifs ω, $\omega + 1$, 2ω.

C'est sur cette conception que M. Cantor essaye de fonder une théorie arithmétique des nombres de diverses classes et des opérations arithmétiques élémentaires à effectuer sur ces nombres.

Voici maintenant, relativement aux ensembles de points situés dans un espace continu (que l'on peut supposer à n dimensions) une remarque importante :

Soit P un tel ensemble qui ne soit pas un ensemble parfait, c'est-à-dire qui ne soit pas identique à son premier dérivé P′ ; l'ensemble $P - P'$ jouira de cette propriété qu'autour de chacun de ses points on pourra décrire une sphère de rayon fini telle qu'aucun autre point de l'ensemble ne soit situé à l'intérieur ou sur la limite de la sphère. C'est là le caractère d'un *ensemble isolé.* Il est aisé de voir que tout ensemble isolé Q est de la première puissance; cela est manifeste si l'ensemble Q peut être compris tout entier à l'intérieur d'une sphère de rayon fini. Si l'on imagine alors, en effet, chaque point entouré de sa sphère *isolante,* on observe immédiatement que celles de ces sphères dont le rayon est supérieur à un nombre positif donné quelconque sont en nombre fini : il suffira donc de ranger les sphères isolantes par ordre de grandeur pour ranger du même coup les points de l'ensemble comme une suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. On ramène maintenant le cas où l'espace qui contient Q est infini au cas qui vient d'être traité au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques. Voici maintenant, dans le même ordre d'idées, quelques théorèmes plus généraux.

» A. Un ensemble de points P (situé dans un espace continu G_n à n dimensions) ayant la *première puissance* ne peut jamais être un ensemble parfait.

» B. Le nombre α appartenant à la *première* ou à la *seconde* classe de nombres, soit P un ensemble de points tel que son ensemble dérivé $P^{(\alpha)}$ d'ordre α soit nul; alors le premier ensemble dérivé $P^{(1)}$ de P et l'ensemble P lui-même sont de la première puissance, sauf les cas où les ensembles P ou $P^{(1)}$ sont finis.

» C. P étant un ensemble de points tel que son premier dérivé $P^{(1)}$ soit de la première puissance, il existe des nombres α de la *première* ou de la *seconde* classe de nombres, tels qu'on ait identiquement

$$P^{(\alpha)} = 0,$$

et de tous ces nombres α il y en a un qui est le plus petit.

D. Si P a une puissance plus grande que la première, il existe toujours des points qui appartiennent à la fois à tous les $P^{(\gamma)}$ [où γ parcourt tous les nombres de la classe (I) et (II)].

E. Si $P^{(\Omega)}$ est l'ensemble de tous les points du théorème (D), $P^{(\Omega)}$ est un ensemble parfait; Ω est le premier nombre de la classe III.

F. Si $P - P^{(\Omega)} \equiv R$, R a la première puissance.

» G. Il existe un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II), tel que le plus grand commun diviseur de R et de $R^{(\gamma)}$ soit nul.

Les quatre derniers théorèmes ont été énoncés et démontrés par M. Bendixson dans une Lettre adressée à M. Cantor, qui était lui-même en possession des théorèmes D, E, F.

Je terminerai cette longue analyse en donnant, d'après l'auteur, la définition purement arithmétique d'un ensemble continu de points dans un espace plan à n dimensions G_n; un point est d'abord défini par le système de ces n coordonnées; la notion de distance s'ensuit immédiatement. Maintenant un ensemble infini S de points sera dit *continu*, 1° s'il est *parfait*, 2° s'il est *parfaitement enchaîné*. M. Cantor dit que T est un système bien enchaîné quand, considérant deux points quelconques t et t' de ce système et un nombre positif ε aussi petit qu'on voudra, il y a toujours un nombre fini de points $t_1, t_2, \ldots, t_v$ de T tels que les distances $tt_1, t_1t_2, \ldots, t_nt'$ soient toutes plus petites que ε.

M. Cantor fait cette curieuse remarque que si d'un ensemble continu quelconque, par exemple de l'espace ordinaire E à trois dimensions, on supprime un ensemble infini de points de la première puissance, par exemple l'ensemble des points à coordonnées rationnelles, l'ensemble E′ restant, qui ne sera plus un *continu* au sens précédent, sera encore *connexe*, c'est-à-dire qu'on pourra en joindre deux points quelconques par un trait continu dont tous les points appartiennent à E′. Il donne aux géomètres le singulier conseil d'essayer de fonder une mécanique modifiée, applicable aux espaces de la même nature que E′. « Grâce aux résultats de ces recherches, que l'on comparera avec les faits, on arrivera peut-être à obtenir des points d'appui réels pour l'hypothèse de la continuité générale de l'espace tel qu'on le conçoit dans la pratique. » C'est là une espérance qu'il est peut-être permis de ne pas partager.

J. T.

OVERSIGT OVER DET KONGELIGE DANSKE VIDENSBABERNES SELSKABS FORHANDLINGER (1).

Année 1877.

Steen (*A.*). — Sur la loi des variations des positions des axes principaux. (10-19).

L'auteur développe de nouvelles expressions servant à déterminer les axes principaux d'un corps qui correspondent aux différents points de l'espace.

Année 1879.

Lorenz (*L.*). — Sur la propagation de l'électricité (41-72).

Zeuthen (*H.-G.*). — Sur quelques-unes des propriétés des courbes du quatrième ordre à deux points doubles. (89-122; résumé en français, 15-19).

---

(1) *Bulletin de l'Academie Royale danoise des Sciences et des Lettres.* — Voir *Bulletin*, I_2, p. 194.

Une courbe du quatrième ordre à deux points doubles peut toujours être regardée comme projection centrale de la courbe d'intersection d'un faisceau de surfaces du deuxième ordre. Les contours apparents de ces surfaces forment un système singulier de coniques tangentes quatre fois à la courbe. Ce sont les propriétés de ce système dont s'occupe l'auteur.

Mejer (*Osvald*). — Sur le comput ecclésiastique. (195-234; résumé en français, 27-36).

Année 1880.

Colding (*A.*). — Recherches sur la vitesse du vent. (41-62).

Zeuthen (*H.-G.*). — Construction du huitième point commun aux surfaces du second ordre qui passent par sept points donnés. (227-236; résumé en français, 28-29).

L'auteur a exposé ailleurs les mêmes constructions comme des exemples d'une théorie des figures projectives sur une surface du second ordre (*Mathematische Annalen*, t. XVIII). Le Mémoire actuel en contient une déduction indépendante de cette théorie.

Steen (*A.*). — Sur l'intégration des équations différentielles par des intégrales définies. (237-243).

L'équation différentielle $y'' - axy' + \mu ay = 0$ a (si $\mu > -1$) pour intégrales particulières

$$y = \int_{\infty\sqrt{-1}}^{0} e^{\frac{1}{2}a(x+\alpha)^2} \alpha^{\mu} d\alpha$$

et

$$y = x^{\mu} - \frac{\mu(\mu+1)}{2a} x^{\mu-2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2.4a^2} x^{\mu-4} + \ldots.$$

Année 1881.

Thiele (*T.-N.*). — Des formules d'interpolation relatives aux étoiles doubles. (129-155).

Afin de représenter les mouvements des étoiles doubles qu'on ne peut encore assujettir à un calcul d'orbite propre, l'auteur recommande l'application de formules conformes à la loi des aires, et, en particulier, de celles où la distance apparente r dépend du temps suivant l'équation

$$r^2 = l + mt + nt^2,$$

où, par conséquent, l'orbite apparente est la même qui résulterait d'une attrac-

tion inversement proportionnelle au cube de la distance apparente. L'auteur discute les différents cas qui correspondent à cette loi, et expose en détail des méthodes servant à la détermination des constantes par les observations.

Hansen (*P.-C.-V.*). — Remarques sur l'intégration de l'équation différentielle $f\left(\frac{du}{dz}, u\right) = 0$. (156-170; résumé en français, 7-8).

f étant une fonction rationnelle et entière de $\frac{du}{dz}$ et u, l'auteur cherche l'intégration de $f\left(\frac{du}{dz}, u\right) = 0$ dans les cas où u devient une fonction algébrique de z ou une fonction simplement périodique qui, pour chaque valeur finie de z, n'a qu'un nombre fini de valeurs.

Année 1882.

Oppermann (*L.*). — Remarques sur notre connaissance des nombres premiers et de la loi de leur fréquence. (169-179; résumé en français, 9-12).

Le but de cette Communication est de donner un aperçu, tant de l'état actuel de nos connaissances en ce qui concerne la quantité et la distribution des nombres premiers que des progrès qu'on peut espérer voir se réaliser à cet égard dans un avenir prochain.

Christiansen (*C.*). — Méthodes propres à mesurer l'indice de réfraction de liquides coloriés. (217-250).

Année 1883.

Christiansen (*C.*). — Mesurage absolu de l'absorption et de l'émission de chaleur. (20-57).

Mynster-Fischer (*J.-P.*). — Observations magnétiques faites à des points différents du Danemark.

Christiansen (*C.*). — Sur la dépendance de l'émission de chaleur de la forme de la surface. (139-149).

TIDSSKRIFT FUR MATHEMATIK. Udgivet af H.-G. Zeuthen (4e série) (1).

Tome III; 1879.

Bing (*F.*). — Sur la probabilité *a posteriori*. (1-22).

Polémique sur la même matière entre MM. Lorenz et Bing. (57-70, 118-131).

M. Bing critique l'application ordinaire de l'extension suivante de la règle de Baye : La probabilité qu'un fait connu serait le résultat d'une cause donnée est proportionnelle et à la probabilité, donnée *a priori*, que cette cause entrera en activité, et à la probabilité que la cause, lorsqu'elle entre en activité, aura pour effet le fait connu. La règle est juste lorsqu'on a une connaissance complète des différentes causes possibles; mais, lorsque cette connaissance est incomplète, son application peut conduire à des paradoxes, dont l'auteur ajoute de nouveaux exemples, pris de la théorie de mortalité, à ceux qui étaient exposés antérieurement par d'autres auteurs. L'auteur montre ensuite l'impossibilité de substituer une autre règle à celle de Baye et déclare, en conséquence, qu'il n'existe aucune probabilité *a posteriori* dans le cas où l'on ne connaît pas les différentes causes qui peuvent avoir agi.

Sous cette dernière condition, M. Lorenz ne nie pas la conclusion de M. Bing; mais, selon lui, cet auteur a eu tort en faisant usage de raisonnements d'une portée beaucoup plus grande.

Valentiner (*H.*). — Théorèmes sur les courbes d'intersection complète de deux surfaces. (22-30).

Détermination : 1° du nombre de points d'une surface d'ordre q suffisant à déterminer sa courbe d'intersection avec une surface inconnue d'ordre $p \geqq q$; 2° de la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface d'ordre $n > p \geqq q$ passe par la courbe d'intersection complète de surfaces des ordres p et q; 3° le nombre des constantes dont dépend une surface qui doit contenir une courbe d'intersection complète inconnue de surfaces d'ordres donnés. L'auteur fait observer que c'est à tort qu'on a supposé qu'une surface du quatrième ordre contient, en général, des courbes d'intersection de surfaces du deuxième ordre.

Zeuthen (*H.-G.*). — Sur la construction de polygones funiculaires pour des forces données dans l'espace. (46-57; 96-101).

Pour cette construction, l'auteur fait usage d'une figure des forces analogue à celle qu'on applique à la construction de polygones funiculaires plans.

Thiele (*T.-N.*) — Remarques sur la convergence de fractions continues périodiques. (70-74).

---

(1) Voir *Bulletin*, III_2, 163.

Crone (*C.*). — Démonstrations élémentaires et géométriques de théorèmes sur les courbes bicirculaires du quatrième ordre. (81-86).

Petersen (*Jules*). — Le théorème de réciprocité. (86-90).

Démonstration très simple de l'extension due à Jacobi du théorème de Legendre sur une réciprocité dans la théorie des nombres. L'auteur a communiqué la même démonstration dans l'*American Journal*, t. II.

Jensen (*J.-L.-W.-V.*). — Représentation indépendante de quelques quotients différentiels d'ordre supérieur. (90-95).

Jensen (*J.-L.-W.-V.*). — Sur la multiplication de deux séries infinies. (95-96).

Eneström (*G.*). — Contributions diverses à l'histoire des Mathématiques : I. Les solutions singulières des équations différentielles (113-118). — II. Représentation de quantités inconnues par des lettres ordinaires. (161-165).

Hertzsprung (*S.*). — Solution et extension d'une question. (134-140).

La question proposée était de trouver le nombre des termes d'un déterminant, qui ne contiennent aucun élément de la diagonale. L'auteur résout aussi la question où il s'agit des termes qui ne contiennent aucun élément, ni de l'une ni de l'autre des deux diagonales.

Zeuthen (*H.-G.*). — Hypothèses sur l'extraction des racines carrées d'Archimède. (145-155).

Après avoir rendu compte de différentes hypothèses, l'auteur en expose deux nouvelles, l'une de M. Steen, l'autre de lui-même. La dernière contient une explication du fait que les convergentes d'Archimède sont des convergentes à des fractions continues sans y être des convergentes successives.

Hansen (*P.-C.-V.*). — Sur l'intégration de différentielles à plusieurs variables indépendantes. (165-170).

Extension au cas de plusieurs variables de la considération qu'une intégrale est la somme de ses éléments.

Petersen (*Jules*). — Une remarque sur les équations aux différentielles partielles. (170-171).

Tome IV; 1880.

Thiele (*T.-N.*). — Construction des axes d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués. (1-3).

Zeuthen (*H.-G.*). — Des paradoxes apparents dans la théorie du mouvement central. (3-9).

Thiele (*T.-N.*). — Études analytiques sur les principes des Mathématiques pures. (33-62).

Analyse abstraite des conséquences respectives de chacun des principes sur les opérations numériques élémentaires.

Juel (*C.*). — Déduction géométrique des propriétés fondamentales des surfaces du quatrième ordre à une conique double. (81-108; 113-121).

L'auteur prend pour point de départ la génération des surfaces par deux faisceaux de quadratiques passant par la conique double.

Hansted (*Birger*). — Méthodes pour intégrer certaines équations différentielles au moyen d'intégrales définies. (121-135).

Cayley (*A.*). — Sur le nombre des constantes de l'équation de la surface PS — QR = 0. (145-148).

Hansen (*P.-C.-V.*). — Remarques sur l'intégration algébrique de certaines équations différentielles linéaires. (148-154).

Toute fonction algébrique peut être une intégrale particulière d'une équation différentielle linéaire à des coefficients rationnels. L'auteur montre quelques dépendances qui doivent avoir lieu entre la fonction et l'équation.

Dahl (*C.*). — Démonstration d'un théorème de la théorie des invariants. (154-158).

Zeuthen (*H.-G.*). — Une démonstration de l'existence de l'intégrale générale de l'équation $f(x, y, y') = 0$. (161-167).

Petersen (*Jules*). — Sur les covariants des formes binaires. (177-190).

Dans ce Mémoire, continué dans l'année suivante du *Tidsskrift*, l'auteur déduit les différents covariants, et les relations ayant lieu entre les covariants des semi-invariants et des relations qui ont lieu entre les semi-invariants.

Tome V; 1881.

Valentiner (*H.*). — Démonstration d'un théorème sur les courbes algébriques. (1-3).

Le théorème dont il s'agit est le suivant : « Si mn points du plan satisfont à la condition que toute courbe d'ordre n passant par $mn - \frac{(m-1)(m-2)}{2}$ des points passera par les autres, il faut (pour $n > m > 3$) que tous ces points se trouvent sur une courbe d'ordre m. » Le théorème réciproque est bien connu.

Petersen (*Jules*). — Démonstration élémentaire du théorème de Desargues, avec une application. (4-5).

Hansted (*Birger*). — Transformations de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants par la substitution d'une nouvelle variable indépendante. (5-12).

Hansted (*Birger*). — Notes sur la détermination des coefficients de la $m^{\text{ième}}$ puissance d'une série. (12-16).

Tucen (*C.*). — Contribution à la théorie des nombres premiers. (16-25).

Petersen (*Jules*). — Sur les covariants de formes binaires. (*Suite*, 33-40).

Formation de semi-invariants.

Zeuthen (*H.-G.*). — Détermination du plus grand facteur commun à deux polynômes par des déterminants. (45-55; 109-124).

L'auteur joint aux conditions d'un facteur commun d'un certain degré et à l'expression du facteur commun la formation d'une série de polynômes dont on peut faire usage à l'application du théorème de Sturm. L'auteur complète, à cet égard, des règles et des démonstrations dues à M. Lemonnier.

Jensen (*J.-L.-W.-V.*). — Théorèmes et démonstrations appartenant aux séries et aux produits infinis. (65-77).

Les séries et les produits sont supposés avoir des termes et des facteurs complexes.

Thaarup (*F.*). — Recherche si un nombre donné est premier. (77-86).

Paulli (*H.*). — Relations entre les rayons de courbure et de torsion d'une courbe gauche et de ses indicatrices sphériques. (86-87).

Valentiner (*E.-C.*). — Théorèmes sur certaines courbes algébriques. (88-91).

Falk (*M.*). — Note sur les équations aux différentielles partielles. (97-101).

Steen (*A.*). — Sur une remarquable égalité de coefficients différentiels de deux fonctions. (101-109).

Étude des conditions de l'égalité de

$$\frac{d^n(x-a)^{n+r}(x-b)^{n+s}}{dx^n} = \frac{d^m(x-a)^{m+r}(x-b)^{m+s}}{dx^m},$$

où $m+n+1+r+s=0$.

Valentiner (*E.-C.*). — Théorèmes fondamentaux sur les courbes algébriques. (124-126).

Schmidt (*Ejgil*). — Sur les courbes du quatrième ordre dont les équations ne contiennent que les carrés des variables. (145-156).

Nous signalons le résultat suivant auquel conduit une transformation des courbes en question : Les tangentes d'inflexion d'une courbe rationnelle du quatrième ordre sont tangentes à une conique. Celle-ci est deux fois tangente à celle qui a pour tangentes les six tangentes ordinaires de la courbe qui passent par les points doubles.

Forchhammer (*G.*). — Exemples de la Géométrie à quatre dimensions. (157-166).

Un des exemples est une extension du théorème d'Euler sur les nombres relatifs à un polyèdre.

Valentiner (*H.*). — Démonstration d'un théorème de la Géométrie plane.

Le théorème dont il s'agit est le théorème réciproque à celui de Cayley sur une couche d'ordre n, en passant par les points d'intersection de courbes des ordres p et q.

Steen (*A.*). — Une équation différentielle linéaire, d'après M. Halphen. (177-180).

Gade (*Kr.*). — Démonstration de deux théorèmes sur les fonctions périodiques. (181-184).

Oppermann (*L.*). — Expression explicite de $\frac{d^k}{dx^k}(x-a)^p(x-b)^q$.

Tome VI; 1882.

Cavallin (*G.-B.-S.*). — Déduction et généralisation de la formule de Legendre $\int_0^{2\pi} p\,d\omega = \mathrm{L}$. (1-2).

Petersen (*Jules*). — Équations aux différentielles partielles. (3-4).

Nouvelle déduction de l'intégration de $\mathrm{P}p + \mathrm{Q}q = \mathrm{R}$.

Zeuthen (*H.-G.*). — Courbes stationnaires d'un système. (5-13).

Zeuthen (*H.-G.*). — Démonstration d'une construction de Chasles. (13-16).

Sesdelin (*C.*). — Sur la construction de tangentes à la courbe de contact d'une surface de révolution avec un cône ou un cylindre circonscrit.

Zeuthen (*H.-G.*). — Démonstration élémentaire de quelques théorèmes sur le mouvement d'un point. (36-50).

Steen (*A.*). — Sur l'application de l'intégration par partie. (51-55).

Steen (*A.*). — Une intégrale définie, qui est fonction discontinue. (65-68).

Il s'agit de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^m ax}{x^m}\,dx$, regardée comme fonction de a.

Krebs (*C.*). — Les axiomes sont-ils dus à l'expérience? (81-95).

Cavallin (*C.-B.-S.*). — Sur une valeur moyenne dans la Géométrie. (95-96).

Zeuthen (*H.-G.*). — Fragments de l'histoire des Mathématiques : II. La sommation de séries géométriques dans Euclide. —

III. Une démonstration par procédés de la Géométrie projective dans Apollonius. (97-101).

Apollonius, dans sa détermination d'une tangente à une conique, fait usage de la conservation du rapport anharmonique par projection.

Meyer (*Ad.*). — Les axiomes sont-ils dus à l'expérience? (113-118).

Cette réplique à l'article de M. Krebs est encore suivie de remarques de la part du rédacteur. (119-125).

Petersen (*Jules*). — Sur les nombres premiers. (138-143).

Expression du plus petit multiple commun à tous les nombres entiers jusqu'à une limite donnée; application à un dénombrement approximatif des nombres premiers.

Zeuthen (*H.-G.*). — Sur la construction mécanique des ovales de Descartes. (145-155).

Jensen (*P.-V.*). — Déduction par la Géométrie analytique élémentaire des propriétés des courbes engendrées par un mouvement de trois barres. (154-163).

Falk (*M.*). — Sur les dérivées et les différentielles d'une fonction de deux variables indépendantes. (164-182).

Déduction de la condition de l'existence des dérivées et de la différentielle totale. L'auteur expose, avec quelques extensions, ce que contient, à cet égard, les travaux de J. Thomae.

5e série (1). — Tome I; 1883.

Petersen (*Jules*). — Sur les principes de la Géométrie; démonstration du théorème sur la somme des angles d'un triangle. (1-11).

Apparemment l'auteur retourne à des considérations anciennes, en disant que les Mathématiques posent arbitrairement leurs fondements et s'occupent seulement de la déduction logique des conséquences; mais, en disant qu'il dépend de la conformité des principes avec l'expérience quel usage on peut faire des résultats au monde physique, il n'est pas pourtant en désacord sérieux avec la

(1) A partir du commencement de cette série, le *Tidsskrift* est rédigé par J.-P. Gram et H.-G. Zeuthen.

philosophie géométrique de notre époque. Il obtient une démonstration du onzième axiome d'Euclide en attribuant, par définition, au plan une propriété dont le théorème sur la somme des angles est une conséquence.

Steen (*A.*). — Sur les équations différentielles homogènes du second ordre. (11-14).

Christensen (*S.-A.*). — Démonstration de quelques théorèmes sur les coniques. (14-17).

Cavallier (*C.-B.-S.*). — Déduction de quelques valeurs approximatives de la circonférence d'une ellipse. (33-37).

Gram (*J.-P.*). — Sur les quadratures des courbes d'erreur. (65-72).

L'auteur s'est proposé le problème suivant : « $F(x)$ étant un polynôme du degré $2n-1$, déterminer les $2n$ constantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$, de telle manière que

$$A_1 F(x_1) + A_3 F(x_2) + \ldots + A_n F(x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}x^2} F(x)\,dx. \text{ »}$$

Communications de la part de la Société mathématique et physique à Upsal, I. (73-78).

La Communication contient des recherches de MM. Falk et Meyer sur le rayon de convergence de la série $\Sigma(a_n)^{\mu} z^n$, μ étant un nombre complexe.

Zeuthen (*H.-G.*). — Démonstration élémentaire du théorème de Pascal. (78-81).

Communication d'une démonstration de M. Haase à Augsburg.

Christensen (*S.-A.*). — Historique de la théorie des courbures des surfaces et des courbes gauches. (97-127).

Gram (*J.-P.*). — Nécrologie de M. Oppermann. (137-144).

Zeuthen (*H.-G.*). — Fragments de l'histoire des Mathématiques : IV. Spécimens des solutions de Diophante de problèmes arithmétiques. (145-156).

Zeuthen (*H.-G.*). — Sur la composition des vitesses simultanées d'un point. (156-162).

Oppermann. — Démonstration d'un théorème sur la convergence des fractions continues. (163-164).

Communiquée d'après les papiers de feu M. Oppermann, par J.-P. Gram.

Communications de la part de la Société mathématique et physique à Upsal, II. (177-183).

Sommations de la série $\sum_{0}^{n}{}_x x^m a^n$, m et n étant des nombres entiers, et de la série $\sum_{1}^{n}{}_x \frac{1}{x^m}$, m étant un nombre entier et positif, proposées par M. Meyer et exécutées par M. Charlier.

Thiele (*T.-N.*). — Des résultats remarquables d'interpolations. (183-185).

Sebelien (*J.*). — Représentation graphique d'une série d'expériences. (186-188).

M. J.-P. Gram y a joint des remarques. (188-190).

Le *Tidsskrift* contient une des questions à résoudre, des solutions, des questions d'examen, etc.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von L. KRONECKER und K. WEIERSTRASS (1).

Tome XCII; 1882.

Kronecker (*L.*). — Traits fondamentaux d'une théorie arithmétique des quantités algébriques (2). (1-122).

Ire Partie.

§ 1. Les domaines de rationalité. § 2. Les quantités algébriques; leur classification en genres. § 3. Les domaines naturels de rationalité et les domaines de

---

(1) Voir *Bulletin*, VII_2, 157.

(2) Réimpression d'un Mémoire dédié à M. E.-E. Kummer à l'occasion du cinquantième anniversaire de son doctorat, le 10 septembre 1881. (*Voir* le compte rendu par M. Molk, t. VIII_1, p. 145 du *Bulletin*.)

genre. § 4. La décomposition de fonctions entières de variables en facteurs irréductibles. § 5. Les quantités algébriques entières; leur classification en espèces. § 6. Représentation linéaire des quantités de l'espèce principale par un nombre fini d'éléments. § 7. Cas particuliers où la représentation linéaire des quantités de l'espèce ne demande qu'un nombre d'éléments égal à celui de l'ordre. § 8. Les discriminants des genres et des espèces. § 9. Les relations entre les discriminants de genres différents dont l'un est contenu sous l'autre. § 10. Les systèmes d'équations; leurs discriminants et leurs résolvants différents. § 11. Les systèmes particuliers d'équations par lesquels des quantités algébriques conjuguées sont définies. Le principe algébrique de Galois. § 12. Les genres de fonctions rationnelles de plusieurs quantités indéterminées. § 13. Sanction de l'existence arithmétique des quantités algébriques.

IIe Partie.

§ 14. Les plus grands diviseurs communs de quantités algébriques entières. § 15. Les diviseurs algébriques. § 16. Les diviseurs algébriques qui sont formés de formes linéaires. § 17. Les diviseurs algébriques généraux; leur équivalence avec les diviseurs particuliers qui sont formés de formes linéaires. § 18. La décomposition des diviseurs algébriques en facteurs irréductibles. § 19. Les nombres algébriques entiers et leurs diviseurs. Le principe kummérien de l'équivalence. § 20. Introduction de systèmes diviseurs à rangs différents. § 21. Les propriétés des systèmes diviseurs. § 22. Les formes algébriques entières des rangs différents; leur équivalence absolue; leur décomposition en facteurs irréductibles. § 23. L'équivalence relative des formes algébriques entières. § 24. Les formes fondementales, en particulier les formes linéaires du règne algébrique des nombres. § 25. Les équations fondamentales; les formes des discriminants et leurs diviseurs des rangs différents.

Caspary (*F.*). — Sur la transformation de certains déterminants qui se présentent dans la théorie des sections coniques. (123-144).

Le Mémoire s'occupe de la transformation de certains déterminants qui sont l'expression de théorèmes connus relatifs aux sections coniques. L'auteur revient donc sur un sujet traité à diverses reprises par MM. Hunyady (t. LXXXIII), Mertens (t. LXXXIV), Pasch (t. LXXXIX) (comp. *Bulletin*, II_2, p. 224; III_2, p. 114; V_2, p. 198); mais il le fait pour simplifier ces transformations sous un nouveau point de vue et pour faciliter le changement direct d'un déterminant en ses formes diverses. Cette nouvelle méthode d'aborder la question a été suggérée par Grassmann (*Ausdehnungslehre*, Berlin, 1862, p. 37, etc.) et paraît propre à être appliquée au problème d'étendre quelques-uns des théorèmes connus pour les sections coniques à des courbes d'ordre supérieur et même à des surfaces.

Hermite (*Ch.*). — Sur une application du théorème de M. Mittag-Leffler, dans la théorie des fonctions. (145-155).

(Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler.)

1° On a

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)} = \sum \frac{R_n}{x+n},$$

où $R_n = \frac{(-1)^n(a-1)(a-2)\ldots(a-n)}{1.2\ldots n}$ et a positif.

Soit a négatif, et posons $a = -\nu + \alpha$, ν étant un nombre entier et α positif, alors on trouve

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)} = \sum \left[\frac{R_n}{x+n} + G_n(x)\right],$$

où $R_n = \frac{(-1)^n(\alpha-1)(\alpha-z)\ldots(\alpha-n)}{1.2\ldots n} G(-n)$,

$$G(x) = \left(1+\frac{x}{\alpha-1}\right)\left(1+\frac{x}{\alpha-2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{\alpha-\nu}\right), \quad G_n(x) = \frac{G(x)-G(-n)}{x+n}.$$

2°

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)} = \sum \frac{R_n}{x+n} - \sum \frac{R_n}{x-a-n},$$

où $R_n = \frac{(-1)^n a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1.2\ldots n}$ et $0 < a < 1$.

Ce résultat subsiste sans modification pour les valeurs négatives de a. Soit, enfin, $a > 1$ et faisons $a = \nu + \alpha$, où ν est entier; α positif est moindre que 1. Alors nous obtenons la formule

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)} = \sum \frac{G(x)\rho_n}{x+n} - \sum \frac{G(x)\rho_{\nu+n}}{x-a-n} - P(x),$$

où $G(x) = \left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha+1}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\alpha+\nu-1}\right)$, ρ_n ce que devient R_n quand on change a en α,

$$P(x) = G(x)\left(\frac{\rho_0}{x-\alpha} + \frac{\rho_1}{x-\alpha-1} + \ldots + \frac{\rho_{\nu-1}}{x-\alpha-\nu+1}\right).$$

Hertz (*Heinrich*). — Sur le contact de corps solides élastiques. (156-171).

M. Hertz traite un cas intéressant pour la pratique, à savoir celui où deux corps isotropes élastiques se touchent dans une très petite partie de leur surface et exercent une pression finie l'un sur l'autre à travers cette partie. Les surfaces qui se touchent sont supposées parfaitement polies, c'est-à-dire qu'elles n'exercent qu'une pression normale entre les parties en contact. La partie de la surface qui est commune aux deux corps après la déformation est appelée *surface de pression*, le contour de cette partie, *figure de pression*. Les recherches de M. Hertz déterminent la surface dont la surface de pression est une partie infiniment petite : elle se trouve être une surface de second ordre qui est située entre les surfaces en contact dans leur état non déformé; elle se rapproche plus de la figure de celui des deux corps qui a le plus grand module d'élasticité. De plus, le Mémoire résout la question concernant la forme et grandeur absolue de la figure de pression, et le problème de la répartition de la pression normale, à

l'intérieur de la figure de pression. L'auteur calcule les dimensions de l'ellipse de pression et enfin la durée de percussion, c'est-à-dire le temps pendant lequel deux corps qui se choquent sont en contact.

Stahl (*Wilhelm*). — Sur le système de rayons de deuxième ordre et de deuxième classe. (172-180).

Cette construction s'obtient comme spécialisation de cette donnée par le même auteur pour le système de rayons de troisième ordre et de deuxième classe (t. XCI, p. 1; *Bulletin*, VII_2, p. 157).

Dedekind (*R.*) et *Weber* (*H.*). — Théorie des fonctions algébriques d'une variable. (181-290).

Introduction.

« Les recherches ont pour but d'établir, sous un point de vue simple et en même temps rigoureux et tout à fait général, la théorie des fonctions algébriques d'une variable, laquelle est l'un des résultats capitaux de la création de Riemann. Dans les études qu'on a faites jusqu'à présent sur ce sujet, on adopte ordinairement certaines hypothèses restrictives sur les singularités des fonctions considérées, et l'on ne mentionne qu'en passant les soi-disant cas d'exception comme cas limites, ou bien on les laisse entièrement de côté. De même on admet sur la continuité et la développabilité certains principes dont l'évidence est fondée sur l'intuition géométrique de divers genres. Une base sûre pour les concepts fondamentaux de même que pour le traitement général et libre d'exception peut être gagnée quand on part d'une généralisation de la théorie des fonctions rationnelles d'une variable, en particulier de la proposition d'après laquelle chaque fonction entière rationnelle est décomposable en facteurs linéaires. Cette généralisation est simple et connue dans le premier cas où le nombre que Riemann désignait par p a la valeur zéro. Pour le cas général, qui est à celui que nous venons d'indiquer comme le cas des nombres algébriques les plus généraux à celui des nombres rationnels, la voie féconde a été signalée par les méthodes employées avec le meilleur succès dans la théorie des nombres et qui s'attachent à la création, faite par Kummer, des nombres idéaux, méthodes qui sont susceptibles d'être transférées à la théorie des fonctions.

» Donnons, par analogie avec la théorie des nombres, le nom de *corps de fonctions algébriques* à un système de fonctions telles que les quatre règles fondamentales, appliquées à des fonctions du système, ne conduisent qu'à des fonctions du même système; alors cette notion coïncide complètement avec celle de la classe riemannienne de fonctions algébriques. On peut envisager une quelconque d'entre les fonctions d'un tel corps comme variable indépendante et les autres comme dépendant d'elle. Pour chacun de ces « modes de représen- » tation », il résulte un système de fonctions du corps qui sont à désigner comme *fonctions entières*, dont les quotients épuisent le corps entier. Parmi ces fonctions entières on peut encore distinguer des groupes de fonctions affectées des caractères essentiels de ces fonctions rationnelles entières qui ont un diviseur commun. Il est vrai qu'un tel diviseur n'existe pas au cas général; mais, quand on n'attache pas au diviseur lui-même les théorèmes en question sur les fonctions rationnelles, mais plutôt au système des fonctions divisibles

par lui, ils se prêtent à être entièrement appliqués aux fonctions générales algébriques. C'est ainsi qu'on parvient à la notion d'*idéal*, nom emprunté aux travaux de M. Kummer sur la théorie des nombres où les diviseurs non existants sont introduits au calcul comme « diviseurs idéaux », etc.

» Après une définition convenable de la multiplication, on peut exécuter tous les calculs sur ces idéaux comme sur les fonctions rationnelles. En particulier, il subsiste le théorème : « Tout idéal n'est décomposable que d'une seule ma- » nière en facteurs qui ne sont plus encore décomposables, et qui sont, par » conséquent, nommés *idéaux premiers*. Ces idéaux premiers sont l'analogue des facteurs linéaires dans la théorie des fonctions rationnelles entières. En s'appuyant sur eux, on parvient à une définition tout à la fois précise et générale du « point de la surface de Riemann », c'est-à-dire d'un système tout à fait déterminé de valeurs numériques qu'on peut attribuer aux fonctions d'un corps sans s'embarrasser dans des contradictions.

» Cette base étant acquise, une définition formelle du quotient différentiel mène alors au nombre du genre et à une représentation toute générale et élégante des différentiels de première espèce. Vient ensuite la démonstration du théorème de Riemann-Roch sur le nombre des constantes arbitraires dans une fonction déterminée par ses infinis et la théorie des différentiels de deuxième et de troisième espèce. Jusqu'à ce point, la continuité et la développabilité des fonctions recherchées n'entre nullement en considération. Ainsi une lacune ne serait nulle part à trouver si l'on voulait borner le domaine des nombres employés au système des nombres algébriques. Une partie bien délimitée et assez ample de la théorie des fonctions se traite donc uniquement par les moyens ressortant de sa propre sphère.

» On ne saurait nier que tous ces résultats ne s'ensuivent de la théorie de Riemann par un appareil beaucoup moindre de moyens et comme cas spéciaux d'une généralité bien vaste; mais on sait que cette théorie présente encore certaines difficultés relatives à la rigueur des démonstrations; et, en attendant qu'on ait pleinement réussi à vaincre ces difficultés, nous pensons que le chemin frayé par nous, ou au moins une voie semblable, est le seul qui conduise au but avec une rigueur et une généralité suffisantes pour la théorie des fonctions algébriques. Ainsi la théorie des idéaux se simplifierait même d'une manière extraordinaire, si l'on voulait postuler la notion de surface riemannienne, et, en particulier, celle d'un point sur elle, conjointement avec les intuitions qui se fondent sur la continuité des fonctions algébriques. Inversement, la théorie des idéaux s'établit algébriquement dans notre travail par un long détour et fait naître une définition tout à fait précise et rigoureuse du « point de la surface riemannienne », laquelle peut servir aussi de base à la recherche de la continuité et des questions qui s'y rattachent. Nous excluons encore, à présent, de notre recherche, les questions qui comprennent aussi celles relatives aux intégrales abéliennes et aux modules de périodicité. »

Ire Partie.

§ 1. Corps de fonctions algébriques. § 2. Normes, traces et discriminants. § 3. Le système des fonctions entières de z dans le corps Ω. § 4. Les modules de fonction. § 5. Congruences. § 6. Norme d'un module par rapport à un autre. § 7. Les idéaux dans o. § 8. Multiplication et division des idéaux. § 9. Lois de la divisibilité des idéaux. § 10. Les bases complémentaires du corps Ω.

§ 11. L'idéal de ramification. § 12. Les fonctions fractionnaires de z dans le corps Ω. § 13. Les transformations rationnelles des fonctions du corps Ω.

IIe Partie.

§ 14. Les points de la surface riemannienne. § 15. Les nombres d'ordre. § 16. Points conjugués et valeurs conjuguées. § 17. Représentation des fonctions du corps Ω par des quotients de polygone. § 18. Polygones équivalents et classes de polygones. § 19. Les faisceaux de polygones. § 20. Rabaissement de la dimension d'un faisceau par des conditions de divisibilité. § 21. Les dimensions des classes de polygones. § 22. Les bases normales de o. § 23. Les quotients différentiels. § 24. Le genre du corps Ω. § 25. Les différentiels dans Ω. § 26. Les différentiels de première espèce. § 27. Classes de polygone de première et de seconde espèce. § 28. Le théorème de Riemann-Roch pour les classes propres. § 29. Le théorème de Riemann-Roch pour les classes impropres de première espèce. § 30. Classes impropres de deuxième espèce. § 31. Les différentiels de deuxième et de troisième espèce. § 32. Les résidus. § 33. Relation entre les différentiels de première et de deuxième espèce.

Königsberger (*L.*). — Sur l'irréductibilité d'équations différentielles. (291-300).

Une équation différentielle algébrique est irréductible lorsqu'elle est irréductible par rapport au plus haut quotient différentiel au sens algébrique et qu'elle ne possède aucune intégrale algébrique d'un ordre quelconque. Ou bien : si une équation différentielle qui est irréductible au sens algébrique par rapport au plus haut quotient différentiel a une intégrale commune avec une autre équation différentielle et que cette intégrale ne soit pas en même temps une intégrale d'une équation différentielle d'ordre inférieur, l'équation proposée aura toutes ses intégrales communes avec l'autre, c'est-à-dire elle en est une intégrale algébrique.

Nöther (*M.*). — Sur un théorème de la théorie des fonctions algébriques. (Extrait d'une lettre à M. Fuchs). (301-303).

Démonstration de ce théorème de M. Weierstrass : « Dans la classe de fonctions définie par l'équation irréductible algébrique $f(s, x) = 0$ du genre p, il n'existe pas de fonction rationnelle de s, z qui ne devienne infinie d'un ordre $\mu < p + 1$ que dans un seul point, mais choisi arbitrairement (s_0, z_0).

Hunyady (*Eugen*). — Sur le lieu géométrique des centres de cônes de second degré qui passent par six points donnés. (304-306).

Réduction de l'équation donnée pour ce lieu, par M. Cayley, à celle développée par M. Hierholzer.

Hunyady (*Eugen*). — Complément au Mémoire : Sur les formes

différentes de l'équation de condition qui exprime que six points sont situés sur une section conique. (307-310).

Voir t. LXXXIII, p. 76 du même Journal; *Bulletin*, II_2, p. 224.

Frobenius et *Stickelberger*. — Sur la différentiation des fonctions elliptiques par rapport aux périodes et aux invariants. (311-327).

Considérons, outre l'argument u des fonctions elliptiques, les périodes 2ω et $2\omega'$ comme variables indépendantes qui ne soient soumises qu'à la condition de ne devenir ni infiniment grandes ni infiniment petites et d'avoir un quotient non réel. Alors les invariants correspondants g_2 et g_3 sont aussi des variables indépendantes susceptibles de toutes les valeurs finies pour lesquelles le discriminant $g_2^3 - 27g_3^2$ ne s'évanouit pas. Les périodes étant données, on calcule les invariants au moyen de ces équations

$$(1) \qquad g_2 = 60 \sum{}' \frac{1}{(2\nu\omega + 2\nu'\omega')^4}, \quad g_3 = 140 \sum{}' \frac{1}{(2\nu\omega + 2\nu'\omega')^6},$$

où les nombres ν, ν' parcourent tous les couples de nombres entiers depuis $-\infty$ à $+\infty$, à l'exception du couple 0, 0; ou bien, posant

$$(2) \qquad \tau = \frac{\omega'}{\omega}, \quad h = e^{i\pi\tau},$$

et supposant l'ordonnée de la quantité complexe τ positive,

$$(3) \qquad \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^4 12 g_2 = 1 + 240 \sum_1^\infty \frac{\lambda^3 h^{2\lambda}}{1 - h^{2\lambda}}, \quad \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^6 216 g_3 = 1 - 504 \sum_1^\infty \frac{\lambda^5 h^{2\lambda}}{1 - h^{2\lambda}}.$$

Pour trouver les équations aux différences partielles auxquelles satisfait une fonction elliptique considérée comme fonction de trois variables, les auteurs l'envisagent d'abord comme fonction de u, ω, ω', et puis ils transforment les équations différentielles obtenues en introduisant pour ω, ω' les variables g_2, g_3. Enfin ils réunissent dans des groupes les équations différentielles qui existent entre les périodes, les invariants, les périodes des intégrales de seconde espèce et les invariants transformés par une transformation linéaire des périodes.

§ 1. Les périodes 2ω, $2\omega'$ comme variables indépendantes. § 2. Les invariants g_2, g_3. § 3. Les périodes 2η, $2\eta'$. § 4. Le rapport des périodes et l'invariant absolu. § 5. Transformation des périodes.

Vogt (*Heinrich*). — Sur les sphères qui touchent un quadrilatère gauche. (328-341).

Il y a, en général, huit sphères qui touchent les côtés d'un quadrilatère gauche quelconque. Si la somme de deux côtés quelconques d'un quadrilatère gauche est égale à la somme des deux autres, le quadrilatère est touché par une infinité de sphères dont les centres sont situés sur une droite; entre celles-ci, il y a encore quatre sphères touchantes qui n'appartiennent pas à ce faisceau.

Malet (*John-C.*). — Sur certaines intégrales définies. (342-348).

Quelques observations sur des intégrales qui se ramènent à des intégrales elliptiques.

Stern (*M.-A.*). — Contribution à la théorie des nombres de Bernoulli. (349-350).

Les nombres de Bernoulli vont en croissant : il n'y en a que deux égaux

$$B_2 = B_4 = \frac{1}{30}.$$

Prix Jablonowski pour 1885.

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA.

2e série. — Tome XI; 1882-1883 (1).

Volterra. — Sur certaines conditions caractéristiques des fonctions d'une variable complexe. (1-55).

Voici les principaux problèmes traités par l'auteur :

Étant donné dans le plan d'une variable complexe un *champ* S que l'on peut représenter d'une manière conforme sur un cercle et qui est limité par un contour s formé de portions de courbes analytiques, déterminer une fonction $w = u + iv$ de la variable z qui soit continue et monodrome dans S et telle que, sur une partie du contour, u prenne des valeurs prescrites à l'avance, et qu'il en soit de même pour v sur le reste du contour. Le problème est résolu pour le cercle au moyen de la formule

$$w(z) = -\frac{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}{2\pi}\int_0^\theta f(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\sin\frac{\theta-\omega}{2}\sin\frac{\omega}{2}}}\,d\omega$$

$$+\frac{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\sin\frac{\theta-\omega}{2}\sin\frac{\omega}{2}}}\,d\omega,$$

où $f(\omega)$, $f_1(\omega)$ sont des fonctions réelles, finies et aptes à l'intégration de la variable réelle ω; l'auteur montre que si l'on considère un point $\omega = \alpha$ de l'arc $(0, \theta)$ pour lequel la fonction f n'ait pas de discontinuité de seconde espèce et qui ne soit pas une des extrémités de l'arc, la partie réelle de $w(z)$, quand on

---

(1) Voir *Bulletin*, VI_2, 103.

s'approche du point α, tend vers

$$\frac{f(\alpha+o)+f(\alpha-o)}{2}.$$

Les choses se passent pareillement, relativement à la partie imaginaire de $w(z)$ et à la fonction $f_1(\omega)$ pour les divers points de l'arc $(\theta, 2\pi)$.

Déterminer une fonction $w = u + iv$ de variable complexe z monodrome, finie et continue pour tous les points de l'intérieur et de la circonférence d'un cercle de rayon 1 et qui satisfasse, pour les points des arcs (A_p, θ_{p+1}) du contour, aux conditions suivantes

$$A_p u(\theta) + B_p v(\theta) = F(\theta) \; (p = 1, 2, \ldots, n),$$

A_p et B_p étant des nombres réels qui ne varient qu'avec p et $F(\theta)$ étant une fonction réelle finie, continue, à dérivée finie et continue.

Déterminer les fonctions $w(z) = u + iv$ qui, a l'intérieur d'un champ donné, sont monodromes finies et continues, et qui, lorsqu'on s'approche d'un point quelconque s du contour, le long de la normale au contour en ce point, sont telles que

$$f(s)u + \varphi(s)v$$

tende avec continuité vers une limite $\theta(s)$, les fonctions réelles $f(s)$, $\varphi(s)$, $\theta(s)$ étant soumises à certaines conditions relatives à la continuité et à l'existence des dérivées premières et secondes. Le problème est résolu dans le cas du cercle, puis dans le cas du champ compris entre deux cercles concentriques; la solution est étendue à d'autres champs dont on peut faire la représentation conforme sur un cercle, ou sur une couronne.

Dillner (*G.*). — Sur l'intégration des équations différentielles du problème des N corps. (56-64).

Ce travail fait suite à un Mémoire de l'auteur, inséré dans les *Actes de la Société royale des Sciences d'Upsal* pour l'année 1877. Les équations du mouvement y sont mises sous une forme très symétrique, à l'aide de transformations qui reposent sur une identité remarquable communiquée par M. Göran Dillner à l'Académie des Sciences de Paris dans la séance du 31 janvier 1882.

Mittag-Leffler. — Sur l'intégration des équations différentielles de M. Hermite du troisième et du quatrième ordre dont les intégrales n'admettent que des infinis du premier ordre. (65-80).

L'auteur, se proposant de poursuivre la voie ouverte par M. Hermite dans ses belles recherches sur l'équation de Lamé, considère les équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions doublement périodiques de la variable x, avec les deux périodes $2K$ et $2iK'$, ne deviennent infinis que pour $x = iK'$ et les points congruents et dont l'intégrale générale est une fonction méromorphe de x. Ces équations différentielles, d'après M. Fuchs (*Comptes rendus*, 22 mars 1880), sont de la forme suivante

$$y^{(n)} + \varphi_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + \varphi_{n-1}(x)y' + \varphi_n(x)y = 0.$$

où

$$\varphi_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \operatorname{sn}^2 x,$$
$$\varphi_3(x) = \beta_0 + \beta_1 \operatorname{sn}^2 x + \beta_2 D_x \operatorname{sn}^2 x,$$
$$\varphi_4(x) = \gamma_0 + \gamma_1 \operatorname{sn}^2 x + \gamma_2 D_x \operatorname{sn}^2 x + \gamma_3 D_x^2 \operatorname{sn}^2 x,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

où les constantes α, β, γ, ... doivent d'ailleurs satisfaire à certaines conditions. M. Mittag-Leffler annonce qu'il est en mesure de classer ces diverses équations, quel que soit l'ordre d'infinité des pôles que présentent les intégrales, et d'intégrer les diverses classes d'équations. Dans le Mémoire actuel, il se borne à étudier les équations du troisième et du quatrième ordre pour lesquelles l'intégrale générale n'a que des pôles du premier ordre.

D'après un théorème de M. Picard, précisé d'ailleurs par M. Mittag-Leffler, une équation différentielle linéaire à coefficients doublement périodiques, si elle admet une intégrale uniforme, admet une intégrale uniforme $\psi(x)$ telle que l'on ait

$$\psi(x + 2K) = \mu\psi(x), \quad \psi(x + 2iK') = \nu\psi(x),$$

μ et ν étant des constantes convenables.

Dans l'hypothèse précédemment admise, l'équation doit admettre comme intégrale une fonction doublement périodique de seconde espèce avec le seul pôle iK'; en adoptant les notations de M. Hermite, on exprime cette intégrale par le produit d'une exponentielle où figure une constante arbitraire λ multipliée par une expression de la forme $\frac{H(x+\omega)}{\Theta(x)}$, ω étant une constante arbitraire; en remplaçant, dans l'équation donnée par M. Fuchs, y par $f(x)$ et x par $iK' + \varepsilon$, développant suivant les puissances ascendantes de ε et écrivant que le premier membre n'est pas infini pour $\varepsilon = 0$, on obtient $n + 1$ relations entre les coefficients de l'équation et les constantes λ et ω : on obtient aussi deux types d'équations du troisième ordre et quatre types d'équations du quatrième ordre. Les calculs sont entièrement développés dans le Mémoire de M. Mittag-Leffler.

Brioschi. — Sur la classe d'équations différentielles linéaires considérées dans le précédent Mémoire de M. Mittag-Leffler. (81-92).

Revenant sur la même question, M. Brioschi montre quelles simplifications on peut apporter aux calculs en prenant pour point de départ les résultats et les notations exposés par lui dans un Mémoire antérieur (*Annali*, t. X, p. 74), il développe les calculs pour les équations linéaires du cinquième ordre.

Veronese. — Interprétations géométriques de la théorie des substitutions de n lettres particulièrement pour $n = 3, 4, 5, 6$, en relation avec les groupes de l'hexagramme mystique. (93-236).

Le Mémoire de M. Veronese a été analysé dans la première partie du *Bulletin*.

Piuma. — Sur une congruence de module premier. (237-245).

Trouver les conditions pour qu'on puisse satisfaire en nombres entiers à la congruence

$$Ax^p + By^q + C = 0 \pmod{m},$$

où $m = pq + 1$ est un nombre premier, qui ne divise pas les nombres entiers A, B, C.

Malet. — Extension d'un théorème de Legendre. (246-254; 312-315).

Si l'on pose

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m \theta \sin^p \theta}{(1 - k \sin^2\theta)^{\frac{1}{n}}} d\theta, \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \theta \sin^p \theta (1 - k \sin^2\theta)^{\frac{n-1}{n}} d\theta,$$

$$F' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{m'} \theta \sin^p \theta}{(1 - k' \sin^2\theta)^{\frac{1}{n}}} d\theta, \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m'} \theta \sin^p \theta (1 - k' \sin^2\theta)^{\frac{n-1}{n}} d\theta,$$

où

$$k + k' = 1, \quad m' = \frac{2}{n} - m - p - 1, \quad m + 1 > 0, \quad m' + 1 > 0, \quad p + 1 > 0,$$

l'équation différentielle linéaire

$$2nk(1-k)\frac{d^2u}{dk^2} + [n(p+m+2) - k(3n+np+2)]\frac{du}{dk} - (p+1)u = 0$$

admet pour intégrale générale $C_1 F + C_2 F'$, et l'on a la relation

$$k^{\frac{m+p}{2}} k'^{\frac{m'+p}{2}} \left[(1-m')F'E + (1-m)FE' - 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)FF'\right]$$
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m'+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{2n\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)}.$$

Bianchi. — Sur la résolvante de Lagrange pour les équations de Lagrange pour les équations de degré premier que l'on peut résoudre au moyen de radicaux. (255-283).

M. Betti (*Annali*, t. II, p. 102) a montré que si l'on peut résoudre au moyen de radicaux une équation de degré premier p, la résolvante de Lagrange de cette équation, outre le facteur rationnel linéaire, admet encore $\varphi(p-1) - 1$ facteurs rationnels de degré p, φ étant la fonction numérique bien connue. M. Bianchi montre qu'il n'y a pas d'autres facteurs rationnels de degré p; il détermine en outre le nombre de facteurs irréductibles de degré $p\delta$, δ étant un diviseur de $p-1$; ce nombre est égal à $\frac{\psi(\delta)}{\delta}$ si δ n'est pas égal à $p-1$; il est égal à

$$\frac{\psi(p-1)}{p} - \frac{f(p-1)}{p},$$

pour $\delta = p - 1$; dans ces formules, les fonctions numériques $f(\delta)$, $\psi(\delta)$ sont définies comme il suit :

$$f(\delta) = 1.2.3\ldots(\delta - 1)\left(\frac{p-1}{\delta}\right)^{\delta-1}\varphi\left(\frac{p-1}{\delta}\right) - 1,$$

$$\psi(\delta) = f(\delta) - \Sigma f\left(\frac{\delta}{p_i}\right) + \Sigma f\left(\frac{\delta}{p_i p_k}\right) - \Sigma f\left(\frac{\delta}{p_i p_k p_l}\right) + \ldots.$$

Dans cette dernière égalité, les sommations sont étendues aux diverses combinaisons que l'on peut former avec les facteurs premiers distincts $p_1, p_2, p_3, \ldots$ de δ.

Relativement à cette fonction numérique $\psi(\delta)$, M. Bianchi établit la propriété suivante

$$\psi(\delta) \equiv 0 \pmod{\rho}.$$

Veronese. — Sur les groupes $(P)_{360}$, $(\Pi)_{360}$ de la figure formée par six complexes linéaires de droites deux à deux en involution. (284-290).

Cette Note complète les résultats du Mémoire « Sur l'interprétation... ».

Brioschi. — Sur les relations qui existent entre les covariants et les invariants d'une même forme binaire. (291-304).

Si l'on désigne par m le nombre des covariants indépendants d'une forme binaire, par r le nombre de ses invariants indépendants et par k le nombre de ses coefficients, il y aura $m + r - k - 1$ relations indépendantes entre les covariants et les invariants de cette forme : ainsi pour les formes binaires du troisième ou du quatrième ordre, il y a une telle relation; il y en a 18 pour une forme binaire du cinquième ordre. M. Brioschi a montré (*Annali*, t. I, 1858) comment la théorie des *covariants associés* permettait de trouver les relations en question pour les formes du troisième et du quatrième ordre. Cette même méthode pour être encore suivie pour les formes d'ordre supérieur, mais elle conduit à des calculs d'élimination très compliqués; M. Brioschi montre peu quels artifices ou peut la simplifier, et donne les relations entre les covariants et les invariants d'une forme du cinquième ordre; il applique ces relations pour faire disparaître, comme M. Hermite a montré qu'on pouvait le faire, le deuxième et le quatrième terme d'une équation du cinquième degré; il termine en montrant comment cette réduction et la réduction semblable pour l'équation du sixième degré dépendent du théorème général que voici :

Soit f une forme binaire de l'ordre n, soient h, k des covariants de cette forme du même ordre m, et de degrés respectifs u, v.

Si l'on élimine le rapport $\frac{x_1}{x_2}$ entre les équations

$$f = 0, \quad hy - k = 0,$$

on obtiendra une transformée de la forme

$$A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \ldots + A_n = 0,$$

dans laquelle les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sont des invariants de la forme

binaire f, le coefficient A_r est de degré

$$nu + m + r(v - u);$$

Si par suite la forme f n'admet pas d'invariant de ce degré, de coefficients A_r sera nul.

Tonelli. — Un théorème sur la fonction potentielle. (305-311).

Ce théorème permet de déduire d'une fonction potentielle, dans un espace à n dimensions, d'autres fonctions potentielles, au moyen d'intégrations répétées.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK [1].

Tome XXVII; 1882.

Heymann. — Sur l'intégration des équations différentielles. (1-40).

I. Substitution des coordonnées tangentielles aux coordonnées ponctuelles.

1. Équation différentielle linéaire du second ordre.
2. Application à l'équation de Liouville

$$(a_2 + b_2 u + c_2 u^2)\frac{d^2 v}{du^2} + (a_1 + b_1 u)\frac{dv}{du} + a_0 v = 0.$$

II. Intégration au moyen de coordonnées homogènes.

1. Introduction de constantes homogènes.
2. Intégration de l'équation différentielle

$$f(x_1^m u_1,\ x_2^m u_2,\ x_3^m u_3) = 0,$$

où f désigne une fonction entière homogène des $x_i^m u_i$ et où

$$u_1 = \mu(x_2 dx_3 - x_3 dx_2).$$

II. Essais sur l'intégration de l'équation différentielle $M dx + N dy = 0$, où

$$M = A_1 x^2 + B_1 y^2 + 2C_1 xy + 2D_1 x + 2E_1 y + F_1,$$
$$N = A_2 x^2 + B_2 y^2 + 2C_2 xy + 2D_2 x + 2E_2 y + F_2.$$

1. L'équation

$$(a + 2bx + cx^2)\frac{dy}{dx} + (y - \alpha_1 - \beta_1 x)(y - \alpha_2 - \beta_2 x) = 0$$

se ramène à l'équation de Liouville.

---

[1] Voir *Bulletin*, VI_2, 139.

2. Il en est de même de l'équation

$$(a + 2bx + cx^2)\frac{dy}{dx} + Ax^2 + By^3 + \ldots + F = 0.$$

3. Cas particuliers de cette dernière équation.

4. Intégration au moyen de dérivations d'ordre quelconque.

5. Équations différentielles $M\,dx + N\,dy = 0$ qui se ramènent au type précédent.

6. Étude de quelques cas particuliers au moyen d'une substitution quadratique.

Thomae. — Étude élémentaire de la série hypergéométrique. (41-55).

Suite d'un Mémoire contenu dans le Volume précédent.

IV. Ensemble des diverses solutions de l'équation hypergéométrique.

V. La série hypergéométrique comme fonction de son cinquième élément.

VI. De la périodicité.

Thieme. — Sur la géométrie du tétraèdre. (56-61).

Le lieu des points tels que leurs projections sur les faces d'un tétraèdre soient dans un même plan est une surface du troisième degré. L'auteur traite de diverses questions connexes à cette surface : points tels que leur quatre projections soient les sommets d'un trapèze, d'un parallélograme, les trois sommets d'un triangle et le point de rencontre des hauteurs, etc.

Nous noterons encore la proposition suivante : « A chaque couple d'arêtes opposées correspond un hyperboloïde orthogonal, lieu des intersections des plans perpendiculaires entre eux qui passent par ces deux arêtes; ces trois hyperboloïdes et l'hyperboloïde qui contient les quatre hauteurs passent par une même courbe du quatrième degré. »

Schroeter. — Théorème de Géométrie. (61-62).

Sur les quatre coniques, que l'on peut déduire de quatre points, en prenant l'un pour centre, les trois autres comme sommets d'un triangle polaire. Si A, B, C sont les sommets d'un triangle, a, b, c les pieds des hauteurs, H leur point d'intersection, on a

$$\frac{1}{AH.Aa} + \frac{1}{BH.Bb} + \frac{1}{CH.Cc} = \frac{2}{HA.Ha} = \frac{1}{HB.Hb} = \ldots$$

Schlömilch. — Sur certaines intégrales elliptiques. (62-64).

Application aux intégrales elliptiques de première et de seconde espèce de la remarque suivante :

Si les deux fonctions $F(x)$, $f(x)$ sont telles que l'on ait

$$F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = \text{const.}, \quad f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right),$$

on aura

$$\int_0^\infty F(x) f(x) \frac{dx}{x} = \text{const.} \int_0^1 f(x) \frac{dx}{x}.$$

Meisel. — Sur l'illumination d'une sphère par une sphère. (65-85).

Étude de la variation de l'intensité dans la zone de pénombre.

Hurwitz. — Quelques propriétés des fonctions de Dirichlet

$$F(s) = \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s},$$

qui interviennent dans la détermination du nombre de classes des formes quadratiques binaires. (66-101).

Soit $\left(\frac{D}{n}\right)$ le symbole de Legendre étendu par Jacobi et soient

$$F(s, D) = \frac{1}{1 - (-1)^{\frac{D^2-1}{8}} \frac{1}{2^s}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s},$$

si $D \equiv 1 \pmod{4}$, et, dans les autres cas,

$$F(s, D) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}.$$

Les fonctions $F(s, D)$ sont des fonctions uniformes de la variable s; toutes ces fonctions, sauf $F(s, 1)$, ont des valeurs finies pour toutes les valeurs finies de s; la fonction $F(s, 1)$ est finie, sauf pour $s = 1$, et l'on a

$$\lim [(s-1) F(s, 1)]_{s=1} = 1.$$

Ces fonctions vérifient les relations suivantes :

$$F(1-s, D) = \left(\frac{\varepsilon\pi}{D}\right)^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} F(s, D)$$

pour D positif,

$$F(1-s, D) = \left(\frac{-\varepsilon D}{\pi}\right)^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}+\frac{1}{2}\right)} F(s, D)$$

pour D négatif.

On doit prendre $\varepsilon = 1$ pour $D \equiv 1 \pmod{4}$, et $\varepsilon = 4$ pour tous les autres cas.

Ces relations contiennent, comme cas particulier, des propositions dues à Riemann (*Werke*, p. 136), et à M. Schlömilch (*Zeitschrift*, CIII, p. 138).

Schwering. — Recherches sur les résidus de cinquièmes puis-

sances et sur les nombres entiers formés avec les racines cinquièmes de l'unité. (102-118).

1. Sur la décomposition des nombres premiers de la forme $10n+1$ en quatre facteurs complexes $\pi(\alpha)$, $\pi(\alpha^2)$, $\pi(\alpha^3)$, $\pi(\alpha^4)$ où α est une racine cinquième imaginaire de l'unité et où $\pi(\alpha) = a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3$, a, b, c, d étant des nombres entiers.

2. La forme normale de Kummer.

3. Sur les périodes $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_4$,

$$\begin{aligned} \eta_0 &= x + x^{g^5} + x^{g^{10}} + \ldots + x^{g^{p-6}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \eta_4 &= x^{g^4} \qquad + x^{g^9} + \ldots + x^{g^{p-2}}, \end{aligned}$$

où x est une racine $p^{\text{ième}}$ imaginaire de l'unité et g une racine de l'unité appartenant au module p.

4. Formation de l'équation aux périodes (équation du cinquième degré, dont $\eta_0, \ldots, \eta_4$ sont les racines).

5. Recherches ultérieures sur les racines $\eta_0, \ldots, \eta_4$.

Cardinaal. — Sur la construction d'une surface du second degré. (119-122).

On suppose que huit des neuf points qui déterminent cette surface sont donnés comme points doubles d'involutions.

Pasch. — Remarque sur la théorie des coniques. (122-124).

Pasch. — Remarques sur les suites projectives. (124-125).

Schumann. — Démonstration d'un théorème de Liouville sur les fonctions doublement périodiques. (125-126).

Schaeweg. — Sur certaines transversales dans les triangles sphériques. (126-128).

Wiener. — Sur les développées des roulettes. (129-139).

Study. — Sur les relations entre les distances. (140-159).

L'auteur établit d'une façon systématique et fort simple, pour un espace plan à n dimensions, une suite de propositions relatives à des relations entre des distances ou des sommes de tétraèdres, propositions dont la plupart se trouvent dans les Livres ou Mémoires suivants : Baltzer, *Theorie und Anwendungen der Determinanten;* Darboux, *Sur les groupes de points*, etc. (*Annal. de l'École Normale*, 1872); Frobenius, *Anwendungen der Determinanten auf Geometrie* (*Journal de Crelle*, t. LXXIX); d'Ovidio, *Alcune proprieta metriche*, etc. (*Atti della Academia dei Lincei*, 2e série, t. III; 3e série, t. I). Il emploie pour déterminer un point une pyramide à $n+1$ sommets et un système de $n+1$

masses, qui, placées à chaque sommet, sont telles, que le point considéré soit leur centre de gravité.

Böklen. — Sur la surface des ondes dans un cristal biaxe. (160-175).

L'auteur établit diverses propriétés de cette surface qui se rapportent, les unes à la théorie des moments d'inertie, les autres au complexe de droites par lesquelles on peut mener deux plans tangents rectangulaires et un ellipsoïde.

Veltmann. — Sur la mise en ordre des singularités en nombre infini d'une fonction. (170-176).

L'auteur montre que, sur la circonférence d'un cercle, on peut construire un ensemble isolé de points en nombre infini, tels que, si l'on range les arcs limités par ces points d'après leur grandeur, la série évidemment convergente dont ces arcs sont les termes ait une somme moindre que la circonférence, et comment on peut construire une fonction intégrable ayant ces points pour points de discontinuité.

Thomae. — Sur les intégrales elliptiques de seconde espèce. (179-180).

Soient

$$t(u) = \int_0^u \xi\, du, \quad du = \frac{1}{2} d\xi \sqrt{\xi(1-\xi)(1-\varkappa\xi)}, \quad \xi = \operatorname{sn} u.$$

L'auteur effectue le développement en série de la quantité $At(u) + Bu$ sous la forme

$$\sqrt{\xi(1-\xi)(1-\varkappa\xi)}\ (a_1 + a_2\xi + a_3\xi^2 + \ldots).$$

Thomae. — Sur certaines fonctions elliptiques spéciales. (181-189).

Inversion de l'intégrale

$$\int \frac{dz}{\sqrt[3]{(z-k_1)^2(z-k_2)^2(z-k_3)^2}}.$$

Hofman. — Sur une couple de droites à propriétés optiques qui correspondent à celles des foyers. (189-192).

Soient K une conique, P un point de son plan, il existe deux droites x, y qui jouissent de la propriété suivante. Si A est un point arbitraire de K et si l'on place suivant la droite AP un miroir dont le plan soit perpendiculaire à celui de la conique K, si enfin X, Y sont les points d'intersection des droites x, y avec la tangente en A, un rayon de lumière allant du point X vers le point P ira, après la réflexion, passer par Y.

Veltman. — La série de Fourier. (193-235).

Ce Mémoire contient d'abord divers préliminaires concernant la théorie des séries, l'existence de l'intégrale définie, la théorie des ensembles de points sur la circonférence d'un cercle; l'auteur fait ensuite l'étude des séries de Fourier fondée sur l'intégrale de Poisson

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma)}{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\gamma-t)} d\gamma.$$

Il s'attache, en particulier, à montrer qu'il y a des fonctions qu'on ne peut représenter par une série de Fourier, même en faisant abstraction des valeurs isolées d'indétermination. Telles sont, tout d'abord, les fonctions non intégrables. M. Veltman montre que, parmi les fonctions qu'on ne peut représenter, il y en a dont les discontinuités sont isolées; si l'on veut représenter seulement les valeurs d'une telle fonction sur des portions d'arc, on peut y réussir par la série de Fourier; à cette fin, on prend les intégrales qui figurent dans la série seulement sur ces portions d'arc; mais il peut arriver aussi que ce procédé ne réussisse pas; c'est ce qui arrive dans le cas où les arcs sont divisés en un nombre infini de parties infiniment petites par des points où il n'y a pas de dérivées. En supposant la fonction finie, la série de Fourier n'est pas infinie, mais elle peut être indéterminée.

Hauck. — Études de perspective. (236-247).

Addition au Mémoire *Ueber die Grundprincipien der Linearperspective* inséré dans le tome précédent du *Zeitschrift.*

Kotànyi. — Constructions d'expressions algébriques au moyen d'involutions et d'une section conique. (248-252).

Petzold. — Construire une droite qui coupe sous des angles donnés deux droites données par leurs projections. (252-253).

— Académie du prince Jablonowski. Sujets proposés. (253-256).

Pour l'année 1885 : Étude de la surface générale du quatrième ordre.

Weiler. — Génération des complexes du premier et du second degré au moyen de congruences linéaires. (257-288).

Parmi les 49 complexes proprement dits du second degré, il y en a 38 que l'on peut engendrer au moyen de congruences linéaires; M. Weiler les énumère en suivant son Mémoire *Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweites Grades* (*Math. Ann.*, t. VII), indique pour chacun d'eux la nature de la surface des singularités, qui est nécessairement réglée, et montre enfin comment on peut construire les deux droites qui détermine chacune des congruences linéaires dont l'ensemble infini constitue le complexe considéré.

Wittwer. — Fondements de la Chimie mathématique. (289-309).

Morawetz. — La réflexion et la réfraction de la lumière sur les courbes et les surfaces. (310-313).

Veltman. — Sur la théorie des ensembles des points. (313-314).

Nouvel exemple d'une singularité précédemment signalée par l'auteur.

Wittstein. — Contribution à la méthode des moindres carrés. (313-317).

Schlömilch. — Sur des développements en série relatifs à certaines intégrales hyperelliptiques.

Legendre a montré comment on pouvait développer les intégrales elliptiques complètes, suivant les puissances du module ou du module complémentaire. C'est ce dernier calcul qu'effectue l'auteur par l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{\mu}(1-k^2x^2)^{1-\mu}},$$

où l'on suppose $0 < \mu < 1$.

Geisenheimer. — Sur le centre d'une courbe gauche du troisième ordre. (321-328).

M. Schröter a montré (*Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung,* etc.) que si l'on considère une cubique gauche et dans un plan osculateur la conique enveloppe des traces sur ce plan des autres plans osculateurs, le lieu du centre de cette conique était encore une conique. C'est le centre de cette dernière conique, contrairement à une démonstration proposée par M. Schröter, que M. Geisenheimer propose d'appeler *centre de la cubique gauche.* Il donne de ce centre un très grand nombre de propriétés; c'est, par exemple, le centre de l'hyperboloïde qui contient les trois asymptotes de la cubique.

Wittwer. — Fondements de la Chimie mathématique. (329-345).

Leonhardt. — Fondements d'une Géométrie dipolaire. (346-362).

Les « coordonnées dipolaires » se présentent dans certaines questions de distribution de l'électricité. « Étant donnés sur une droite fixe deux points AA', un plan qui passe par AA' est fixé par son azimut φ, et, dans ce plan, un point B est fixé par l'angle ω sous lequel le cercle qui passe par B, A, A' coupe AA' et par la valeur du rapport $\frac{AB}{BA'} = \lambda = e^{-\theta}$.» L'auteur établit diverses formules relatives à ce système de coordonnées.

Schumann. — Sur la réciprocité d'un théorème de Chasles et

2ud Part.

d'un théorème de Steiner, et sur certaines relations géométriques qui en découlent. (363-368).

Démonstration simple et conséquences diverses de ces propositions : « Les sommets de deux triangles dont chacun est conjugué par rapport à une conique sont sur une même conique ; réciproquement, deux systèmes de trois points sur une conique peuvent être regardés comme les sommets de deux triangles dont chacun est conjugué par rapport à une conique.

Schumann. — Relation générale entre cinq points de l'espace. (368-369).

Böckler. — Sur la courbure des surfaces. (369-374).

Propriétés des lignes focales de surfaces du second degré qui touchent une surface F en un point, suivant l'ordre du contact, et suivant certaines autres conditions imposées.

Heymann. — Sur une transformation de l'équation différentielle $\varphi_0 \frac{dy}{dx} + \varphi_1 y^2 + \varphi_2 y + \varphi_3 = 0$. (374-380).

Schlömilch. — Deux théorèmes projectifs. (380).

« Si ABCD est un quadrilatère ordinaire, si E, F, G sont les points d'intersection de AC, BD, de AB, CD, de DA, BC, si enfin on projette la figure d'un point quelconque O sur un plan qui passe par la droite FG, et que A'B'C'D' soit la figure projetée, les quatre droites AC', BD', CA', DE' passent par un même point P de FG. » — Théorème corrélatif.

Sachse. — Démonstration des théorèmes précédents. (381-383).

Hofman. — Théorème de Géométrie élémentaire; essai sur la théorie des projections stéréographiques. (383-384).

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (1).

Tome XCVIII; 1884.

N° 1; 7 janvier.

Goursat. — Sur certaines fonctions doublement périodiques de seconde espèce. (35).

Soit $F(x)$ une fonction doublement périodique de seconde espèce dont les

(1) Voir *Bulletin*, VII_2, 187.

multiplicateurs sont des racines de l'unité, l'un au moins étant différent de l'unité, l'intégrale $\int F(x)dx$ est égale à une fonction doublement périodique augmentée d'une somme de logarithmes de fonctions doublement périodiques multipliées par des facteurs constants.

Floquet. — Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. (38).

Soit

$$P(y) = \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_m y = 0$$

une telle équation, avec les périodes ω, ω' pour les coefficients : en considérant la période ω seule, M. Floquet a établi l'existence de m solutions distinctes de la forme

$$\mathfrak{L}(x) = \varphi_0(x) + x\varphi_1(x) + \ldots + x^i \varphi_i(x),$$

où les φ se reproduisent à un facteur constant près par le changement de x en $x + \omega$. Ce facteur est racine d'une certaine équation $\Delta = 0$, ou Δ est un déterminant d'ordre n; c'est l'*équation fondamentale relative à la période* ω; soient $\varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_n$ les racines distinctes; à chaque racine ε_i répondent deux nombres, son ordre de multiplicité μ_i et l'ordre λ_i à partir duquel les mineurs de Δ ne sont plus nuls pour $\varepsilon - \varepsilon_i$; μ_i est le nombre maximum de solutions distinctes de la forme $\mathfrak{L}(x)$ avec le multiplicateur ε_i, λ_i est le nombre de solutions $S(x)$ telles que l'on ait $S(x + \omega) = \varepsilon_i S(x)$: soit, en outre, $\nu = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_n$; à la seconde période correspondront de même les nombres n', ν'; soit N le nombre maximum de solutions directes qui sont des fonctions doublement périodiques. N ne peut surpasser ni ν ni ν', ni être inférieur à n et à n'; donc $N \leqq 1$ (Picard et Mittag-Leffler). Pour que N soit égal à m, il faut et il suffit que toute racine de chaque équation fondamentale annule tous les mineurs du premier membre jusqu'à l'ordre marqué par son degré de multiplicité exclusivement.

Enfin, dans une Note ultérieure, M. Floquet montre que les intégrales qui ne sont pas doublement périodiques s'expriment par un polynôme aux deux variables x, $Z(x)$ ayant pour coefficients des fonctions doublement périodiques de seconde espèce de mêmes multiplicateurs.

Radau. — Sur une notation propre à représenter certains développements. (39).

Léauté. — Calcul de l'arc de contact d'une bande métallique flexible enroulée suivant certaines conditions données, mais quelconques, sur un cylindre circulaire. (41).

La lame étant supposée primitivement droite, les équations de la courbe élastique sont de la forme

$$\xi = \sigma + 2a\left[k^2 \frac{\operatorname{sn}\frac{\sigma}{a}\operatorname{cn}\frac{\sigma}{a}}{\operatorname{dn}\frac{\sigma}{a}} - E\left(\frac{\sigma}{a}\right)\right], \quad \eta = 2akk' \operatorname{sn}\frac{\sigma}{a},$$

a étant une constante, et σ étant l'arc de la courbe élastique.

N° 2; 14 janvier.

Laguerre. — Sur le genre de quelques fonctions entières. (79).

F(x) désignant une fonction transcendante entière de genre n, la fonction suivante

$$\Theta F(x) + \Theta_1 F'(x) + \Theta_2 F''(x) + \ldots + \Theta_h F^{(h)}(x),$$

où h est un entier quelconque, où F', F'', ... sont les dérivées de F(x), $\Theta_1, \ldots, \Theta_h$ des polynômes entiers, est une fonction entière du genre n, si la fonction F(x) n'admet qu'un nombre limité de racines imaginaires.

Genocchi. — Sur le limaçon de Pascal. (81).

Floquet. — Sur les opérations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. (82).

N° 3; 21 janvier.

Halphen. — Sur les multiplicateurs des équations différentielles linéaires. (134).

L'auteur a montré, dans deux Communications précédentes (t. XCVII, p. 1488 et 1541), comment on pouvait intégrer une équation différentielle linéaire du troisième ordre, connaissant, en fonction de la variable indépendante, l'expression d'un polynôme homogène du troisième degré composé avec les solutions inconnues; il développe les calculs dans la Communication actuelle et traite l'exemple suivant :

Intégrer l'équation

$$fy''' + \frac{2}{3}f'y'' + \frac{4}{9}f''y' - \frac{1}{81}f'''y = 0,$$

où f désigne un polynôme du troisième degré, sachant qu'il existe entre les solutions une relation homogène du troisième degré à coefficients constants.

Laguerre. — Sur les valeurs que prend un polynôme entier lorsque la variable varie entre des limites déterminées. (136).

Soit le polynôme entier

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

formons les quantités

$$Q_0 = a_0, \quad Q_1 = Q_0 \xi + a_1, \quad Q_2 = Q_1 \xi + a_2, \quad \ldots, \quad Q_n = Q_{n-1} \xi + a_n;$$
$$P_n = Q_n, \quad P_{n-1} = P_n + (\eta - \xi) Q_{n-1},$$
$$P_{n-2} = P_{n-1} + (\eta - \xi) Q_{n-2}, \quad \ldots, \quad P_0 = P_1 + (\eta - \xi) Q_0,$$

en supposant $\eta > \xi > 0$; le nombre des racines de l'équation $F(x) = 0$ qui sont

comprises entre η et ξ est au plus égal au nombre de variations de la suite

$$P_0, P_1, \ldots, P_n,$$

et la valeur du polynôme $F(x)$ quand x varie depuis ξ jusqu'à η demeure constamment comprise entre la plus petite et la plus grande des quantités P.

Cottillon. — Note sur le lavis d'une sphère. (139).

N° 4; 28 janvier.

Baillaud. — Sur le mouvement du premier satellite de Saturne. (205).

Détermination du moyen mouvement.

Laguerre. — Sur la réduction en fractions continues d'une fraction qui satisfait à une équation linéaire du premier ordre à coefficients rationnels. (209).

Conclusion explicite d'une Note insérée dans le *Bulletin de la Société mathématique* (t. VIII, p. 21).

André (D.). — Abaissement des limites fournies par la règle des signes de Descartes. (212).

Soit $f(x)$ un polynôme entier quelconque; considérons trois termes où les exposants de x soient trois entiers consécutifs et dont les coefficients ont pour valeurs absolues L, M, N; ce groupe sera un *trinôme abaisseur*, si les coefficients extrêmes sont de même signe et si l'on a $M^2 \leqq LN$, un trinôme abaisseur est de la *première* ou de la *seconde espèce* suivant qu'il présente deux variations ou deux permanences; le nombre positif α est dit *compris* dans le trinôme abaisseur si l'on a

$$\frac{M}{L} \leqq \alpha \leqq \frac{N}{M};$$

deux trinômes abaisseurs sont *distincts* lorsqu'ils n'ont pas plus d'un terme en commun; plusieurs trinômes abaisseurs sont distincts, quand deux quelconques sont distincts; des trinômes abaisseurs en nombre quelconque sont *compatibles* lorsqu'il existe un nombre α au moins qui soit compris dans chacun d'eux. Ceci posé, on a les propositions suivantes :

Lorsque l'on multiplie $f(x)$ par $x + \alpha$, le nombre α étant positif, il se perd juste autant de couples de variations qu'il y a dans $f(x)$ de trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts les uns des autres et comprenant α.

Si l'on désigne par θ le plus grand nombre de trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et compatibles, que présente le polynôme $f(x)$, le nombre des racines positives de l'équation $f(x) = 0$ est au plus égal à $\nu - 2\theta$, et s'il est inférieur à cette limite, c'est d'un nombre pair.

Si l'on désigne par τ le plus grand nombre de trinômes abaisseurs de la seconde espèce, distincts et compatibles, que présente le polynôme $f(x)$, le

nombre des racines négatives de l'équation $f(x) = 0$ est au plus égal à $w - 2\tau$, et s'il est inférieur à cette limite, c'est d'un nombre pair.

Dans ces deux derniers énoncés, v et w désignent respectivement les limites supérieures du nombre de racines positives et du nombre de racines négatives que fournit le théorème de Descartes.

Appell. — Sur la distribution du potentiel dans des masses liquides limitées par des faces planes. (215).

M. Chervet a exprimé (23 septembre 1883) la distribution du potentiel dans une masse liquide indéfinie limitée par deux plans parallèles, en supposant les électrodes placées en deux points symétriques par rapport au plan médian; pour cela M. Chervet introduit une fonction qui, suivant la terminologie de M. Appell (3 février 1883), est une fonction uniforme de x, y, z admettant un groupe de périodes et ayant une infinité de pôles du premier degré sur la droite joignant les électrodes; M. Chervet et M. Appell ont depuis étendu ces résultats.

« J'ai reconnu, dit M. Appell, que ces résultats sont susceptibles d'une grande extension, et, jusqu'à présent, j'ai résolu la même question :

» 1° Pour une masse liquide indéfinie limitée par deux plans parallèles ou ayant la forme d'un prisme droit à base rectangle, mais en supposant les électrodes placées d'une façon quelconque;

» 2° Pour une masse liquide ayant la forme d'un parallélépipède rectangle, les électrodes étant placées d'une façon quelconque.

» La solution de toutes ces questions peut se résumer ainsi : En considérant l'une des électrodes comme un point lumineux et les faces planes de la masse liquide comme des surfaces réfléchissantes du côté du liquide, on construit toutes les images de ce point et l'on forme une fonction $F(x, y, z)$ satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$, et admettant pour pôles de résidus $+1$ le point lumineux et toutes ses images; considérant de même l'autre électrode et toutes ses images, on formera une fonction analogue $F_1(n, y, z)$ ayant tous ces points pour pôles de résidus $+1$; la différence

$$F(x, y, z) - F_1(x, y, z),$$

augmentée d'une fonction entière convenable, sera le potentiel cherché.

» La formation de ces deux fonctions F et F_1 repose sur l'extension du théorème de M. Mittag-Leffler aux fonctions uniformes vérifiant l'équation $\Delta V = 0$, extension que j'indique en détail dans un Mémoire actuellement en cours de publication, dans les *Acta Mathematica*. Il est à présumer que cette règle fournira le potentiel dans un grand nombre d'autres masses liquides limitées par des plans; c'est ce que je me réserve d'examiner dans un Mémoire plus étendu. »

Liouville (*R.*). — Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre qui contiennent linéairement les dérivées les plus élevées. (216).

Étant donnée une telle équation, dans laquelle ne figure pas la fonction inconnue, l'auteur montre qu'il existe toujours une substitution telle que l'équation transformée ait la même forme que l'équation proposée, si ce n'est que la fonction inconnue pourra s'y trouver.

Cette substitution sera évidemment très avantageuse quand l'équation transformée admettra quelque intégrale intermédiaire. L'auteur applique ce procédé à l'équation

$$(x^2 - y^2)(r - t) + 4xys = 0,$$

par laquelle on détermine toutes les représentations planes de la sphère qui conservent les aires infiniment petites et, en même temps, l'orthogonalité des méridiens et des parallèles; il montre comment on peut en trouver une infinité de solutions se déduisant successivement les unes des autres.

Léauté. — Relation entre la puissance et la résistance appliquées aux deux points d'attache d'un frein à lame, lorsque l'on tient compte de l'élasticité de la lame. (219).

N° 5; 4 février.

Sylvester. — Sur les quantités formant un groupe de nonions analogues aux quaternions de Hamilton. (273).

Le Paige. — Sur les involutions biquadratiques. (285).

Sur la détermination du vingtième élément d'une involution du quatrième ordre et du troisième rang au moyen de dix-neuf autres.

Poincaré. — Sur les courbes définies par les équations différentielles. (287).

Considérant une courbe définie par les équations

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

où X, Y, Z sont des polynômes entiers en x, y, z, l'auteur suppose que, en suivant par exemple des procédés analogues à ceux qu'il a indiqués (23 juillet 1883), on ait reconnu qu'il est possible de satisfaire à ces équations au moyen d'une courbe C_0, et il étudie la forme des courbes (C) définies par les équations données dans le voisinage de C_0. Il rattache ensuite cette question à l'étude de la convergence des séries de M. Lindstedt.

Picard. — Sur une classe de fonctions abéliennes. (289).

L'auteur donne une intéressante formule relative à la transformation d'une fonction θ particulière, dans le cas de $p = 3$, formule qui rapproche cette fonction particulière θ des fonctions θ à une seule variable.

André (D.). — Nombre exact de variations perdues par la multiplication par $x - \alpha$. (292).

L'auteur, poursuivant ses recherches sur la règle de Descartes, donne un

théorème analogue à celui qui a été cité plus haut, mais toutefois un peu moins simple.

Lefébure. — Sur la composition de polynômes algébriques qui n'admettent que des diviseurs premiers d'une forme déterminée. (293).

L'auteur recherche, d'une manière générale, des polynômes qui ne contiennent que des diviseurs premiers de l'une quelconque des formes Hr_1r_2+1, $Hr_1r_2r_3+1$, $Hr_2r_1\ldots r_\rho+1$, $r_1, r_2, \ldots, r_\rho$ représentant des nombres premiers quelconques en quantité arbitraire.

N° 6; 11 février.

Poincaré. — Sur les substitutions linéaires. (349).

Classification en familles des substitutions de la forme

$$\left(x, y;\ \frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''},\ \frac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c''}\right).$$

Farkas. — Généralisation du théorème de Jacobi sur les équations d'Hamilton. (352).

Sur la formation d'une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles qui correspond à un systeme canonique, quand on a intégré ce système.

Le Paige. — Sur les courbes du quatrième ordre. (353).

Sur la construction de ces courbes.

Kowalewski (*Mme de*). — Sur la propagation de la lumière dans un milieu cristallisé. (356).

Lamé a ramené la question de la propagation de la lumière dans un milieu cristallisé à l'intégration du système suivant d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(a^2\frac{\partial\eta}{\partial x} - b^2\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(c^2\frac{\partial\xi}{\partial z} - a^2\frac{\partial\xi}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(b^2\frac{\partial\zeta}{\partial y} - c^2\frac{\partial\eta}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(a^2\frac{\partial\eta}{\partial x} - b^2\frac{\partial\xi}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(c^2\frac{\partial\xi}{\partial z} - a^2\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b^2\frac{\partial\zeta}{\partial y} - c^2\frac{\partial\eta}{\partial z}\right),$$

où t représente le temps; x, y, z les coordonnées d'un point du milieu vibrant; ξ, η, ζ les projections de l'écart de ce point de sa position d'équilibre et a^2, b^2, c^2 les trois constantes optiques du cristal.

Mme de Kowalewski est parvenue à former un système de valeurs de ξ, η, ζ qui satisfait au système proposé, qui est tel que, pour $t = 0$, chacune des quantités ξ, η, ζ, de même que leurs premières dérivées par rapport à t, deviennent

égales à des fonctions données de x, y, z, lesquelles toutefois doivent être choisies en accord avec l'équation

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Ces formules générales représentent un certain mouvement possible physiquement sans avoir recours à l'hypothèse de l'éther.

Appell et *Chervet*. — Sur la distribution du potentiel dans une masse liquide ayant la forme d'un prisme rectangulaire indéfini. (358).

N° 7; 18 février.

Genocchi. — Sur les diviseurs de certains polynômes et l'existence de certains nombres premiers. (411).

A propos des recherches de M. Lefébure, l'auteur rappelle les résultats contenus dans une Note publiée en 1868 dans les *Annales* de MM. Brioschi et Cremona, relatifs aux polynômes A_h, B_h, définis en a, b au moyen de l'égalité

$$(a + \sqrt{b})^h = A_h + B_h \sqrt{b}.$$

Lefébure. — Sur la composition de polynômes qui n'admettent que des diviseurs premiers d'une forme déterminée. (413).

Picard. — Sur certaines substitutions linéaires. (416).

Modification à la classification proposée par M. Poincaré.

André (*D.*). — Sur une équation du degré m qui n'a jamais plus de deux racines réelles. (417).

Il s'agit de l'équation

$$u_0 x^m - u_1 x^{m-1} + u_2 x^{m-2} - u_3 x^{m-3} + \ldots = 0,$$

qui ne présente que des variations et dont les coefficients sont les termes d'une série récurrente proprement dite définie par l'égalité

$$u_n = \alpha u_{n-1} + \beta u_{n-2}.$$

Goursat. — Sur une équation différentielle du troisième ordre. (419).

Détermination de toutes les solutions rationnelles de l'équation

$$\frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 + \frac{(1-\nu^2)z^2 + (\lambda^2 + \nu^2 - \mu^2 - 1)z + (1-\lambda^2)}{2z^2(z-1)^2} z'^2$$
$$= \frac{(1-\nu'^2)t^2 + (\lambda'^2 + \nu'^2 - \mu'^2 - 1)t + 1 - \lambda'^2}{2t^2(t-1)^2},$$

où t est la variable indépendante, où λ, μ, ν, λ', μ', ν' sont des constantes. Cette équation a été introduite par M. Kummer dans la théorie de la transformation de la série hypergéométrique.

Halphen. — Sur une courbe élastique. (422).

L'auteur effectue, avec les notations de M. Weierstrass, l'inversion des formules

$$ds = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - (Ar^4 + Br^2 + C)^2}}, \quad d\theta = \frac{Ar^4 + Br^2 + C}{\sqrt{r^2 - (Ar^4 + Br^2 + C)^2}}\,\frac{dr}{r},$$

rencontrées par M. Maurice Lévy dans l'étude de la forme d'équilibre d'une verge élastique de forme circulaire, soumise à une pression toujours normale et uniforme dans toute sa longueur.

N° 8; 25 février.

Sylvester. — Sur les quantités formant un groupe de nonions analogues aux quaternions de Hamilton. (471).

Pansiot. — Sur le calcul de la rotation des taches du Soleil. (500).

Poincaré. — Sur les groupes hyperfuchsiens. (503).

Construction d'une classe de groupes hyperfuchsiens, analogue à la troisième famille de groupes fuchsiens; généralisation de la notion des invariants analogues à la longueur, à la surface, à l'angle, au volume.

Hurwitz. — Sur la décomposition des nombres en cinq carrés. (504).

Le nombre des décompositions du carré d'un entier quelconque m en cinq carrés s'exprime par

$$F(m^2) = 10\,\frac{2^{2k+3} - 1}{2^3 - 1}\,\frac{p^{3\alpha+3} - p^{3\alpha+1} + p - 1}{p^3 - 1}\,\frac{q^{3\beta+3} - q^{3\beta+1} + q - 1}{q^3 - 1},$$

où l'on suppose

$$m = 2^k p^\alpha q^\beta \ldots,$$

$2, p, q, \ldots$ étant ces nombres premiers différents.

Sébert et Hugoniot. — Sur la propagation d'un ébranlement uniforme dans un gaz renfermé dans un tuyau cylindrique. (507).

Il s'agit d'un gaz, primitivement en repos, renfermé dans un tuyau cylindrique fermé à l'une de ses extrémités par un piston auquel on communique brusquement une vitesse V que l'on maintient constante. On suppose que le mouvement s'accomplisse par tranches parallèles.

N° 9; 3 mars.

Sylvester. — Sur une Note récente de M. D. André. (550).

Le dernier résultat signalé par M. André est une conséquence immédiate de la proposition suivante due à M. Sylvester : si $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_m$ sont les coefficients d'une équation du degré m, et si l'on pose

$$G_r = ru_r^2 - (r+1)y_r u_{r-1} u + 1_r,$$

où $y_r = \frac{v+r-1}{v+r}$, v étant une quantité réelle quelconque qui n'est pas intermédiaire entre o et $-m$, l'équation aura nécessairement au moins autant de racines imaginaires qu'il y a de variations de signes dans la série $G_0, G_1, \ldots, G_m$.

André (*D.*). — Théorème permettant de constater que certaines équations algébriques n'ont aucune racine positive. (561).

Si, dans le premier membre de l'équation $f(x) = 0$, tous les termes d'un certain signe sont, chacun, le terme moyen d'un trinôme abaisseur de la première espèce, cette équation n'a aucune racine positive.

Picard. — Sur les fonctions hyperfuchsiennes. (563).

Construction de fonctions hyperfuchsiennes qui n'existent que dans l'hypersphère de rayon un.

Autonne. — Sur les groupes d'ordre fini, contenus dans le groupe des substitutions quadratiques Cremona. (565).

Soient deux substitutions quadratiques de Cremona

$$S = [z_i, \varphi_i(z)], \quad S' = [z_i, \varphi'_i(z)],$$

où $\varphi_i(z)$, $\varphi'_i(z)$ sont mis à la place de $\varphi_i(z_1, z_2, z_3)$, $\varphi'_i(z_1, z_2, z_3)$; le produit $S'S$ est la substitution du quatrième ordre

$$S'S = [z_i, \varphi'_i(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)];$$

M. Autonne dit que S' et S forment un groupe quadratique Cremona, si les produits $S'S$, SS' sont aussi des substitutions quadratiques Cremona; il montre que, pour que diverses substitutions quadratiques, $S, S', S'', \ldots$, forment un groupe quadratique, il faut et il suffit que chaque substitution ait deux points fondamentaux communs avec chacune des autres. Ce théorème lui permet de déterminer les types auxquels appartiennent tous les groupes quadratiques Cremona d'ordre fini.

Lefébure. — Sur la décomposition de polynômes qui n'admettent que des diviseurs premiers d'une forme déterminée. (567).

Liouville (*R.*) — Sur les équations linéaires aux différences partielles du second ordre. (569).

L'auteur montre le parti que l'on peut tirer, pour l'intégration de ces équations, du mode de transformation qu'il a précédemment indiqué.

N° 10; 10 mars.

Goursat. — Sur une équation différentielle du troisième ordre. (609).

Suite des recherches de l'auteur sur les solutions rationnelles de l'équation de M. Kummer.

Lefébure. — Sur la décomposition de polynômes qui n'admettent que des diviseurs premiers d'une forme déterminée. (613).

N° 11; 17 mars.

Sylvester. — Sur la solution d'une classe très étendue d'équations en quaternions. (651).

Stieltjes. — Sur quelques applications arithmétiques de la théorie des fonctions elliptiques. (663).

Soit en général $F_7(n)$ le nombre total de décompositions de n en sept carrés et soient

$$f(k) = \frac{40.32^k - 9}{31}, \quad g(k) = \frac{32^{k+1} - 1}{31},$$

on a

$$F_7(4^k m) = f(k) F_7(m),$$
$$F_7(4^k m) = g(k) F_7(m),$$
$$F_7(4^k m) = \frac{28 f(k) + 9}{37} F_7(m).$$

suivant que l'on a $m \equiv 1$ ou 2 (mod. 4), ($m \equiv 3$ (mod 8), $m \equiv 7$ (mod 8).

Picard. — Sur une nouvelle généralisation des fonctions abéliennes. (665).

Si l'on considère un groupe de substitutions effectuées simultanément sur x, y, de la forme

$$\left(x, y, \frac{ax + b}{cx + d}, \frac{a'y + b'}{c'y + d'}\right),$$

et si, les groupes isolés relatifs à chaque variable étant continus, le groupe d'ensemble est discontinu, on peut former des fonctions des deux variables indépendantes x, y qui restent invariables par les substitutions de ce groupe, et l'on

est ainsi conduit à un type nouveau de fonctions *hyperabéliennes*; d'une façon plus générale, M. Picard donne ce nom à des fonctions de deux variables x, y qui ne changent pas quand on effectue sur ces variables un groupe dont les substitutions sont de l'une et l'autre forme

$$\left(x, y, \frac{ax+b}{cx+d}, \frac{a'y+b'}{c'y+d'}\right) \quad \text{et} \quad \left(x, y, \frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta}, \frac{\alpha' x+\beta'}{\gamma' x+\delta'}\right).$$

Il donne un exemple de telles fonctions, qui tire d'ailleurs son origine de la théorie même des fonctions abéliennes.

Boussinesq. — Sur la poussée d'une masse de sable, à surface supérieure horizontale, contre une paroi verticale ou inclinée. (667).

N° 12; 24 mars.

Menabrea. — Sur la concordance de quelques méthodes générales pour déterminer les tensions dans un système de points réunis par des liens élastiques et sollicité par des forces extérieures en équilibre. (714).

M. le général Menabrea, dans cette Communication, montre, pour le problème dont il s'agit, la concordance de la méthode développée par M. Maurice Lévy dans son *Traité de Statique graphique* et de la méthode déduite du *principe du moindre travail*. Lorsqu'un système élastique se met en équilibre sous l'action de forces extérieures, le travail moléculaire développé dans les liens du système est un minimum. Ce principe, énoncé par Euler, a été l'objet de diverses recherches de la part de M. le général Menabrea

Boussinesq. — Sur la poussée d'une masse de sable, à surface supérieure horizontale, contre une paroi verticale dans le voisinage de laquelle son angle de frottement intérieur est supposé croître légèrement d'après une certaine loi. (720).

Liouville (*R.*) — Sur l'équation $r = q^{2m} t$. (723).

L'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$r = q^{2m} t,$$

s'intègre, si la constante m qu'elle contient est donnée par la formule suivante

$$m = \frac{i}{i+1},$$

où l'on désigne par i un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

Petot. — Sur une extension du théorème de Pascal et de Brianchon aux surfaces du second ordre. (727).

Propriété de dix points d'une surface du second ordre : Si l'on considère deux surfaces quelconques du second ordre S et S', conjuguées au tétraèdre ayant pour sommets quatre de ces points, les deux plans polaires de chacun des six autres points, par rapport à S et S', se coupent respectivement suivant six droites qui appartiennent à un même complexe du premier ordre.

Si, menant par le sommet D du tétraèdre DABC, qui a pour sommets quatre des dix points, un plan fixe H et deux droites fixes λ et μ, on fait correspondre à tout point M de l'espace la droite ω, intersection des deux plans menés respectivement par les droites (H — BCM), (H — ACM) et par les points (λ — ABM) (μ — ABM), les six droites correspondant aux derniers points de la surface appartiennent à un même complexe du premier ordre.

N° 13; 31 mars.

Sylvester. — Sur la correspondance entre deux espèces différentes de fonctions de deux systèmes de quantités, corrélatifs et également nombreux. (779).

A i quantités on peut en associer i autres telles que chaque fonction symétrique (qui est une fonction des différences) des premières sera une fonction des sommes puissances du deuxième, du troisième, du $i^{\text{ième}}$ ... ordre des dernières; par somme puissance, M. Sylvester entend une somme de puissances de quantités données.

Ainsi les quantités $r_1, r_2, \ldots, r_i$; $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ étant liées de telle sorte qu'elles soient respectivement racines des équations

$$ar^i + br^{i-1} + cr^{i-2} + dr^{i-3} + \ldots = 0,$$

$$a\rho^i + \frac{b}{i}\rho^{i-1} + \frac{c}{i(i-1)}\rho^{i-2} + \frac{d}{i(i-1)(i-2)}\rho^{i-3} + \ldots = 0,$$

toute fonction des différences des r s'exprimera par une fonction des sommes puissances $\Sigma\rho^2, \Sigma\rho^3, \ldots, \Sigma\rho^i$, en particulier toute fonction symétrique des différences des r sera une fonction rationnelle et entière de ces $i-1$ sommes puissances.

« En prenant $i = \infty$, le théorème revient à dire que tous les sous-invariants, sources des covariants de $(a, b, c)(x, y)^2$, $(a, b, c, d)(x, y)^3$, ... (à l'infini), seront des fonctions des sommes puissances prises à l'infini, avec la seule exception de la somme linéaire, des racines de l'équation

$$o = a + bx + \frac{c}{1.2}x^2 + \frac{d}{1.2.3}x^3 + \ldots \qquad \text{(à l'infini)}.$$

Tel est le théorème capital découvert par M. le capitaine Mac-Mahon, de l'artillerie royale anglaise. »

Boussinesq. — Calcul approché de la poussée et de la surface de rupture, dans un terre-plein horizontal homogène, soutenu par un mur vertical. (790).

Poincaré. — Sur une équation différentielle. (793).

Etude de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_0 + x\varphi_1 + x^2\varphi_2 + \ldots + x^m\varphi_m + \ldots,$$

où les φ sont des séries trigonométriques en t, à la période 2π, considérée par MM. Gyldén et Lindstedt.

Chervet. — Distribution du potentiel dans une plaque rectangulaire, traversée par un courant électrique, dont le régime est permanent. (795).

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME VIII.

215

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME VIII; 1884. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Acta Mathematica, T. I-II; 1882-1883. — 136-171.

Annales des Mines, 8e série, T. II, 2e semestre 1882; T. III, 1er semestre 1883. — 68-71.

Annales des Ponts et Chaussées, 5e série, T. XX, 2e semestre 1880; 6e série, T. I-II; 1881. — 71-79.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. T. XI, 1882; T. XII, 1883. — 25-32, 59-68.

Annali di Matematica pura ed applicata, 2e série, T. XI; 1882-1883. — 189-194.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni. T. XV; 1882. — 130-135.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. XCVI-XCVII 1883; XCVIII; 1884. — 5-25, 82-105, 201-214.

Journal de l'École Polytechnique. Cah. LII-LIII, T. XXXIII; 1882-1883. — 32-41.

Journal für die reine und angewandte Mathematik. T. XCII; 1882. — 182-189.

Mathematische Annalen, heraugegeben von F. Klein und A. Mayer. T. XIX; 1882 — 123-130.

Nouvelles Annales de Mathématiques, rédigées par MM. Gerono et Brisse. 3e série, t. II; 1883 (2e semestre). — 40-46.

Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger (Années 1877-1878-1879-1880-1881-1882-1883). — 171-173.

Revue d'artillerie. T. XXII; avril-septembre, 1883. — 79-81.

The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. T. XVII-XVIII; 1881-1882. 47-58.

Tidsskrift für Mathematik, udgivet af H.-G. Zeuthen, 4e série. T. III-IV-V-VI; 5e série. T. I. — 174-182.

Zeitschrift fur Mathematik und Physik. T. XX à XXVII (Années 1875 à 1882. — 105-123, 194-201).

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

Abbadie (d'). 13, 22.
Alister. 51.
Allen. 48.
Amthor (A.). 108.
André (C.). 20, 23.
André (D.). 63, 65, 89, 100, 204, 206, 208, 210.
Anonyme. 46.
Antomari (X.). 41.
Appell (P.). 6, 16, 59, 91, 102, 125, 138, 142, 155, 205, 208.
Arago. 22.
Autonne. 13, 23, 210.
Backlund (O.). 16, 103.
Bäcklund (A.). 128.
Baillaud. 12, 16, 204.
Baille. 37.
Banderali. 69.
Barbier (E.). 16, 18, 19.
Barisien (E.). 43.
Barnaud. 22.
Béla (Tötössy). 127.
Bendixon (J.). 162.
Bernardières (de). 22.
Bertrand (J.). 7, 19.
Bianchi. 192.
Biehler (Ch.). 42.
Bierens de Haan. 133.
Bigourdan. 14, 15, 16, 22, 24, 25, 82, 94, 95, 99.
Bing. 174.
Bloch (R.). 71.
Blum. 74.
Böklen. 198, 201.
Bois (P. du). 77.
Boncompagni (B.). 133, 135.
Bonnet (G. Ossian). 100, 103.
Borletti (E.). 43.
Borrelly. 14.
Bossert. 24.
Boulangier. 72.
Bouquet de la Grye. 22.
Bourget (J.). 43.
Bourguet. 13, 14, 148, 151, 160, 161.
Boussinesq (J.). 20, 79, 83, 88, 95, 212 213.
Brassine. 24, 95.
Bretschneider (Alfred). 107.
Brillouin. 31.
Brioschi. 16, 191, 193.
Brisse. 39.
Brunel (G.). 64, 124.
Callandreau. 8, 18, 22, 95.
Canet (G.). 80.
Cantor. 106, 107.
Cantor (G.). 130, 162.
Cardinaal. 197.
Cartier (H.). 43.
Caspary (F.). 183.
Catalan (E.). 46.
Cavallin (C.-B.-S.), 179, 181.
Cayley. 49, 51, 54, 55, 176.
Cesàro. 7, 42.
Chabanel. 42, 43, 44.
Chambeau (A.). 45.
Chambon (J.). 44.
Chappuis. 22.
Chappuis (J.). 31.
Charve. 30.
Chervet. 208, 214.
Christensen (S.-A.). 181.
Christiansen (C.). 173.
Christoffel. 127.
Cockle (J.). 47, 51, 52.
Coggia. 82, 94.
Colding. 172.
Cornaglia (P.-A.). 74
Cornu (A.). 15, 18, 39.

Cotillon, 204.
Courcelle-Seneuil. 22.
Cox. 56.
Crépin (A.). 73.
Crone. 156, 175.
Cruls. 5, 12, 14, 82.
Cunq. 71.
Curie (J.). 78.
Curtze. 105, 106, 118.
Dahl. 176.
Darboux (G.). 10, 12, 84, 85, 88, 91, 95.
Decœur (P.). 74.
Dedekind (R.). 185.
Desmur. 74.
Dewulf (E.). 40.
Dillner (G.). 190.
Dostor (G.). 42, 44.
Dubret. 76.
Duguet. 79.
Duponchel. 14.
Dupuy (C). 72.
Dutordoir. 82.
Dyck (W.). 6.
Elliot. 26, 31, 159.
Eneström (G.). 175.
Enneper. 125.
Falk (M.). 178, 180.
Farkas (J.). 16, 207.
Fauquembergue (E.). 41, 42, 43, 44.
Favaro (A.). 109, 130, 134.
Favereau, 22.
Faye. 12, 17, 23, 96.
Ferrers. 51, 55.
Flamant. 20, 21, 23, 72, 73, 79, 90, 94.
Fleuriais. 22.
Floquet (G.). 61, 202, 203.
Foerster. 19.
Fontaine. 74.
Fontaneau (E.). 100.
Forchhammer (G.). 178.
Forsyth. 48, 57.
Forti (Angelo). 109.
Fouret. 11.
Frobenius. 188.
Fuchs. 150.
Gade (Kr.). 179.
Gaillot. 23.
Geisenheimer, 200.
Geleich (Eugène). 115, 120.
Genese. 55.
Genocchi. 40, 134, 203, 208.
Gérillot. 20.
Giat. 41.
Glaisher. 48, 51, 53, 58.
Goffart (N.). 41, 42, 45.
Gonessiat. 8, 23, 88, 103.
Gorceix, 25.
Gordan (P.). 129.
Gourier. 19.
Goursat. 13, 19, 64, 66, 93, 97, 145, 152, 201, 208, 211.
Gouy. 104.
Gram (J.-P.). 181.
Greenhill. 48, 51, 52, 54, 56, 58.
Günther (S.). 105, 106, 108, 110, 133.
Guichard (C.). 66.
Gylden (H.). 136.
Halphen. 21, 32, 101, 104, 203, 209.
Hansen (P.-C.-V.). 173, 175, 176.
Hansted (Birger). 176, 177.
Harley. 53, 54.
Harnach (A.). 127.
Hart. 58.
Haton de la Goupillière. 70.
Hatt. 22.
Hauck. 199.
Heiberg (J.-L.). 107, 108, 120.
Heilermann. 109.
Henry (Ch.). 108, 131, 134.
Henry (M.-M.). 99, 101.
Héraud. 22.
Hermite (Ch.). 151, 161, 183.
Hers. 126.
Hertz (Heinrich). 184.
Hertzsprung (S.). 175.
Heymann. 194, 201.
Hicks. 53.
Hilaire (A.). 45.
Hill (J.-M.). 47, 50.
Hioux. 31.
Hipler, 106.
Hirst. 53.
Hofmann. 198, 201.
Hudson. 55, 56, 57.
Hulewicz (M.). 77.
Hultsch (F.). 106, 107, 108, 109.
Hugoniot. 209.
Humbert. 90, 93, 95, 98.
Hunyady (Eugen). 187.
Hurwitz. 125, 196, 209.
Isenkrahe (C.). 108.
Jacquier. 78.
Janssen. 24.
Jeffery. 48, 53, 55, 57.
Jensen (J.-H. W.-V.) 175, 177, 180.
Johnson. 58.
Jonquières (de). 6, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 95, 97.
Jordan. 7.
Juel (C.). 176.
Jürgens. 128.
Junghans (E.). 107.
Kantor (S.). 14.
Kien (L.). 45.

Klein 126, 129.
Kœnigs (G.). 31, 40.
Koenigsberger (L.). 187.
Korteweg. 106.
Kotányi. 199.
Kowalewsky (Mme de). 207.
Kramer (P.). 116.
Krause. 126, 128.
Krebs (C.). 179.
Kretz. 17.
Krey. 129.
Kronecker (L.). 182.
Krumbiegel (B.). 108.
Lagrenée (H. de). 75.
Laguerre. 203, 204.
Lalanne. 15.
Laquière. 41.
Lavollée. 79.
L. B. 43.
Léauté. 7, 14, 16, 36, 38, 87, 202, 206.
Lecornu (L.). 39.
Ledieu. 16, 18.
Lefébure. 207, 208, 210, 211.
Lehmann. 108.
Lemoine (E.). 46.
Leonardt. 130, 200.
Le Paige. 19, 20, 206, 207.
Levaire (E.). 40.
Lévy (L.). 90.
Lévy (M.). 77, 88.
Lévy-Lambert. 71.
Lez. 41.
Lindemann. 127, 129.
Lindstedt (A.). 96, 100.
Lionnet. 40.
Liouville (R.). 83, 94, 205, 211, 212.
Lipschitz. 101, 161.
Lœwy. 7, 9, 13, 14, 17, 18.
Lorenz (L.). 171.
Lorsch (Ad.). 107.
Lucas (Ed.). 6. 12, 14, 38.
Mahler. 110.
Malet (John-C.). 189,192.
Malmsten. 136.
Mannheim. 50.
Markoff (A.). 124.
Marre (Aristide). 135.
Mathiessen (L.). 108.
Maximowitch (W.). 104.
Meisel. 196.
Meyer (Oswald). 172.
Mellin (H.). 159.
Menabrea. 212.
Méray. 62.
Meyer (Ad.). 180.
Minkowski. 11.
Mittag-Leffler. 190.
Mocquery (C.). 71, 75.
Morawetz. 200.
Moret-Blanc. 41, 42, 44, 45.
Mouchez. 23.
Moutier. 38.
Muir. 54, 55, 56, 57.
Mynster-Fischer (J.-P.). 173.
Nagel (K.). 128.
Narducci (E.). 131, 133.
Netto. 151.
Nicolas. 31.
Niven. 57.
Nöther. 106, 110, 187.
Obrecht (A.). 18, 95.
Ocagne (M. d'). 42, 43, 44, 45, 103.
Olry. 68.
Oppermann (L.). 173, 179, 182.
Pansiot. 209.
Parmentier. 31.
Pasch. 126, 197.
Paulli (H.). 178.
Peiper (R.). 168.
Pellet. 13, 20.
Penfentenyo. 22.
Périgaud. 6, 14, 25, 101, 103.
Perrier. 22.
Perrin. 17, 18, 23.
Perron. 76.
Perrotin. 22, 25, 91, 104.
Perrott (Joseph). 132.
Petersen (Julius). 175, 176, 177, 179, 180.
Petot, 212.
Petzold. 199.
Picard. (E.). 8, 15, 18, 82, 84, 93, 97, 129, 148, 156, 206, 208, 210, 211.
Picart (A.). 18, 20, 21, 22.
Picquet. 9, 14, 38.
Piuma. 191.
Poincaré (H.). 9, 13, 14, 21, 88, 89, 95, 97, 102, 104, 129, 136, 145, 156, 206, 207, 209, 214.
Poske (Fr.). 120.
Prost. 48, 50, 55.
Puiseux, 22.
Quet. 90.
Radau. 20, 95, 96, 105, 202.
Raclot (M.). 44.
Raffy (L.). 63.
Rambaud. 103.
Rayet (G.). 99.
Rayleigh (Lord). 23.
Realis (S.). 40, 42, 45, 46.
Rebuffel. 42.
Resal (H.). 37, 44, 96.
Reye. 138.
Riccardi (Pietro). 133.

Roberts (S.). 50, 52, 53.
Rolhig (O.). 107.
Romero. 41.
Sachse (Arnold). 108, 201.
Saint-Germain (de). 46.
Saint-Venant (de). 20, 21, 23, 90, 94.
Saltel. 46.
Sartiaux. 69.
Sauvage. 25.
Schapira (Herm.). 108.
Schering (G.). 143.
Schiaparelli. 106.
Schlömilch. 195, 200, 201.
Schmidt (Ejgil). 178.
Schœnborn (W.). 120.
Schœweg. 197.
Schulhof. 24.
Schumann. 197, 200, 201.
Schur. 128.
Schrœter. 195.
Schwarz. 5.
Schwedoff. 13.
Schwering. 196.
Scott. 49.
Sebelien (J.). 182.
Sébert. 209.
Seguela. 69.
Sesdelin (C.). 179.
Sharp. 49.
Siacci. 81.
Siegler. 73.
Simony. 126.
Stahl (Wilhelm). 185.
Stearn. 48.
Steen (A.). 171, 172, 178, 179, 181.
Steinschneider (M). 105, 108, 132.
Stephanos (C.). 15, 19, 94, 99.
Stern (M.-A.). 189.
Sthinthal. 57.
Stickelberger. 188.
Stieltjes. 82, 85, 88, 100, 102, 104, 211.
Stone. 23.
Strékalof (V. de). 41.
Stuart. 56.
Study. 197.
Sturm (R.). 128, 129.
Suter (Henry). 109.
Sylvester. 8, 12, 99, 206, 209, 210, 211, 213.
Tacchini. 12.
Taylor. 49, 54.
Teffé (de). 12.
Teige (Joseph). 119.
Térao. 22.
Thaarup (F.). 177.
Thiele (T.-N.). 172, 174, 176, 182.
Thieme. 195.
Thiré. 69.
Thollon. 10, 21.
Thomæ. 195, 198.
Thomson (J.). 58.
Tisserand. 9, 22, 82, 84.
Tonelli. 194.
Trépied. 9, 103, 104.
Tresca. 88.
Treutlein (P.). 106, 107, 121.
Trouvelot. 24.
Tucen (C.). 177.
Tucker. 57.
Valentiner. 157, 174, 177, 178.
Vanecek (J.-S. et M.-N.). 15, 17, 104, 105.
Veltman. 198, 200.
Veronese (G.). 126, 191, 193.
Vicaire. 69.
Villarceau (Yvon). 73.
Vogt (Heinrich). 188.
Volterra. 189.
Voss (L.). 123.
Wargen. 50.
Weber (H.). 106, 185.
Weiler. 199.
Weissenborn (H.). 107, 108, 119.
Wernicke. 108.
Wiedemann (Eilhard). 107.
Wiener. 197.
Willote (H.). 72.
Winterberg. 115.
Wittstein. 200.
Wittwer. 199, 200.
Wolwill (L.). 107, 108.
Zech. 106.
Zetsche. 107.
Zeuthen. 144, 171, 172, 174, 175, 176, 177, 179, 180, 181.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME VIII.

9404 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

QA
1
B8
v.19
Physical &
Applied Sci.
Serials
Math

Bulletin des sciences
mathématiques

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY